EPSILON

NO 11

tháng 10 - 2016

Có thể nói là văn hóa Mỹ ngày nay đường như không khuyến khích nam giới và phụ nữ trong toán học.

MICHAEL SIPSER
(Nước Mỹ chọn và luyện đội tuyển thi toán quốc tế như thế nào?)

Người ta thường hay nói "Mọi con đường đều dẫn đến Roma". Nhưng nếu đó là những con đường lát gạch trang trí tuần hoàn, thì chúng sẽ đều dẫn đến Lisbon!

NGUYỄN TIẾN DŨNG
(Đối xứng trong nghệ thuật)

Epsilon
Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

VÀ CÁC CHUYÊN MỤC KHÁC

Epsilon
Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

No 11
tháng 10 - 2016

LỜI NGỎ

Những ngày này 2 năm trước ý tưởng về Epsilon còn chưa được hình thành. Lúc đó, với sự gợi ý của GS Ngô Bảo Châu, Hội toán học Việt Nam và Viện nghiên cứu cao cấp về toán cùng với một số nhân sự tích cực đang cố gắng xin rất phép để cho ra đời tạp chí Pi, tạp chí phổ biến toán học dành cho học sinh và sinh viên. Nhưng rồi thủ tục không đơn giản như mọi người tưởng ban đầu và dự án bị chựng lại. Epsilon đã được ra đời như một cuộc tổng diễn tập trước khi vào trận đánh chính thức. Ngày ý tưởng ra đời Epsilon được công bố, TS Lê Thống Nhất, một trong những người được nhắm sẽ làm Phó tổng biên tập của Pi đã làm bài thơ chúc mừng

Chỉ một cánh én nhỏ
Không làm nên Mùa xuân
Không bắt đầu từ nhỏ
Chẳng có thứ ta cần
Từ một cánh én nhỏ
Sẽ sinh sôi dần dần
Ra cả trời én nhỏ
Rõ ràng là Mùa Xuân

Epsilon số 11 lần này được xuất xưởng trong bối cảnh các thủ tục thành lập Tạp chí Pi đã có những bước tiến triển lạc quan và sẽ có giấy phép chính thức trong tháng 10 này. Có nghĩa là khả năng số báo Pi đầu tiên sẽ ra đời vào tháng 1/2017 là rất cao.

Trong khi chờ đợi số báo chuyên nghiệp đầu tiên đó, Epsilon vẫn sẽ làm nhiệm vụ của mình, chắt chiu những điều nho nhỏ đem đến cho bạn đọc của mình.

Epsilon nguyện làm cánh én nhỏ để báo hiệu Mùa Xuân.

MỤC LỤC

GIẢI TOÁN CÙNG BẠN

Hà Huy Khoái
(*Hà Nội*)

LỜI TỰA

Trình bày lời giải của một bài toán khi ta đã biết lời giải không phải là khó. Nhưng trình bày thế nào để người đọc hiểu được lối suy nghĩ dẫn dắt đến lời giải đó luôn là rất khó. Và đó thực sự mới là điều mà ta cần học. Vì suy cho cùng, không thể học thuộc hết tất cả các lời giải. Cái mà ta có thể học, đó là những suy luận có lý dẫn dắt ta đến với lời giải. Số 11 của Epsilon xin giới thiệu với độc giả một bài toán như thế với sự dẫn dắt của thầy Hà Huy Khoái.

Cái khó nhất của mỗi người khi đứng trước bài toán là tìm phương pháp gì để giải quyết? Không ai "mách" cho bạn là với bài đó, cần dùng phương pháp gì (trừ những bài tập "minh hoạ" cuối mỗi chương sách). Những cuốn sách bài tập (với đề ra, lời giải hoàn chỉnh) nhiều khi không cho ta biết làm thế nào mà tác giả tìm ra cách giải đó. Dù đã hiểu lời giải, thậm chí đã nhớ lời giải, vẫn chưa thể nói là đã hiểu bài toán nếu chưa trả lời được câu hỏi trên. Và nếu gặp lại bài toán đó, nhưng với cách phát biểu khác, bạn có thể vẫn tưởng như gặp nó lần đầu.

Những điều nói trên đây gợi cho tôi ý định viết một cuốn sách bài tập, nhưng trong đó không có sẵn những lời giải đẹp đẽ, mà bạn đọc cùng với tác giả lần mò cùng nhau để tìm cách giải quyết.

Để làm ví dụ cho việc đó, mà tôi nghĩ là cần thiết khi giảng dạy, tôi chọn ra đây (chưa thể gọi là "chọn lọc", vì không có đủ thời gian) một số bài toán thuộc những loại khác nhau, và thuộc những phần mà theo tôi chưa được giảng dạy nhiều ở THPT (chuyên).

Tôi sẽ cố gắng bổ sung để đến khi có thể hoàn thành một cuốn sách bài tập theo cách đó.

Ta hãy bắt đầu từ bài toán sau đây, mà theo kinh nghiệm cá nhân, "độ khó" của nó tương đương với bài ra trong kỳ thi học sinh giỏi toàn quốc môn toán (có thể không là bài khó nhất, nhưng không là bài dễ nhất).

Ví dụ. *Cho p là số nguyên tố lẻ. Hãy xây dựng dãy $\{a_n\} \in \mathbb{N}$ sao cho $\forall n$, a_n là số nguyên không âm nhỏ nhất khác với những số trước đó của dãy, và $a_0, a_1, \ldots, a_n$ không chứa bất kì cấp số cộng khác hằng nào có p số hạng.*

Bài ra chưa hề cho thấy có cách gì tiếp cận lời giải. Vậy thì cách duy nhất trong trường hợp này là thử tính những số hạng đầu tiên.

Từ bài ra, rõ ràng ta có

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ \dots \\ a_{p-2} = p-2 \end{cases}$$

Dễ thấy $a_{p-1} \neq p-1$, và dãy được tiếp tục như sau:

$$\begin{cases} a_{p-1} = p \\ a_p = p+1 \\ \cdots \\ a_{2p-3} = 2p-2 \end{cases}$$

Tiếp theo sẽ phải là $a_{2p-2} = 2p$. Như vậy, ta cứ "tuần tự" cộng thêm một đơn vị, nhưng chỉ được làm đều đó với từng đọan $p-1$ số hạng.

Thử nghĩ lại, ta từng gặp điều gì tương tự? "*Sau* $p-1$ *thì phải thay đổi?*" Điều này gợi ý cho ta để giải quyết bài toán, có thể cần sử dụng *cơ số* $p-1$. Tất nhiên, đây chỉ là một phỏng đoán về hướng đi. Cần phải kiểm nghiệm.

Xét các số hạng đã cho viết trong cơ số $p-1$. Từ a_0 đến a_{p-2} thì $a_k = k$. Tất nhiên, nếu viết trong cơ số $\geq p-1$ thì $k = \overline{k}$, với $k = 0, 1, \dots, p-2$. Nhưng khi viết $p-1$ trong cơ số $p-1$, ta được $p-1 = \overline{10}$, trong khi $a_{p-1} = p$. Số $\overline{10}$ chỉ bằng p nếu xem nó là số trong cơ số p.

Tiếp tục với những số đã viết trên đây, ta dự đoán quy luật: *a_n nhận được bằng cách viết n trong cơ số $p-1$ và đọc nó trong cơ số p.*

Xét dãy $B = \{b_n\}, n = 0, 1, \dots$, mà b_n nhận được bằng cách viết n trong cơ số $p-1$, đọc trong cơ số p. Ta hy vọng rằng, đây chính là dãy cần tìm.

Nhận xét 1. *Số $b \in B$ khi và chỉ khi nếu viết b trong cơ số p thì b không chứa chữ số $p-1$.*

Điều này là rõ ràng từ định nghĩa dãy $\{b_n\}$.

Nhận xét 2. *Trong B không có cấp só cộng nào gồm p phần tử.*

Thật vậy, giả sử $\exists a, d \in \mathbb{N}$ sao cho

$$a, a+d, \dots, a+(p-1)d \in B.$$

Cần suy ra mâu thuẫn, tức là cần chứng minh rằng trong các số trên có số không thuộc B, tức là số chứa chữ số $\equiv (p-1) \pmod{p}$.

Tất nhiên điều này dẫn đến việc cần chứng minh tồn tại i mà các chữ số thứ i của các số trên đây lập thành một hệ thặng dư đầy đủ modulo $p-1$.

Giả sử $a = \overline{a_1 a_2 \cdots a_m}$ và $d = \overline{d_1 d_2 \cdots d_m}$. Giả sử i là chữ số khác 0 đầu tiên của d tính từ phía bên phải

$$d = \overline{d_1 d_2 \cdots d_i \underbrace{00 \cdots 0}_{k \text{số}}}, \text{ với } d_i \neq 0.$$

Khi đó nếu $a + kd = \overline{c_1c_2\cdots c_i\cdots c_n}$, thì $c_i \equiv a_i + k \cdot d_i \pmod p$. Do p là số nguyên tố, k và d_i nhỏ hơn p nên $a_i + kd_i, k = 0, 1, \ldots, p-1$ lập thành hệ thặng dư đầy đủ modulo p, tức là tồn tại k để $a + kd$ có chữ số (thứ i từ phải sang) bằng $p - 1$.

Để kết thúc, ta chứng minh $a_n = b_n$ với mọi n. Ta có $a_0 = b_0$. Giả sử $a_k = b_k$ với $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Theo định nghĩa dãy a_n ta có $a_n \le b_n$.

Nếu $a_n \in B$ thì a_n không thể nhỏ hơn b_n (vì nếu ngược lại, theo giả thiết quy nạp, a_n phải bằng a_i nào đó đứng trước nó. Như vậy, chỉ còn phải chứng minh $a_n \in B$.

Giả sử ngược lại, $a_n \notin B$. Ta sẽ suy ra mâu thuẫn nếu tìm được cấp số cộng p số hạng trong dãy $\{a_n\}$. Thực ra, "trong tay" chúng ta mới có các phần tử của dãy B, nên phải dựa vào chúng. Cần tìm cấp số cộng này trong những số thuộc B mà ta đã biết, tức là những số nhỏ hơn a_n và không chứa chữ số $p-1$ khi viết trong cơ số p. Để ý rằng a_n có một số chữ số $(p-1)$ khi viết trong cơ số p. Như vậy, chỉ cần trừ đi một số dương không vượt quá $p-1$ tại những vị trí đó để được số thuộc B và nhỏ hơn a_n. Cách làm bây giờ đã quá rõ ràng.

Giả sử $a_n = \overline{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}$. Xét số d mà khi viết trong cơ số p có dạng $d = \overline{d_1d_2\cdots d_m}$ trong đó

$$d = \begin{cases} 1 \text{ nếu } \alpha_i = p-1 \\ 0 \text{ nếu } \alpha_1 \neq p-1 \end{cases}$$

Do tồn tại chữ số của a_n bằng $p-1$ nên $d \ge 1$.

Xét dãy $a_n - d, \ldots, a_n - (p-1)d$. Các số này không có chữ số $p-1$ khi viết trong cơ số p, tức là đều thuộc B. Mặt khác, các số đều hơn a_n nên theo giả thiết quy nạp, chúng đều thuộc dãy $\{a_n\}$.

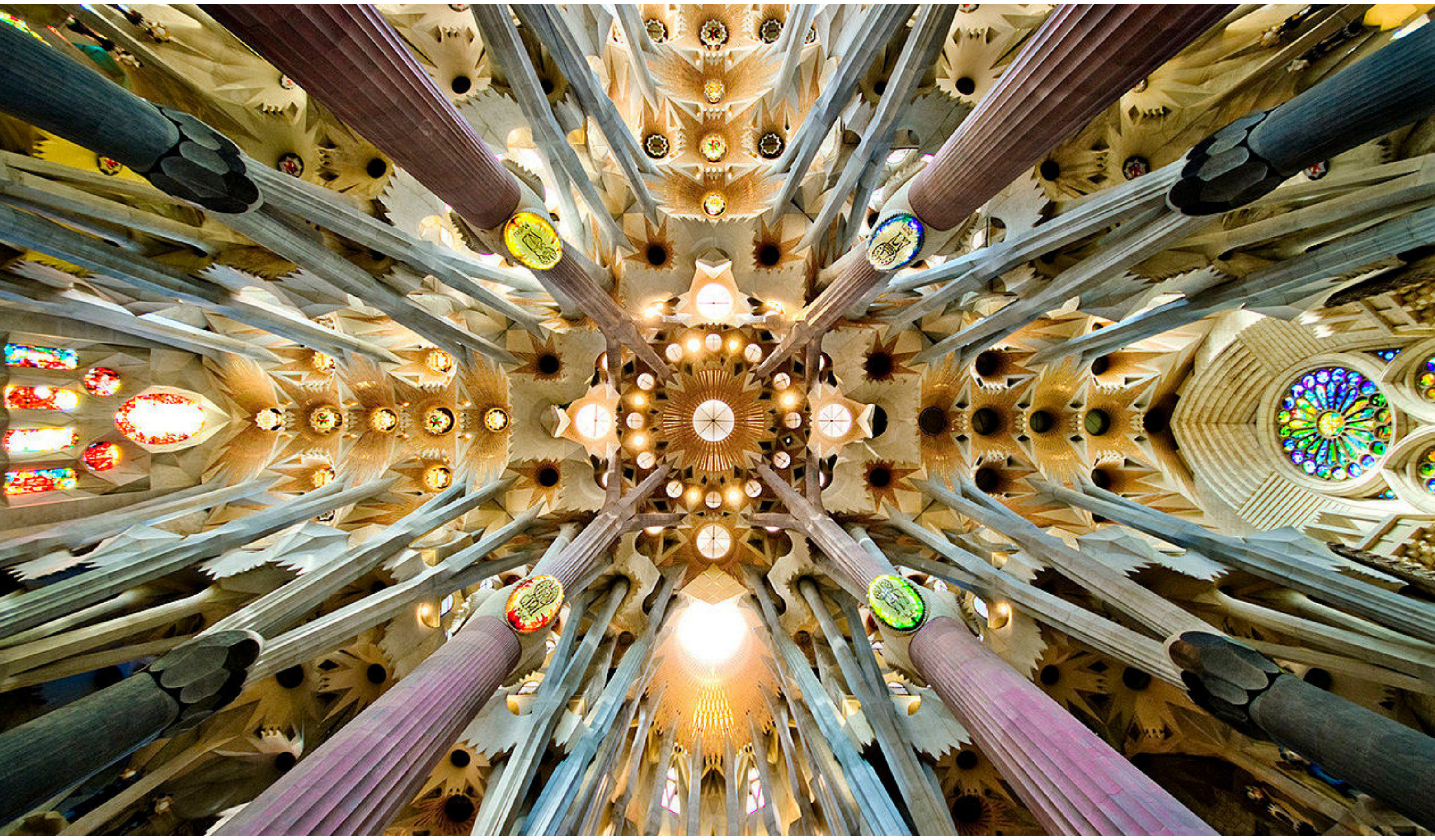
Như vậy, ta nhận được dãy $a_n - (p-1)d, a_n - (p-2)d, \ldots, a_n$ lập thành cấp số cộng có p số hạng. Mâu thuẫn này kết thúc chứng minh.

ĐỐI XỨNG TRONG NGHỆ THUẬT

Nguyễn Tiến Dũng
(*Đại học Toulouse, Pháp*)

GIỚI THIỆU

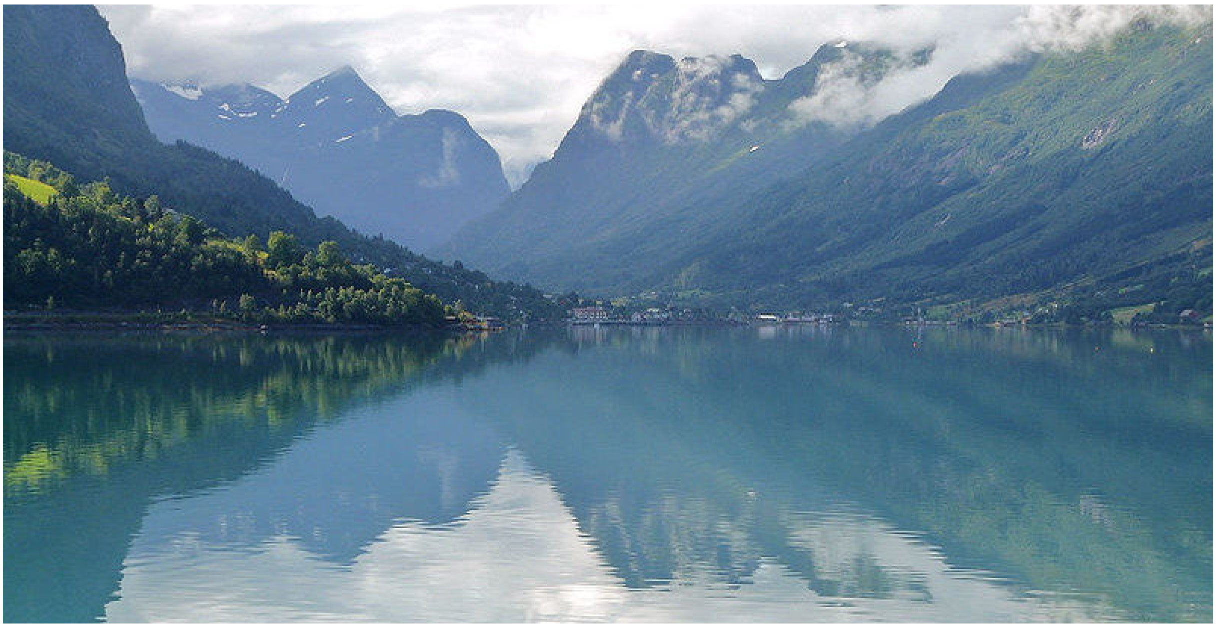
Toán học và nghệ thuật, có cái gì chung? Là cái đẹp? Hay là sự chặt chẽ? Trong số này, chúng tôi vinh dự giới thiệu một chương trong sách "Toán học và Nghệ thuật" của GS. Nguyễn Tiến Dũng do Sputnik xuất bản.



Hình 1: Mái nhà thờ Sagrada Familia ở Barcelona (Tây Ban Nha), do nghệ sĩ kiến trúc sư Antonio Gaudí (1852 – 1926) thiết kế, nhìn từ bên trong gian giữa. Nguồn: Wikipedia.

Các hình đối xứng là các hình có sự giống nhau giữa các phần, tức là chúng tuân thủ nguyên lý *lặp đi lặp lại* của cái đẹp. Chính bởi vậy mà trong nghệ thuật, và trong cuộc sống hàng ngày, chúng ta gặp rất nhiều hình đối xứng đẹp mắt. Ngay các bài thơ, bản nhạc cũng có sự đối xứng. Tuy nhiên chương này sẽ chỉ bàn đến đối xứng trong các nghệ thuật thị giác (visual arts).

1. Các phép đối xứng



Hình 2: Mặt nước phản chiếu tạo hình ảnh với đối xứng gương.

Trong toán học có định lý sau: Mọi phép biến đổi bảo toàn khoảng cách trong không gian bình thường của chúng ta (tức là không gian Euclid 3 chiều hoặc trên mặt phẳng 2 chiều) đều thuộc một trong bốn loại sau:

1) *Phép đối xứng gương* (mirror symmetry), hay còn gọi là *phép phản chiếu* (reflection): Trong không gian 3 chiều là phản chiếu qua một mặt phẳng nào đó, còn trên mặt phẳng là phản chiếu qua một đường thẳng.

2) *Phép quay* (rotation): Trong không gian 3 chiều là quay quanh một trục nào đó, còn trên mặt phẳng là quay quanh một điểm nào đó, theo một góc nào đó.

3) *Phép tịnh tiến* (translation): Dịch chuyển tất cả các điểm đi cùng một khoảng cách theo cùng một hướng nào đó. Như kiểu ánh xạ $\tau : (x, y) \mapsto (x + T, y)$ trên mặt phẳng, dịch chuyển các điểm theo hướng của trục x một đoạn có độ dài bằng T.

4) *Phép lượn* (glide), là kết hợp của một phép đối xứng gương và một phép tịnh tiến theo hướng song song với trục giữa hay mặt giữa của đối xứng gương đó. Như kiểu ánh xạ $g : (x, y) \mapsto \left(x + \frac{T}{2}, -y\right)$ là kết hợp của phép đối xứng gương biến y thành $-y$ và phép tịnh tiến biến x thành $x + \frac{T}{2}$. Chú ý rằng nếu chúng ta thực hiện liên tiếp một phép lượn hai lần thì lại được một phép tịnh tiến.

Định lý trên không quá khó, và có thể dùng làm bài tập thú vị cho học sinh THCS (trường hợp 2 chiều) và THPT (trường hợp 3 chiều).

Hình 3: Con sao biển có cả đối xứng gương lẫn đối xứng quay một phần năm vòng tròn. Có những loại sao biển có n chân với $n > 5$ (thậm chí với $n = 18$), và khi đó nó đối xứng quay theo góc $\frac{2\pi}{n}$.

Hình 4: Đường viền sư tử tại thành cổ Persepolis (Iran).

Nếu chúng ta có một hình (hai chiều hoặc ba chiều), và có một trong các phép biến đổi như trên bảo toàn hình đó (tức là đổi chỗ các điểm của hình cho nhau nhưng biến hình vào chính nó), thì ta gọi đó là một *phép đối xứng* của hình. Tất nhiên, ta luôn có một phép đối xứng *tầm thường*, tức là phép giữ nguyên tất cả các điểm. Nhưng khi nói đến đối xứng, người ta thường hiểu là phép đối xứng không tầm thường. Nếu một hình có ít nhất một phép đối xứng không tầm thường, thì được gọi là một *hình đối xứng*. Hình nào mà có càng nhiều phép đối xứng, thì hình đó càng đối xứng.

Phép tịnh tiến và phép lượn khác phép phản chiếu và phép quay ở chỗ nếu ta cứ lặp đi lặp lại

Hình 5: Một dải gỗ trang trí. Nguồn: invitinghome.com.

cùng một phép tịnh tiến hay phép lượn lên một điểm ban đầu nào đó, thì điểm đó sẽ chạy dần ra vô cùng. Bởi vậy nếu nói một cách chặt chẽ thì không có một phép tịnh tiến hay phép lượn nào có thể bảo toàn một vật hay một hình hữu hạn. Nhưng nếu ta chấp nhận là phép tịnh tiến không cần được thực hiện trên toàn bộ hình mà chỉ trên một phần của hình, hoặc ta hình dung rằng hình có thể được trải dài nối tiếp ra đến vô cùng, thì các phép tịnh tiến và phép lượn cũng trở thành phép đối xứng, theo nghĩa mở rộng.

Hình 4 khắc họa những con sư tử trên tường thành phố cổ Persepolis ở Iran là một ví dụ về phép đối xứng tịnh tiến theo nghĩa mở rộng: vector tịnh tiến ở đây là vector nối từ mũi một con sư tử đến mũi của con sư tử tiếp theo. Còn hình 5 có phép đối xứng lượn theo nghĩa mở rộng.

Hình 6: Các công trình kiến trúc rất hay có đối xứng gương giữa hai bên. Trong ảnh là Mosque (nhà thờ Hồi giáo) tại Abu Dhabi.

Trong toán học, tập hợp các phép đối xứng của một vật hay một hình được gọi là một *nhóm* (group), bởi ta có thể làm hai phép toán trên đó, là *phép nhân* (tích của hai phần tử) và *phép nghịch đảo*. Nghịch đảo của một phép biến đổi đối xứng (bảo toàn hình) chính là phép biến đổi ngược lại, tất nhiên cũng bảo toàn hình. Còn tích của hai phép biến đổi đối xứng chính là phép "hợp thành" của chúng: đầu tiên ta thực hiện biến đổi theo phép thứ nhất, rồi biến đổi tiếp theo phép thứ hai. Tất nhiên, nếu cả hai phép biến đổi bảo toàn hình, thì hình vẫn được bảo toàn khi ta thực hiện liên tiếp hai phép biến đổi đó.

Hình 7: Tháp Phước Duyên ở chùa Thiên Mụ (Huế) có đối xứng theo hình bát giác, và kiến trúc xung quanh có đối xứng gương.

Các công trình kiến trúc, đồ vật, hình họa và trang trí nghệ thuật có thể được phân loại theo nhóm các đối xứng của chúng. Ví dụ, tháp Phước Duyên ở chùa Thiên Mụ (Hình 7) có tám mặt, với đáy giống một hình bát giác đều, và như vậy nhóm đối xứng của nó cũng giống như nhóm đối xứng của một hình bát giác đều (nếu ta bỏ qua các chi tiết không đối xứng trên tháp, ví dụ như không phải mặt nào cũng có cửa). Tháp Eiffel ở Paris (Hình 8) có bốn mặt giống nhau, đáy hình vuông, nên nhóm đối xứng của nó giống nhóm đối xứng của hình vuông.

Ở dưới đây, chúng ta sẽ tìm hiểu sự phân loại theo nhóm đối xứng cho các hình đa giác, rồi cho các trang trí đường viền (frieze) và cho các kiểu lát gạch tuần hoàn (tessellation).

2. Phân loại đa giác theo nhóm đối xứng

Vào khoảng năm 2013, tôi có dành một buổi để tìm hiểu cùng với con gái, lúc đó đang học năm cuối THCS (ở Pháp gọi là "collège"), về các nhóm đối xứng của các đa giác. Kết quả của buổi

Hình 8: Tháp Eiffel ở Paris với 4 mặt như nhau, có nhóm đối xứng D_4 giống hình vuông.

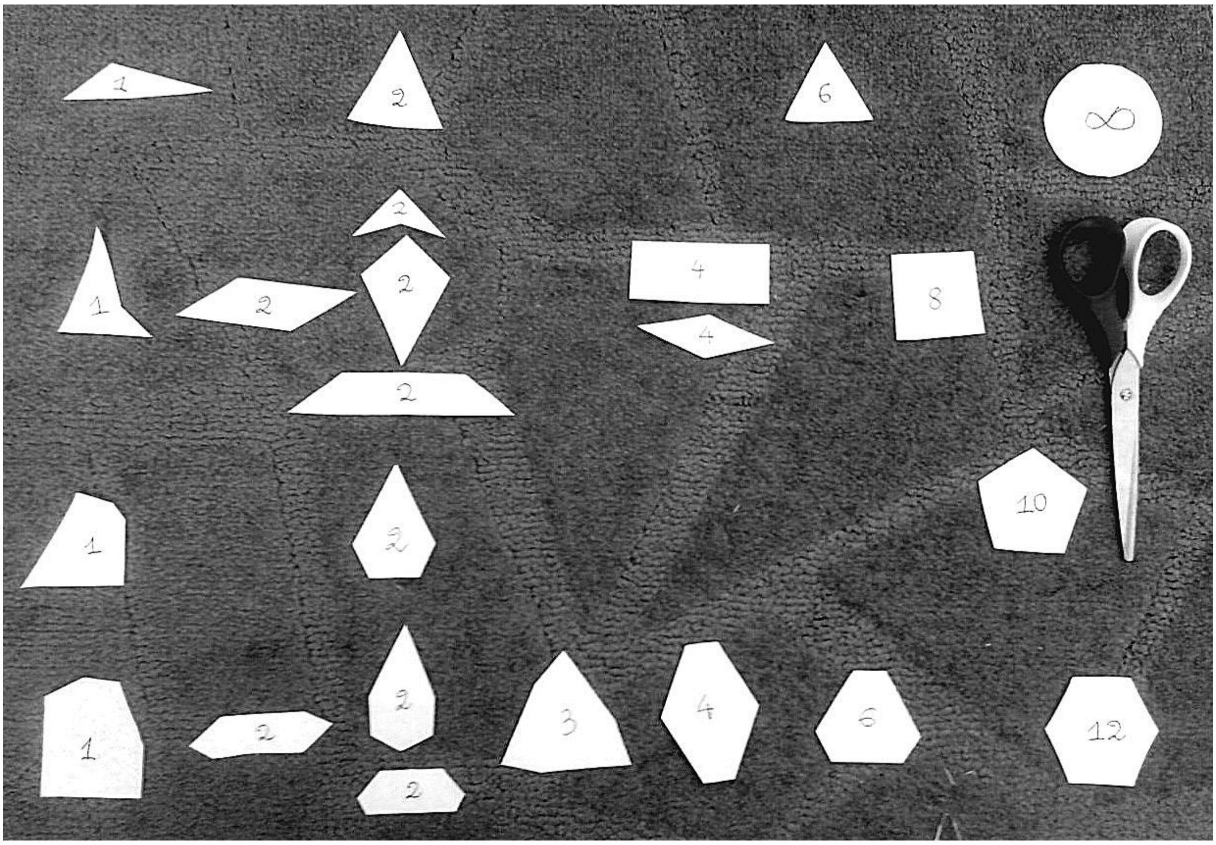
tìm hiểu và thực hành cùng với giấy và kéo đó được ghi lại trên Hình 9 và được viết lại chi tiết thành một chương trong quyển sách *Các bài giảng về toán cho Mirella*. Đây là một hoạt động thực hành toán học đơn giản mà thú vị, các bạn học sinh rất nên làm.

Đầu tiên là xét các tam giác. Chúng có thể có 1 đối xứng (trong trường hợp tam giác không cân, chỉ có phép "để yên" là bảo toàn tam giác), 2 đối xứng (nếu là tam giác cân, ngoài phép để yên còn có phép đối xứng gương), hoặc mấy đối xứng nếu là tam giác đều? Có những người sẽ trả lời là 3, và có những người sẽ trả lời là 4. Câu trả lời chính xác là 6, trong đó có 3 phép đối xứng gương, và 3 phép quay theo các góc $0°$, $120°$ và $240°$ (quay theo góc $0°$ có nghĩa là để yên).

Đến lượt tứ giác: Nhiều đối xứng nhất là hình vuông, với 8 đối xứng (4 đối xứng gương và 4 phép quay), tiếp theo là đến hình chữ nhật và hình thoi đều có 4 đối xứng. Tiếp theo là các hình có 2 đối xứng: Hình bình hành (với đối xứng quay $180°$), hình thang cân, hình mũi tên và hình cánh diều (với đối xứng gương). Còn nếu lấy một hình tứ giác tùy ý, không có cạnh nào bằng cạnh nào, thì nhóm các đối xứng của nó sẽ là nhóm tầm thường, chỉ có mỗi một phần tử, là phép để yên.

Đến lượt ngũ giác: lại chỉ có 3 trường hợp, tương tự như là với tam giác, chứ không có nhiều trường hợp như là tứ giác. Khi ngũ giác đều thì có $5 \times 2 = 10$ đối xứng, nếu không đều thì hoặc là nhóm đối xứng chỉ có một phần tử (phép để yên) hoặc có hai phần tử (đối xứng gương và phép để yên). Con sao biển trên Hình 3 có hình sao năm cánh đều, và nhóm đối xứng của nó bằng nhóm đối xứng của một ngũ giác đều.

Đến lượt lục giác thì lại có rất nhiều trường hợp khác nhau, rồi đến thất giác thì lại chỉ có 3 trường hợp, và cứ thế. Từ các thí nghiệm này, ta rút ra được một số kết luận toán học sau:



Hình 9: Các đa giác và số các đối xứng của chúng.

- Hình n-giác thì có thể có nhiều nhất là $2n$ đối xứng, ứng với trường hợp n-giác đều. Nhóm đối xứng trong trường hợp đó gồm n đối xứng gương và n phép quay, và gọi là *nhóm nhị diện* (*dihedral group*) D_n. Nếu n-giác không đều, thì nhóm đối xứng của nó là một nhóm con của nhóm D_n, và số các đối xứng là một ước số của $2n$.
- Nếu n là số nguyên tố thì chỉ có 3 khả năng xảy ra: hoặc nhóm đối xứng là D_n, hoặc nhóm đó có hai phần tử trong đó phần tử không tầm thường là đối xứng gương, hoặc là nhóm tầm thường (chỉ có mỗi phép để yên).

Khi số cạnh của đa giác đều tiến tới vô cùng thì ta được hình tròn, là hình có nhiều đối xứng nhất trong các hình phẳng: vô hạn đối xứng (quay quanh tâm theo góc tùy ý, và đối xứng gương theo đường kính tùy ý).

3. Bảy kiểu trang trí đường viền

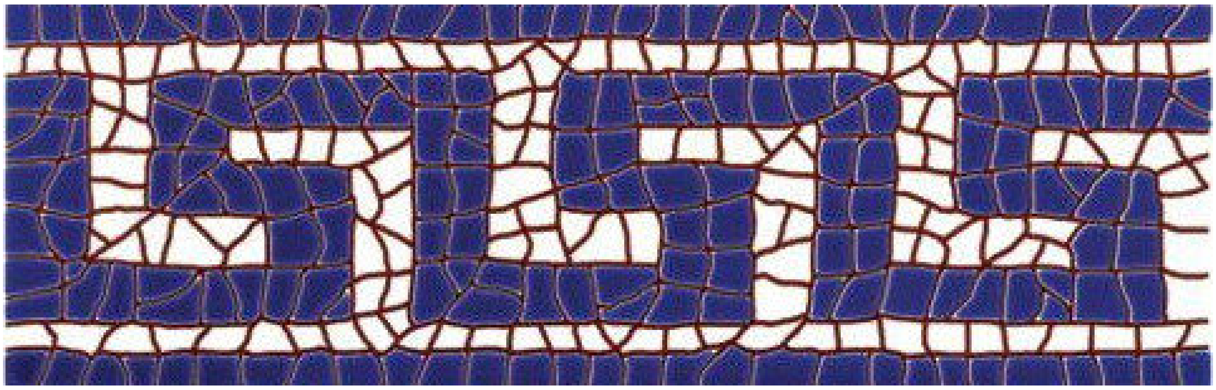
Các trang trí trên các dải mép tường, mép bàn, mép váy, hay những con đường dài và hẹp được gọi chung là trang trí *đường viền* ("frieze" tiếng Anh, "frise" tiếng Pháp). Có thể hình dung một đường viền như là một dải băng D hẹp và dài (coi như dài vô tận cho đơn giản) nằm ngang trên mặt phẳng:

$$D = \mathbb{R} \times [-a, a] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -a \le y \le a\}.$$

Hình 10: Trang trí trên một mái nhà ở Toulouse.

Theo nguyên lý lặp đi lặp lại của cái đẹp, người ta thường trang trí đường viền một cách tuần hoàn, tức là hình trang trí trên dải băng D có tính chất bất biến theo một phép tịnh tiến (dịch sang phải hoặc sang trái một khúc có độ dài T nào đó):

$$\tau : (x, y) \mapsto (x + T, y).$$

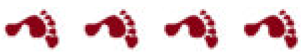


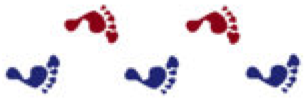
Hình 11: Gạch đá hoa trang trí theo một kiểu phương Đông.

Ví dụ như trên Hình 4, các con sư tử được xếp cách đều nhau trên một đường viền, và dịch một con sư tử sang bên phải một đoạn bằng khoảng cách giữa hai cái mũi của hai con sư tử liên tiếp thì được con sư tử tiếp theo.

Các phép tịnh tiến bảo toàn một trang trí đường viền tuần hoàn tạo thành một nhóm tương đương với $\mathbb{Z}$, tức là tập các số nguyên: với mỗi số nguyên $k \in \mathbb{Z}$ thì ta có một phép "tịnh tiến k bước" bảo toàn hình trang trí: $\tau^k : (x, y) \mapsto (x + kT, y)$.

Ngoài các phép tịnh tiến ra, thì hình trang trí đường viền còn có thể bất biến theo các phép biến đổi khác nữa. Người ta phân loại các kiểu trang trí đường viền tuần hoàn qua nhóm các nhóm đối xứng của chúng. Tổng cộng có đúng bảy kiểu khác nhau:

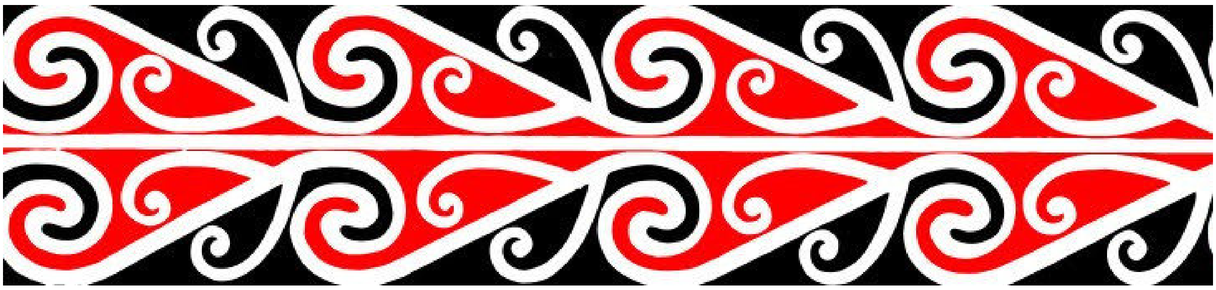
Kiểu thứ nhất gọi là **hop**  (nhảy lò cò). Trong kiểu này, chỉ có các phép tịnh tiến là bảo toàn hình trang trí. Hình dung như là các vết chân của một bàn chân nhảy lò cò lên phía trước. Các con sư tử trên Hình 4 là trang trí theo kiểu hop này.

Kiểu thứ hai gọi là **step**  (bước đều). Trong kiểu này, ngoài phép tịnh tiến, còn phép lượn (glide) cũng bảo toàn hình trang trí. Hình dung kiểu này như đi đều bước bằng hai chân. Hình 5 là ví dụ.

Hình 12: Trang trí trên một hàng rào đá ở Ấn Độ, thế kỷ XVI-XVII.

Kiểu thứ ba gọi là **sidle**  (đi ngang). Trong kiểu này, ngoài phép tịnh tiến, còn phép đối xứng gương theo các trục dọc. Hình dung là hai chân xếp theo hướng dọc rồi đi ngang như con cua, và đối xứng gương ở đây là đối xứng giữa hai chân. Hình 10 là một ví dụ.

Kiểu thứ tư gọi là **spinning hop**  (nhảy xoay lò cò). Trong kiểu này, có những phép quay 180° cũng bảo toàn hình trang trí. Hình 11 là một ví dụ.

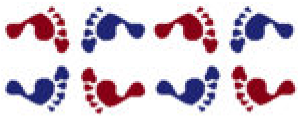


Hình 13: Kiểu trang trí "Ngaru" của thổ dân Maori (New Zealand).

Kiểu thứ năm gọi là **spinning sidle**  (đi xoay ngang). Trong kiểu này, ngoài phép tịnh tiến theo chiều ngang, còn có những phép đối xứng gương theo các trục dọc (đối xứng giữa hai chân) và những phép quay 180°. Chú ý rằng tâm của các phép quay 18° nằm ngoài các trục đối xứng, và khi kết hợp phép quay 180° với phép đối xứng gương thì được phép lượn (glide). Hình 12 có thể coi là một ví dụ của kiểu đường viền thứ năm này nếu bỏ qua một vài chi tiết.

Kiểu thứ sáu gọi là **jump**  (nhảy hai chân). Trong kiểu này, ngoài phép tịnh tiến, còn có phép đối xứng gương theo trục ngang (đối xứng giữa hai chân đặt nằm ngang ở hai bên trục). Hình 13 là một ví dụ.

Hình 14: Một góc balcon ở Paris.

Kiểu thứ bảy gọi là **spinning jump**  (nhảy xoay hai chân), là kiểu cuối cùng. Trong kiểu này, ngoài phép tịnh tiến, còn có những phép đối xứng gương theo cả trục ngang lẫn trục dọc, và những phép quay $180°$. Hình 14 là một ví dụ.

4. Mọi con đường đều dẫn tới Lisbon

Người ta thường hay nói "Mọi con đường đều dẫn tới Roma". Nhưng nếu đó là những con đường lát gạch trang trí tuần hoàn, thì chúng sẽ đều dẫn tới Lisbon!

Thành phố Lisbon xinh đẹp nằm bên bờ biển Đại Tây Dương có nhiều khu đi bộ được lát bằng gạch đá vôi (limestone) nhỏ màu trắng và đen, theo một phương pháp truyền thống gọi là "lát gạch Portugal" (Portuguese pavements), tạo thành những hình trang trí rất nghệ thuật.

Người bạn đồng nghiệp Rui Loja Fernandes của tôi, cựu chủ tịch Hội Toán học Portugal và cựu giáo sư tại Đại học Bách khoa Lisbon (Instituto Superior Técnico de Lisboa) có kể rằng, sau khi nghe nói về các nhóm đối xứng trong việc lát gạch, đích thân ông thị trưởng thành phố đã mời các nhà toán học của trường làm cố vấn để đảm bảo rằng tất cả các kiểu nhóm lát gạch khác nhau đều xuất hiện trên các khu đi bộ của Lisbon.

Khi trang trí một mặt phẳng, như quảng trường Rossio (Hình 15) hay tường nhà, sàn nhà, tấm vải, tấm thảm, v.v... người ta có thể chọn cách trang trí tuần hoàn hai chiều (tức là có hai hướng tịnh tiến khác nhau bảo toàn hình). Những kiểu trang trí như vậy được gọi là *lát gạch* (tiếng Anh là *tessellation*, tiếng Pháp là *pavage*) tuần hoàn. Bởi ta hình dung là có thể lấy những viên gạch

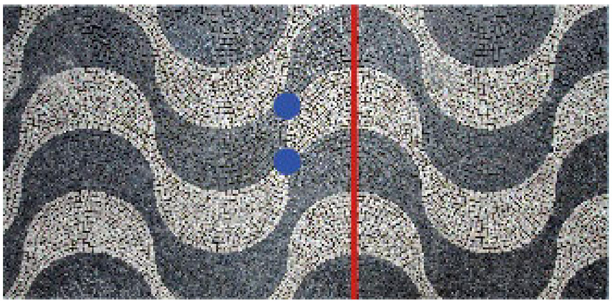
Hình 15: Quảng trường Rossio ở Lisbon với nền hình sóng tuần hoàn.

Hình 16: Ảnh quảng trường Restauradores ở Lisbon của Jee Wee, với nền được lát đá theo nhóm đối xứng p4.

trông giống nhau (hoặc vài kiểu gạch) rồi xếp chúng lại cạnh nhau là sẽ được hình trang trí như ý muốn.

Tương tự như là các đường viền, các trang trí kiểu lát gạch tuần hoàn cũng có các nhóm đối xứng, mà chúng ta sẽ gọi là *nhóm lát gạch* theo tiếng Pháp (*groupe de pavage*, còn tiếng Anh gọi là *wallpaper group*, tức là nhóm của giấy dán tường). Ngoài các đối xứng tịnh tiến, còn có thể có các đối xứng quay, đối xứng gương và đối xứng lượn. Ví dụ như nền quảng trường Rossio trên Hình 15 có đối xứng quay theo góc π $(180°)$, còn nền đá hoa trên Hình 16 và Hình 19 có đối xứng quay theo góc $\frac{\pi}{2}$ $(90°)$.

Nếu như một kiểu lát gạch tuần hoàn có đối xứng quay, thì vì tính chất tuần hoàn nên góc quay nhỏ nhất phải là một trong các số π, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$ (ứng với chuyện có thể lát kín mặt phẳng bằng các viên gạch tam giác, tứ giác hay lục giác đều, nhưng không thể lát mặt phẳng chỉ bằng ngũ giác đều chẳng hạn). Khi có cả đối xứng quay lẫn đối xứng gương, người ta có thể xét xem trục của đối xứng gương có chứa tâm của đối xứng quay hay không. Ví dụ trên Hình 15 có tâm của phép quay nằm ngoài trục đối xứng (xem Hình 17), còn ví dụ trên Hình 19 có tâm của phép quay nằm trên trục đối xứng.



Hình 17: Đường đỏ là trục đối xứng gương, điểm xanh là tâm của đối xứng xoay $180°$. Nguồn: kleinproject.org

Tương tự như đối với các nhóm đường viền, ta có thể phân loại các nhóm lát gạch theo chuyện nó có đối xứng quay hay không và góc quay là bao nhiêu nếu có, rồi nó có đối xứng gương hay không, có đối xứng lượn hay không, và tâm của đối xứng quay có nằm trên trục đối xứng gương hay không.

Người đầu tiên đưa ra phân loại đầy đủ cho các nhóm này là nhà toán học và khoáng vật học người Nga Evgraf Fedorov (1853-1919) vào cuối thế kỷ XIX. Có tổng cộng 17 nhóm lát gạch khác nhau, ứng với 17 kiểu lát gạch tuần hoàn khác nhau. Hình 18 là sơ đồ minh họa toàn bộ 17 kiểu đó.

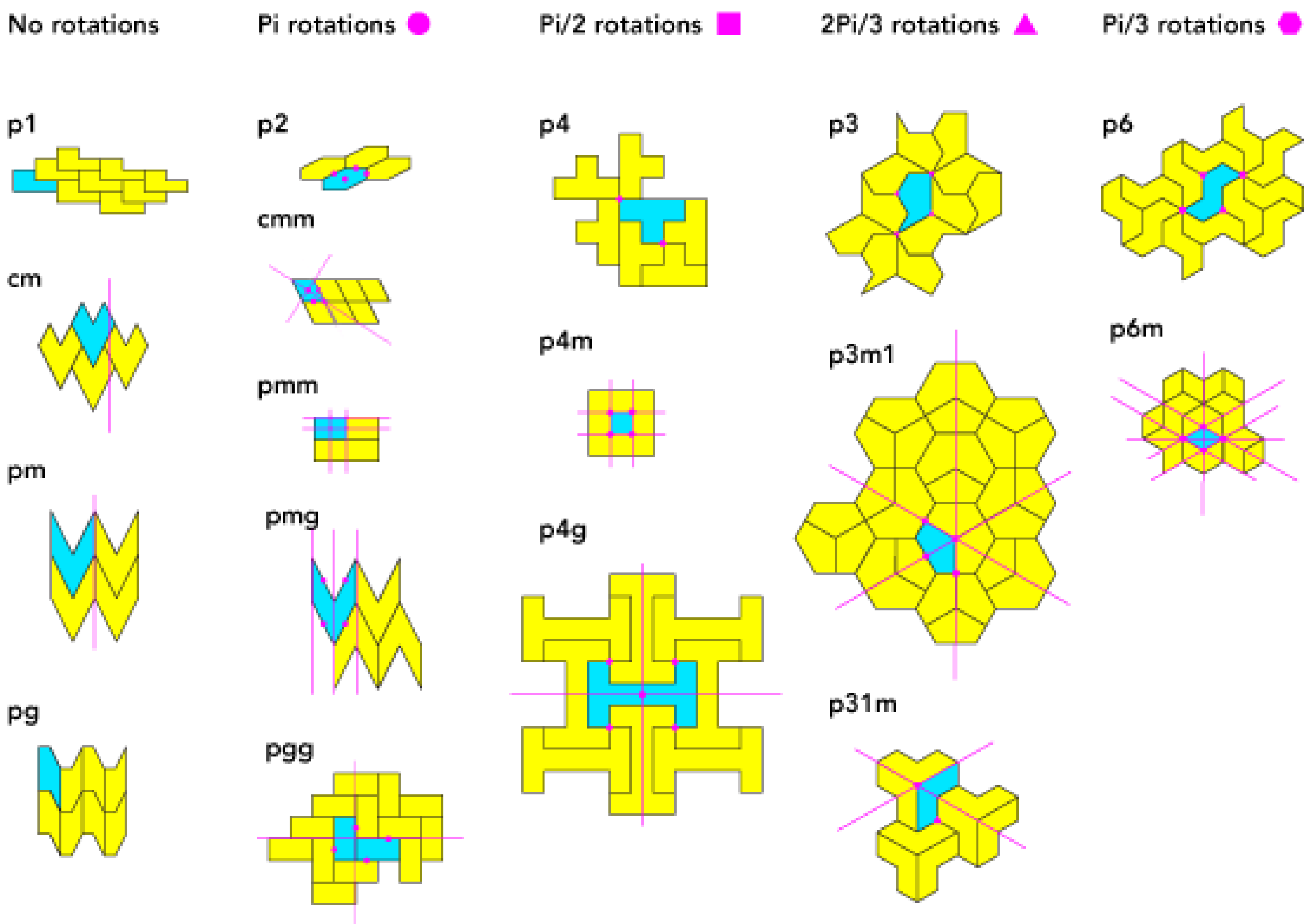
Mỗi một hình con trên Hình 18 ứng với một kiểu lát gạch. Miền tô xanh là miền mà nếu làm viên gạch có hình như vậy, rồi dịch chuyển nó theo các phép biến đổi đối xứng trong nhóm tương tứng, thì ta lát kín vừa khít được toàn bộ mặt phẳng.

Trong số các ký hiệu của 17 kiểu nhóm đối xứng trên Hình 18, có 2 ký hiệu bắt đầu bằng chữ cái c, có nghĩa là "centred" (ở giữa). Mỗi kiểu "c" đó đều có hai vector tịnh tiến có độ dài bằng nhau (tạo thành hình thoi), nhưng trục đối xứng hoặc trục glide của hình không song song với một trong hai vector đó mà lại "nằm giữa" hai vector (tức là song song với tổng của chúng). Tất cả các kiểu còn lại đều bắt đầu bằng chữ cái p, có nghĩa là "primitive" (nguyên thủy): ở các kiểu này, các trục đối xứng hay glide song song với các vector tịnh tiến "nguyên thủy" của hình.

Chữ số trong ký hiệu các kiểu cho biết nó có phép quay theo góc bao nhiêu: nếu chữ số là k thì góc quay nhỏ nhất là $\frac{2\pi}{k}$. Ví dụ nếu có chữ số 4 thì có phép quay theo góc $\frac{\pi}{2} = 2 \cdot \frac{\pi}{4}$. Chữ cái m trong ký hiệu dùng để chỉ đối xứng gương (mirror), còn chữ cái g dùng để chỉ đối xứng lượn (glide).

Danh sách chi tiết 17 kiểu như sau:

Kiểu thứ nhất, ký hiệu là **p1**, là kiểu chỉ có các đối xứng tịnh tiến, ngoài ra không còn thêm đối xứng nào khác. Hình 20 phía bên trái là một ví dụ.

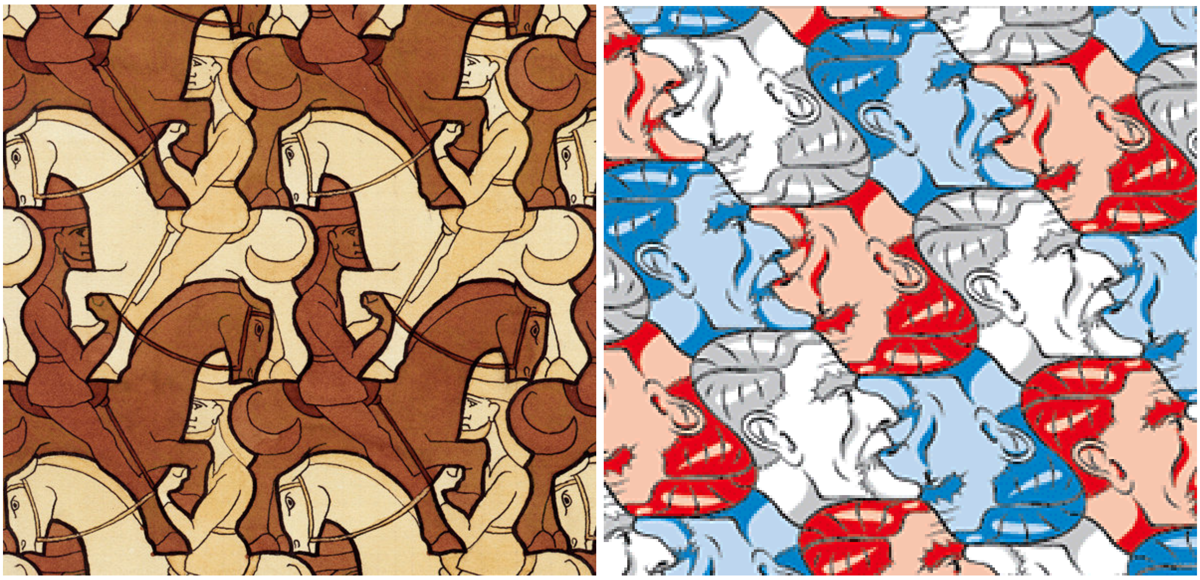


Hình 18: Sơ đồ của 17 nhóm lát gạch. Nguồn: http://black.mitplw.com/.

Hình 19: Quảng trường Camoes ở Lisbon lát gạch theo nhóm p4m.

Hình 20: Một trang trí giấy dán tường có nhóm đối xứng p1, và một trang trí kiểu Ai Cập có nhóm đối xứng pm.

Kiểu thứ hai, ký hiệu là **pg**, có thêm glide, nhưng không có đối xứng quay hay đối xứng gương. Trong kiểu này có hai hướng tịnh tiến vuông góc với nhau. Tranh lát gạch *Kỵ sĩ* của Maurits Cornelis Escher trên Hình 21 là một ví dụ tiêu biểu (nếu ta bỏ qua màu của các con ngựa): phép glide chuyển con ngựa màu nhạt thành con ngựa màu thẫm.



Hình 21: Tranh lát gạch "Kỵ sĩ" và "Đầu Escher" của Escher.

Kiểu thứ ba, ký hiệu là **cm**, không có đối xứng quay nhưng có đối xứng gương, và có thêm glide với trục của glide khác với trục đối xứng gương. Vải hoa lys (hoa loa kèn) trên Hình 22 bên trái là một ví dụ: Các trục đối xứng gương ở đây chính là các trục đối xứng của các bông hoa lys, còn mỗi trục glide thì song song và nằm giữa hai trục đối xứng gương liên tiếp.

Kiểu thứ tư, ký hiệu là **pm**, không có đối xứng quay nhưng có đối xứng gương, và không có glide với trục nằm ngoài trục đối xứng gương như kiểu thứ ba. Một ví dụ là trang trí kiểu Ai Cập trên Hình 20 phía bên phải. Chú ý rằng kiểu này có một vector tịnh tiến song song với các trục đối xứng và một vector tịnh tiến vuông góc với các trục đối xứng.

Kiểu thứ năm, ký hiệu là **p2**, ngoài các đối xứng tịnh tiến còn có thêm đối xứng quay theo góc π, và ngoài ra không có thêm đối xứng nào khác. Hình lát gạch đầu ông Escher (với những đầu

Hình 22: Vải trang trí hoa lys có nhóm đối xứng kiểu cm và tấm thảm phương Đông có nhóm đối xứng kiểu pmm.

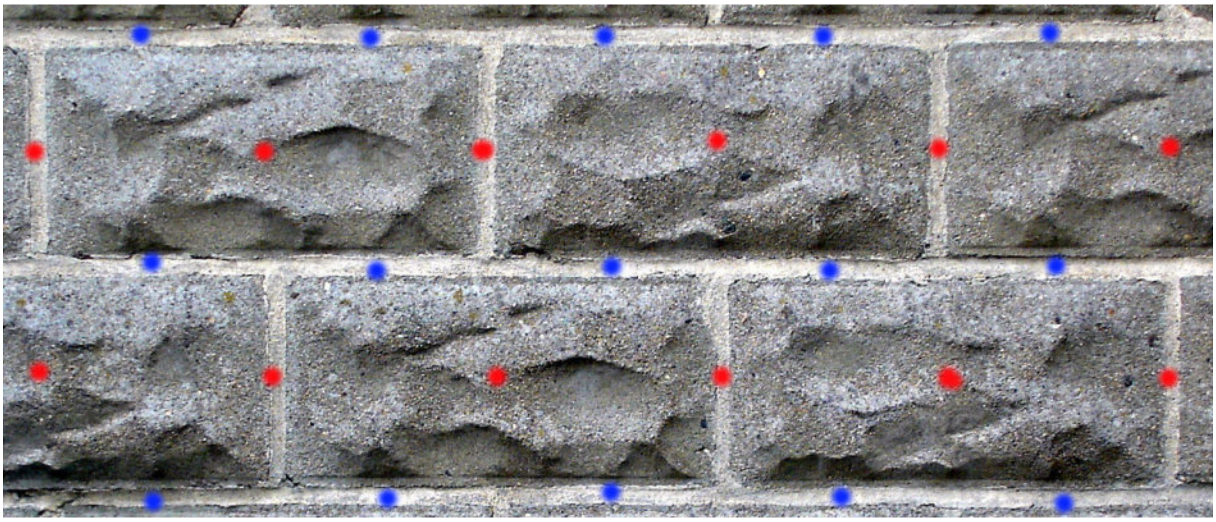
chổng ngược qua phép quay $180°$) trên Hình 21 là một ví dụ.

Kiểu thứ sáu, ký hiệu là **pgg**, không có đối xứng gương, nhưng có hai họ đối xứng glide với các trục glide vuông góc với nhau. Kiểu này cũng có đối xứng quay $180°$, vì nếu lấy tích của hai glide với các trục vuông góc với nhau thì được một phép quay như vậy. Hình lát sàn gỗ 23 là một ví dụ (nếu ta coi tất cả các viên gỗ hình chữ nhật là giống hệt nhau). Kiểu lát này còn được gọi là kiểu "xương cá trích" (herringbone).

Hình 23: Sàn lát gỗ có nhóm đối xứng kiểu pgg, còn hình trang trí trên bình cổ từ Kerma (Sudan) đối xứng kiểu pmg.

Kiểu thứ bảy, ký hiệu là **pmg**, vừa có đối xứng gương, vừa có đối xứng quay $180°$ với tâm không nằm trên đối xứng gương. Tích của hai phép đối xứng đó là phép glide, nên trong ký hiệu của kiểu này có cả m (mirror) và g (glide). Chiếc bình cổ đại trên Hình 23 có kiểu trang trí này trên thành bình.

Kiểu thứ tám, ký hiệu là **pmm**. Thay vì có đối xứng gương theo một hướng và đối xứng glide theo hướng vuông góc với nó, kiểu pmm có hai đối xứng gương theo hai hướng vuông góc với nhau, và tích của chúng cũng là một phép quay $180°$. Tấm thảm ở bên phải Hình 22 là một ví dụ.



Hình 24: Mặt tường gạch có nhóm đối xứng kiểu cmm.

Kiểu thứ chín, ký hiệu là **cmm** có các đối xứng giống kiểu pmm, nhưng ngoài ra còn có các phép quay 180° với tâm không nằm trên các trục của các đối xứng gương. Hình xây gạch thành tường như trên Hình 24 là một ví dụ về nhóm lát gạch kiểu cmm. Các điểm tô đỏ và tô xanh trên hình đều là tâm của các đối xứng quay 180° của hình. Các trục đối xứng gương chỉ đi qua các điểm đỏ chứ không đi qua các điểm xanh.

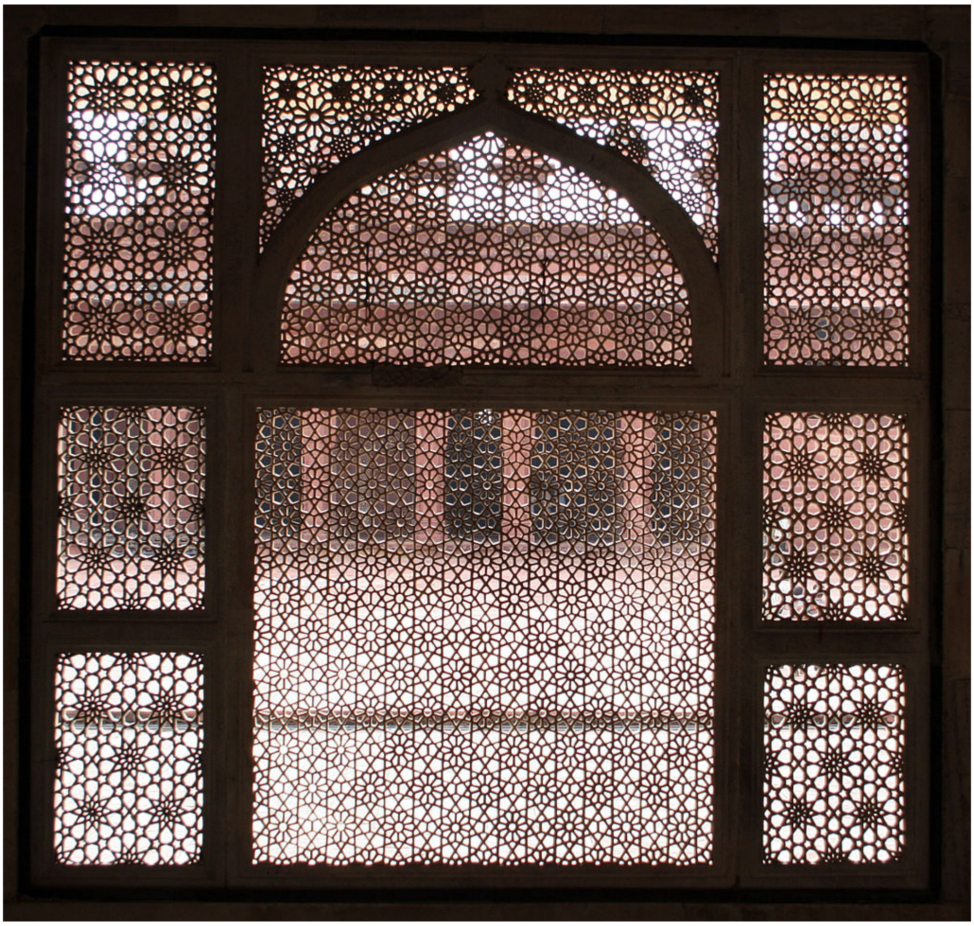
Kiểu thứ mười, ký hiệu là **p3**, có đối xứng quay với góc nhỏ nhất là $\frac{1}{3}$ vòng tròn và không có đối xứng gương. Hình 25 là một ví dụ.

Kiểu thứ mười một, ký hiệu là **p3m1**, có đối xứng quay với góc $\frac{1}{3}$ vòng tròn, có đối xứng gương, và tâm của đối xứng quay nằm trên trục đối xứng gương.

Kiểu thứ mười hai, ký hiệu là **p31m**, có đối xứng gương, có đối xứng quay với góc $\frac{1}{4}$ vòng tròn và tâm của nó không nằm trên trục của đối xứng quay.

Kiểu thứ mười ba, ký hiệu là **p4**, có đối xứng quay với góc $\frac{1}{4}$ vòng tròn (tức là $\frac{\pi}{2}$) và không có đối xứng gương. Hình 16 là một ví dụ.

Hình 25: Một mảnh tường ở Alhambra lát gạch theo nhóm p3.



Hình 26: Một cửa sổ tại lăng Salim Chishti, Ấn Độ, có nhiều kiểu nhóm đối xứng lát gạch.

Kiểu thứ mười bốn, ký hiệu là **p4g**, có đối xứng quay với góc $\frac{1}{4}$ vòng tròn, có đối xứng gương, và có đối xứng glide với trục tạo thành góc $45°$ với trục của đối xứng gương.

Kiểu thứ mười lăm, ký hiệu là **p4m**, có đối xứng quay với góc $\frac{1}{4}$ vòng tròn, và có hai đối xứng gương với các trục tạo với nhau một góc $45°$. Hình 19 là một ví dụ.

Kiểu thứ mười sáu, ký hiệu là **p6**, có đối xứng quay với góc 1/6 vòng tròn (tức là $\frac{\pi}{3}$) và không có có đối xứng gương. Hình 27 bên phải là một ví dụ.

Kiểu thứ mười bảy, ký hiệu là **p6m**, có góc quay 1/6 vòng tròn và có đối xứng gương. Hình 27 bên trái là một ví dụ.

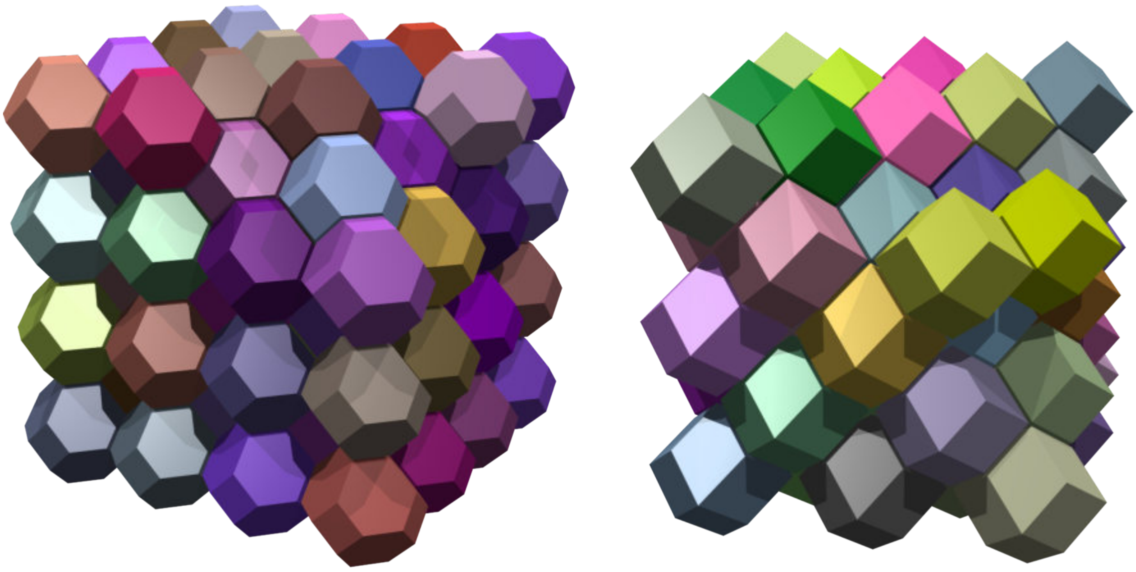
Ngoài Lisbon, có một nơi khác cũng được coi là có đủ 17 kiểu nhóm lát gạch là khu cung điện Alhambra (tiếng Ả Rập có nghĩa là "Đỏ") do những người Hồi giáo xây ở Granada, Tây Ban Nha, từ thế kỷ XIII. Đây là một cung điện nguy nga, với rất nhiều trang trí tuần hoàn (và cả không tuần hoàn) đẹp trên tường. Tuy nhiên, chưa thấy ai công bố kiểm chứng là nó có đủ 17 kiểu lát gạch.

Người ta nói rằng họa sĩ Escher khi đi thăm Alhambra đã có được ý tưởng và cảm hứng vẽ các tranh lát gạch nổi tiếng của ông từ các hình trang trí trên tường của cung điện này, và tranh của Escher có chứa đủ 17 kiểu nhóm lát gạch. Trong sách *Các bài giảng về toán cho Mirella* cũng có một chương về tạo hình trang trí bắt chước Escher bằng cách sử dụng các phép đối xứng.

Hình 27: Sàn đá hoa ở Duomo di Siena (Toscana, Italia) có nhóm đối xứng p6m, còn tranh "Con bướm" của Escher có nhóm đối xứng p6.

Hình 28: Trần gian phòng Abencerrajes tại cung điện Alhambra, với nhiều trang trí kiểu lát gạch khác nhau trên tường.

Vào thập kỷ 1980, nhà toán học William Thurston nghĩ ra một phương pháp hình học mới, dựa trên lý thuyết về *orbifold* (có thể hiểu orbifold như là tập hợp các quỹ đạo (orbit) của một nhóm hữu hạn tác động lên một đa tạp), để phân loại các nhóm lát gạch. Phương pháp của Thurston cho ra giải thích gọn ghẽ vì sao chỉ có 17 nhóm, nhưng để mô tả tác động của các nhóm đó trên mặt phẳng thì vẫn phải làm như trên.



Hình 29: Hai ví dụ lát gạch 3 chiều của Andrew Kepert. Nguồn: wikipedia. Các viên gạch là "truncated octahedra" ("bát diện cụt") hoặc "rhombic dodecahedra" ("thập nhị diện con thoi").

Nếu như trên mặt phẳng "chỉ có" 17 cách lát gạch tuần hoàn, thì trong không gian ba chiều số nhóm "lát không gian" (gọi là *nhóm tinh thể*, crystallographic group) lên tới những 230. Để liệt kê chúng tất nhiên cần cả một quyển sách, và hình dung chúng còn khó hơn hiều so với hình dung các nhóm lát gạch hai chiều.

5. Đối xứng trên không gian phi Euclid

Ngoài mặt phẳng ra, còn có hai loại mặt khác mà trên đó cũng có các phép tịnh tiến, phép phản chiếu và phép quay bảo toàn khoảng cách, là *mặt cầu* và *mặt hyperbolic* (hay còn gọi là mặt Lobachevsky). Chúng là những không gian *phi Euclid*. Các không gian phi Euclid này cũng có thể được lát gạch tương tự như là mặt phẳng, và những hình lát gạch đó cũng có thể cho ra những tác phẩm đẹp mắt.

Hình 30 là những ví dụ về lát gạch trên hình cầu. Vấn đề lát gạch phủ hình cầu liên qua đến vấn đề phân loại các đa diện đều và gần đều, mà chúng ta sẽ bàn tới trong Chương **??**.

Có thể hình dung mặt hyperbolic dưới dạng một cái đĩa (không có biên), gọi là *đĩa Poincaré*. Khoảng cách trên đĩa đó không giống khoảng cách trên mặt phẳng bình thường, mà tăng lên rất nhanh khi các điểm tiến tới gần biên của đĩa.

Hình 31 là ví dụ về lát mặt hyperbolic bằng hình hoa hồng đã cắt mép thành lục giác (cho hoa hồng trắng) hoặc tứ giác (cho hoa hồng đỏ) hyperbolic, sử dụng phần mềm toán học của Malin Christersson. Chú ý là, tuy các hoa hồng càng gần mép đường tròn thì trông càng bé tí xíu,

Hình 30: Một quả cầu trang trí "Thiên thần và quỷ sứ" dựa theo tranh Escher có bán trên amazon, và hai mô hình lát gạch hình cầu bằng giấy và đất sét của Makoto Nakamura.

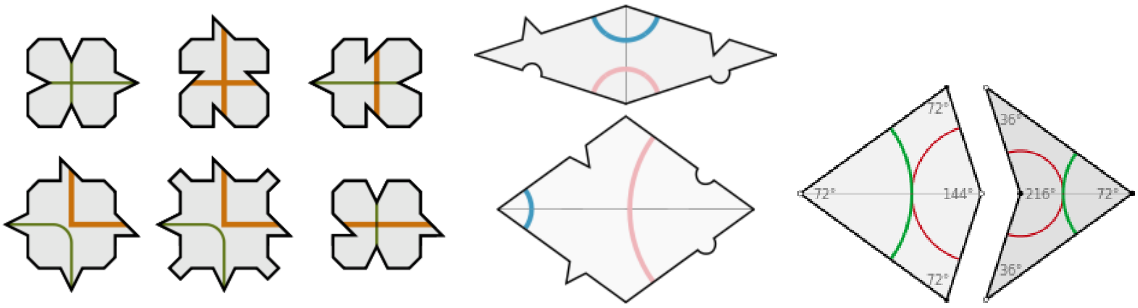
Hình 31: Lát mặt hyperbolic bằng ảnh hoa hồng, sử dụng phần mềm online từ trang mạng http://www.malinc.se/ của Malin Christersson.

nhưng đối với khoảng cách hyperbolic thì tất cả các bông hoa hồng trên cùng một hình đều to bằng nhau.

6. Lát gạch không tuần hoàn

Vào năm 1982, nhà vật lý Dan Shechtman phát hiện ra sự tồn tại của những vật rắn mà cấu trúc phân tử của nó không tuần hoàn. Người ta gọi những cấu trúc này là *giả tinh thể* (quasicrystal). Nhờ phát hiện đó mà ông đã được giải Nobel vào năm 2011.

Về mặt toán học, cấu trúc giả tinh thể có thể được hiểu như là việc lát phủ kín không gian bằng một vài loại viên gạch, một cách không tuần hoàn. Các kiểu lát gạch không tuần hoàn và các cấu trúc giả tinh thể vẫn đang là một đề tài nghiên cứu khoa học quan trọng ngày nay.



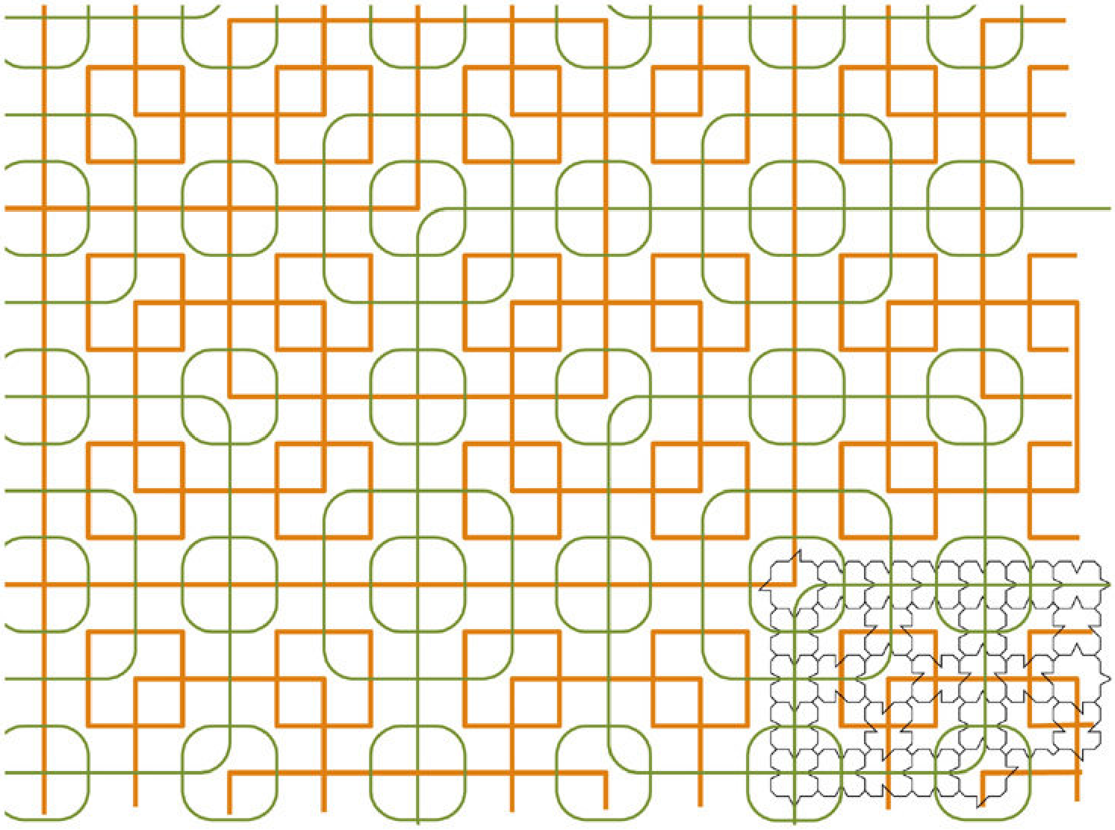
Hình 32: Bộ 6 kiểu viên gạch của Raphael Robinson, và hai bộ gạch của Penrose mỗi bộ 2 viên.

Người ta đã xây dựng các lý thuyết về các kiểu gạch có tính chất ép cho việc lát gạch không thể tuần hoàn. Raphael Robinson có lẽ là người đầu tiên chứng minh được, vào năm 1971, về sự tồn tại của những kiểu viên gạch lát kín được mặt phẳng sao cho không thể lát chúng một cách tuần hoàn. Ông nghĩ ra một bộ 6 hình viên gạch như trên Hình 32 bên trái. Dùng các viên gạch như thế có thể lát kín mặt phẳng, như là minh họa trên Hình 33. Chỉ có điều, mỗi hình vuông màu da cam do gạch lát tạo nên đều bắt buộc nằm ở góc của một hình vuông màu da cam to hơn. Từ đó suy ra là hình lát gạch không thể tuần hoàn.

Bộ viên gạch lát *không thể tuần hoàn* đơn giản và nổi tiếng nhất có lẽ thuộc về nhà toán học và vật lý Roger Penrose (sinh năm 1931). Một bộ gạch của Penrose chỉ gồm có 2 hình viên gạch, đều là hình thoi, như trên Hình 32 ở giữa. Các góc của các hình thoi đó lần lượt là $\frac{\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$ và $\frac{3\pi}{5}$ (tương tự như là các góc của ngũ giác đều và của hình sao 5 cánh đều), và bởi vậy chúng có thể cộng với nhau thành 2π để lát khớp tại các đỉnh. Một bộ gạch 2 viên khác của Penrose, với một viên hình cánh diều và một viên hình mũi tên, như trên Hình 32 bên phải, cũng có các tính chất tương tự. Các viên gạch kiểu Penrose có được sản xuất và dùng để lát sàn nhà ở nhiều nơi trên thế giới.

Penrose không phải là người đầu tiên nghĩ ra các viên gạch có góc là bội số của $\frac{\pi}{5}$. Ông lấy ý tưởng đó từ các tác phẩm của Albrecht Dürer và Johannes Kepler từ thời thế kỷ XVI-XVII. Từ trước đó nữa, các nghệ sĩ Hồi giáo (ắt hẳn đồng thời cũng là những nhà toán học) đã nghĩ ra việc dùng các "viên gạch" như trên Hình 35, gọi là *girih*, có các góc là bội của $\frac{\pi}{5}$, để lát trang trí. Viên girih to nhất có hình thập giác đều. Tiếp đến là viên hình lục giác với các góc nhọn bằng $\frac{2\pi}{5}$ và các góc tù bằng $\frac{4\pi}{5}$. Tiếp đó là hình cái nơ con bướm với các góc nhọn cũng bằng $\frac{2\pi}{5}$, rồi hình thoi với các góc nhọn cũng bằng $\frac{2\pi}{5}$, và sau cùng là hình ngũ giác đều. Girih theo tiếng Persia có nghĩa là "đường nút", để chỉ các đường trang trí gấp khúc được vẽ trên viên gạch.

Các viên gạch trên Hình 35 xuất hiện từ quãng cuối thế kỷ XII ở Thổ Nhĩ Kỳ, với công dụng là giúp các nghệ nhân trong việc thiết kế hình trang trí, còn bản thân kiểu trang trí girih của Hồi giáo đã có từ trước đó. Sau khi có bản thiết kế thì các nghệ nhân không cần phải làm ra các viên gạch như trên Hình 35, mà cốt làm sao xây được tường với hoa văn girih giống trong bản thiết kế. Trên các bức tường trang trí girih, nói chung sẽ không nhìn thấy biên của các "viên gạch girih" như trên, bởi vì thực ra không có các viên gạch đó.



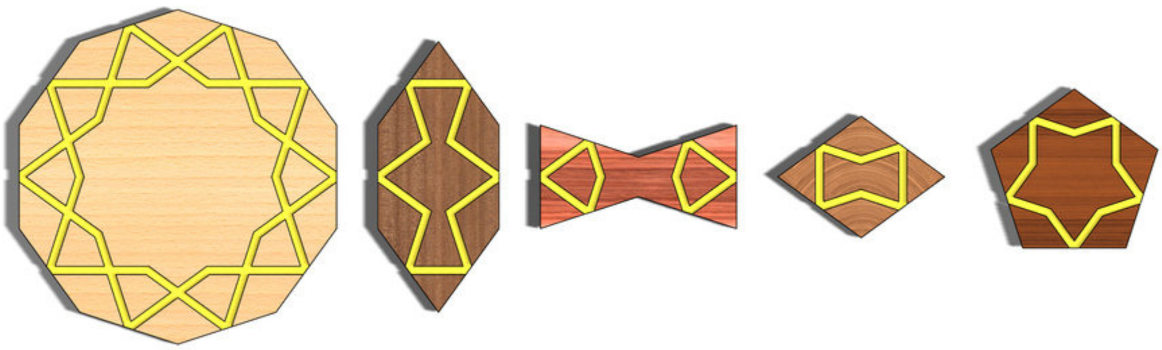
Hình 33: Lát mặt phẳng bằng các viên gạch của Robinson.

Với kiểu thiết kế girih, người Hồi giáo đã không chỉ tạo được những hình nghệ thuật lát tường tuần hoàn, mà cả những hình không tuần hoàn nhưng có đối xứng khác, ví dụ như đối xứng kiểu sao 5 cánh hay 10 cánh (đối xứng quay theo góc $\frac{\pi}{5}$, không thể tuần hoàn nếu có đối xứng quay này), như trên Hình 36 và Hình 37. Hơn nữa, các "viên gạch" girih chỉ có tính chất trợ giúp cho thiết kế cho dễ thôi, chứ một hình trang trí girih không nhất thiết phải xếp được từ đúng các "viên gạch girih" đó, mà có những chỗ có thể lệch đi, dùng những góc khác, "gạch" khác.

7. Các trang web có thể tham khảo

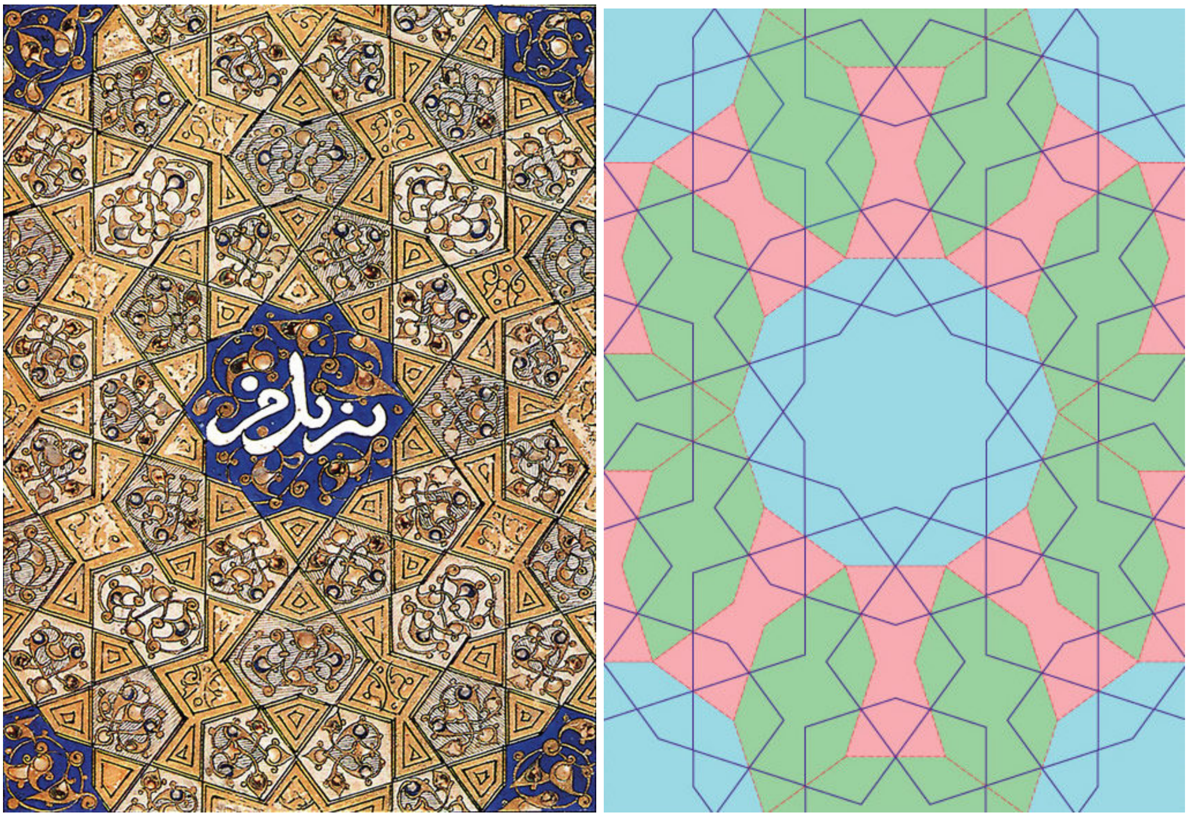
- https://en.wikipedia.org/ (rất nhiều thông tin được tra từ Wikipedia).
- http://bridgesmathart.org (trang web của hội nghị quốc tế thường niên về toán học và nghệ thuật Bridges: Mathematical Connections in Art, Music, and Science, với rất nhiều triển lãm hay).
- http://www.mathaware.org/mam/03/ (trang web của AMS với nhiều tài liệu về toán và nghệ thuật).
- http://www.math.nus.edu.sg/aslaksen/teaching/math-art-arch.html (một cua bài giảng về toán học và nghệ thuật tại NUS, Singapore).

Hình 34: Tranh sơn dầu của họa sĩ Urs Schmid (1995) vẽ một kiểu lát gạch Penrose dùng các viên gạch hình thoi.



Hình 35: Các viên girih.

- http://www.malinc.se/ (làm các hyperbolic tilings).
- https://plus.maths.org/content/teacher-package-maths-and-art (toán học và nghệ thuật cho giáo viên).
- http://www.maths2art.co.uk/
- https://www.artofmathematics.org/



Hình 36: Bìa một quyển kinh Quoran từ thế kỷ XIV, và thiết kế girih của nó. Nguồn: David James, Qur'ans of the Mamluks (Thames & Hudson) & aramcowworld.com.

Hình 37: Khu lăng tẩm "Shah-i Zinda" ("Vua Sống") ở Samarquand, Uzbekistan (ảnh của Fulvio Spada), và một trang trí girih bên trong.

- http://tiasang.com.vn/Default.aspx?tabid=113&CategoryID=6&News=9429 (bài báo "Ích gì, toán học?" của GS Hà Huy Khoái).

- http://www.ams.org/samplings/math-and-music (trang về nhạc của AMS).
- http://im-possible.info/english/index.html (trang web với tranh không tưởng của nhiều họa sĩ).
- http://thomay.vn (trang thơ máy).
- https://imaginary.org (Open mathematics).
- http://3d-xplormath.org/
- http://virtualmathmuseum.org/
- http://people.eecs.berkeley.edu/~sequin/SCULPTS/ (tượng toán học của Carlo Séquin).
- http://www.math.nus.edu.sg/aslaksen/teaching/math-art-arch.html
- http://peinture-mathematique.fr/index.html (các tranh nghệ thuật chủ đề toán học rất đẹp của Silvie Donmoyer).
- http://www.apprendre-en-ligne.net/blog/index.php/Art-et-maths
- http://www.maths-et-tiques.fr
- http://dfgm.math.msu.su/myths.php (trang web có tranh của Fomenko).
- http://mathbun.com
- http://thirddime.com/
- https://plus.maths.org
- http://mandelwerk.deviantart.com/
- http://talesofcuriosity.com (Xem thơ limerick có minh họa của Edward Lear).
- http://www.bl.uk/works/alices-adventures-in-wonderland (British Library).
- https://www.fulltable.com (Xem Alice in the Wonderland).
- http://blog.kleinproject.org/?p=1381 (Lisbon).
- journal.eahn.org/articles/10.5334/ah.bv/ (Matthew A Cohen: Two kinds of proportions).

  Journal of mathematics and the arts có một tạp chí khoa học về đề tài: *Toán học trong các nghệ thuật*.

TÔ PÔ HỌC VÀ ỨNG DỤNG TRONG VẬT LÝ

Nguyễn Ái Việt
(Viện Công Nghệ Thông Tin, Đại Học Quốc gia Hà Nội)

TÓM TẮT

Giải thưởng Nobel Vật lý năm 2016 được trao cho ba nhà vật lý lý thuyết trong lĩnh vực vật chất đông đặc là David Thouless, Michael Kosterlitz và Duncan Haldane về các pha tô pô của vật chất và chuyển pha giữa chúng. Hiện tượng chuyển pha tô pô gắn liền với việc phát hiện ra các vật liệu mới với các tính chất kỳ lạ như siêu dẫn không có điện trở hoặc siêu lỏng không có độ nhớt hoặc các vật liệu Hall lượng tử hoặc phân số. Chính các vật liệu này sẽ là cơ sở để chế tạo ra các máy tính lượng tử vượt mọi giới hạn tính toán của thế hệ máy tính hiện nay.

Ứng dụng tô pô học thế nào?

Tô pô học ra đời không gắn liền với một ứng dụng thực tế nào. Các tư tưởng ban đầu của tô pô được manh nha bởi Leinitz và Euler dưới những tên gọi "giải tích vị trí" hoặc "hình học vị trí". Các bài toán ban đầu của tô pô như "tô màu bản đồ" hoặc "bảy chiếc cầu ở Königsberg" đều mang tính giải trí nhiều hơn là mở ra một lĩnh vực có thể ứng dụng thực tiễn. Theo một khía cạnh nào đó, các đối tượng hình học được nhúng trong các không gian có tô pô khác nhau sẽ có những tính chất khác nhau. Chẳng hạn các đường cong đóng trên một mặt cầu và một mặt xuyến sẽ có các tính chất khác nhau. Tuy nhiên cho đến trước công trình nổi tiếng "Giải tích vị trí" của Henri Poincaré các tính chất tô pô còn rất mù mờ. "Giải tích vị trí" có vai trò định hướng nghiên cứu trong lĩnh vực này có ảnh hưởng cho tới ngày nay.

Nói một cách dễ hiểu, các đối tượng hình học tồn tại trong các không gian có một cấu trúc tô pô xác định. Các cấu trúc này bất biến với các phép biến đổi liên tục. Như vậy một chiếc bánh vòng có tô pô giống như một chiếc cốc có quai hơn là một cái bánh rán, tuy cùng là bánh và cùng được rắc vừng. Trên bề mặt của chiếc bánh rán mọi đường cong kín đều có thể co về một điểm. Ngược lại, trên bề mặt của chiếc cốc có quai và bánh vòng có thể có hai loại đường cong kín: loại thứ nhất có thể co về một điểm và loại thứ hai đi vòng quanh cái quai cốc hoặc xung quanh lỗ của bánh vòng sẽ không thể co về một điểm. Do đó các định lý hình học và các tích phân theo các đường cong nói trên sẽ thay đổi. Tổng quát hơn, người ta có thể có các "không gian tô pô" với nhiều lỗ (hoặc nhiều quai). Số lượng lỗ của một không gian tô pô là một bất biến được nghiên cứu bởi lý thuyết đồng luân trong tô pô học.

Hình 1: Bánh vòng và tách cà phê giống nhau về tô pô

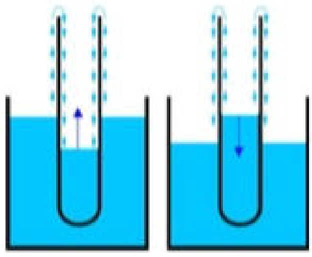
Đối với các nhà toán học, ứng dụng các ý tưởng trừu tượng như thế vào thực tế là việc khá viển vông. Trong thực tế việc đưa các ý tưởng tô pô vào vật lý là một quá trình khó khăn và trắc trở. Tuy nhiên, điều khá bất ngờ hơn là một loạt vật liệu mới có nhiều tính chất kỳ lạ đặc nhờ các tính chất tô pô của các không gian vật lý.

Các vật liệu có tính chất kỳ lạ

Trong chương trình vật lý phổ thông, chúng ta biết rằng vật liệu có thể dẫn điện với một điện trở R nào đó. Khi $R = \infty$ vật liệu được gọi là chất cách điện. Người ta cũng đã phát hiện ra một loại vật liệu gọi là bán dẫn, có điện trở thay đổi trong một số điều kiện khác nhau. Vật liệu bán dẫn được sử dụng để chế tạo các máy tính ngày nay. Năm 1911, nhà vật lý người Hà Lan H.Kamerlingh Onnes (Giải thưởng Nobel 1913), đã phát hiện ra tính chất siêu dẫn của thủy ngân khi bị làm lạnh xuống dưới nhiệt độ $T = 4.2K$, sẽ có điện trở $R = 0$. Do đó, dòng điện chạy trong một vòng siêu dẫn sẽ tạo ra từ trường mà không mất năng lượng. Đó chính là nguyên tắc công nghệ để tạo ra từ trường lớn trong các máy gia tốc hiện đại.

Loại vật liệu có tính chất kỳ lạ thứ hai là chất siêu lỏng. Năm 1937, nhà vật lý Xô viết Pyotr Kapitsa (Giải thưởng Nobel 1978) đã phát hiện ra rằng chất helium 4 hóa lỏng dưới nhiệt độ $T = 2.17K$ sẽ có tính siêu chảy, với độ nhớt bằng không. Nói một cách trực giác thì tính siêu chảy như sau: Nếu chúng ta đổ chất siêu chảy vào một ống nghiệm, chất siêu chảy sẽ tự "bò" qua thành ống cho đến hết như trong Hình 2.

Trong cả hai loại vật liệu trên, tính chất kỳ lạ xuất hiện ở nhiệt độ thấp. Tại một nhiệt độ thấp nào đó sẽ có hiện tượng chuyển pha vật liệu đang là chất lỏng thường biến thành siêu lỏng, đang là chất dẫn điện thường biến thành siêu dẫn. Lý thuyết chuyển pha được nhà vật lý Xô Viết Lev Landau (Giải thưởng Nobel 1962) phát triển để giải thích các hiện tượng chuyển sang pha siêu dẫn và siêu lỏng. Đặc biệt trong pha siêu dẫn và siêu lỏng, các hạt electron vốn đẩy nhau trong



Hình 2: Chất siêu chảy, tự động bò qua thành ống nghiệm

trạng thái tự do, do tương tác với mạng tinh thể của vật chất xung quanh, trở nên hút nhau và tạo thành các cặp Cooper, gây nên hiện tượng siêu dẫn. Ở nhiệt độ thấp hơn một mức nào đó, chuyển động nhiệt không đủ năng lượng để phá hủy các cặp Cooper, trạng thái siêu dẫn trở nên bền vững.

Năm 1986, các nhà vật lý của công ty IBM là G.Bednorz và K.Müller (Giải thưởng Nobel 1987) đã phát hiện ra các vật liệu gốm từ có tính siêu dẫn ở nhiệt độ cao $T = 138K$, tức là nhiệt độ của nitrogen lỏng. Năm 2015, người ta đã tìm được vật liệu có tính siêu dẫn ở nhiệt độ $T = 203K$. Lý thuyết chuyển pha Landau, không thể giải thích được hiện tượng siêu dẫn nhiệt độ cao. Mặc dù có một số mô hình có thể giải thích về mặt định lượng hiện tượng siêu dẫn nhiệt độ cao. Nhưng cho đến nay vẫn chưa có một lý thuyết nào giải thích được hiện tượng siêu dẫn nhiệt độ cao một cách thuyết phục.Có một điều chắc chắn trong các mô hình cho gốm từ siêu dẫn, các tính chất tô pô của không gian vật lý đóng một vai trò quan trọng.

Từ những năm 1970, các nhà vật lý đã quan tâm đến các vật liệu 2 chiều như các màng mỏng, vật liệu graphene là các màng carbon có cấu trúc tổ ong. Nhờ công nghệ phát triển, các màng này có thể đạt tới độ mỏng ở quy mô nguyên tử. Khi đó các phần tử mang điện là electron chỉ có thể chuyển động trong không gian hai chiều. Các vật liệu này có những pha có tính chất kỳ lạ. Chẳng hạn, năm 1980 nhà vật lý người Đức K.Von Klizing (Giải thưởng Nobel 1985) đã tìm thấy một số vật liệu 2 chiều ở một nhiệt độ đủ thấp sẽ có hiệu ứng Hall lượng tử. Độ dẫn điện của các vật liệu này sẽ thay đổi theo bội số nguyên của một lượng không đổi nào đó khi tăng cường độ từ trường ngoài đặt vuông góc với vật liệu này. Điều kỳ lạ là các trạng thái với độ dẫn nhất định tồn tại khá ổn định trọng một phạm vi vào đó của từ trường. Tính ổn định này liên quan tới đặc trưng tô pô của không gian vật lý, phụ thuộc vào không gian này có bao nhiêu lỗ.

Một số vật liệu 2 chiều khác lại có quy luật thay đổi độ dẫn điện Hall bằng phân số với mẫu số lẻ trong thí nghiệm tương tự như trên. R.Laughlin (Giải thưởng Nobel 1998) đã giải thích được hiện tượng này cho trường hợp tử số bằng 1. Trong thực tế, các trường hợp tử số khác 1 đều quan sát được. Cho đến nay vẫn chưa có giải thích thuyết phục cho các trạng thái này.

Tuy vậy, với các công trình của D.Thouless, M.Kosterlitz và D.Haldane được giải thưởng Nobel năm nay, người ta tin rằng, các thuộc tính kỳ lạ của các vật liệu mới, đặc biệt là vật liệu hai chiều là hệ quả của các tính chất tô pô và có chuyển pha giữa các pha có đặc trưng tô pô khác nhau. Như vậy, không như người ta tưởng, các tính chất tô pô không chỉ là một trò chơi trí tuệ và làm nền tảng cho hình học, mà còn là các quy tắc tạo nên thế giới vật chất.

So với các ngành toán học khác, tô pô tìm thấy ứng dụng thực tế rất muộn màng sau khi ra đời và phát triển. Chúng ta hãy đi tìm lý do tại sao.

Tô pô học và vật lý

Năm 1834, Ngài John Scott Russel cưỡi ngựa đi dọc theo kênh đào Union (Scottland) và nhìn thấy các xoáy nước trôi. Ông đuổi theo các xoáy nước này tới vài dặm và đặt câu hỏi: xoáy nước là gì, tại sao chúng lại có hình dạng và kích thước ổn định như vậy. Sau này các xoáy nước được gọi là soliton và là lời giải ổn định của phương trình Navier-Stokes, một phương trình vi phân phi tuyến. Các lời giải ổn định là do chúng có năng lượng cực tiểu.

Sau khi Albert Einstein xây dựng thành công lý thuyết tương đối rộng làm nền tảng cho vũ trụ, ông đặt kế hoạch xây dựng lý thuyết trường thống nhất. Trong lý thuyết này, mọi tương tác đều có bản chất hình học và mô tả bởi một phương trình vi phân phi tuyến. Khi đó, người ta chỉ biết có hai tương tác là hấp dẫn mô tả bởi phương trình Einstein và tương tác điện từ mô tả bởi phương trình Maxwell. Einstein hy vọng rằng các hạt vật chất (khi đó người ta chỉ biết có electron và proton) sẽ được mô tả bởi các lời giải soliton của các phương trình phi tuyến.

Einstein không bao giờ thực hiện được ý tưởng đó của mình. Cho đến ngày nay, thế hệ các nhà vật lý và toán học vẫn đang tiếp tục theo ý tưởng của ông để tìm "Lý thuyết Vạn vật". Trong đó việc sử dụng các công cụ mới nhất của tô pô học hết sức quan trọng. Vào thời của Einstein, các nhà toán học vẫn chưa hiểu được mối liên quan giữa tô pô và sự ổn định của các lời giải soliton. Einstein cũng không có các công cụ của tô pô, sau này được một thế hệ các nhà toán học xuất sắc như Chern, Atyiah, Grothendieck, Pontrijagin,...phát triển vào những năm 1950-1960.

Một ví dụ khác là nhà vật lý Tony Skyrme, cuối những năm 1950 đã thực hiện thành công việc đưa ý tưởng soliton vào vật lý và sử dụng một cách chính xác các bản chất tô pô, mà sau này người ta mới hiểu được. Ông đã mô tả được các lực hạt nhân một cách đẹp đẽ và chính xác, và có ảnh hưởng cho đến ngày nay. Rất tiếc là các công trình đương thời của Skyrme không có nhiều người hiểu và được chia sẻ. Vào những năm 1960-1970, người ta mới bắt đầu hiểu mối quan hệ giữa soliton và các đặc trưng tô pô và đặc biệt là các lời giải soliton có spin bán nguyên. Công trình năm 1985 của G.Adkin, C.Nappi và E.Witten về mô hình Skyrme đã tạo nên một cơn sốt thực sự nhằm khai thác ý nghĩa toán học và khả năng ứng dụng soliton trong vật lý. Ngày nay, mô hình Skyrme đã trở nên phổ biến trong tất cả các lĩnh vực vật lý.

Các ví dụ trên cho thấy việc ứng dụng tô pô hết sức chậm chạp có ba lý do. Thứ nhất, tô pô chỉ phát triển mạnh sau công trình Analysis Situs của Henri Poincaré và đặc biệt phải đợi tới những năm 1950-1970, khi các ý tưởng liên quan cần thiết trở nên chín muồi. Thứ hai, các ý tưởng ứng dụng tô pô có liên quan khá nhiều tới các lĩnh vực khác, mà toán học phải có thời gian để làm rõ. Thứ ba, các nhà toán học không có sự chuẩn bị cho việc ứng dụng tô pô vào thực tế, do đó không có sự hậu thuẫn kịp thời cho các bước đột phá như trường hợp của lý thuyết Skyrme.

Dù muộn màng, nhưng ngày nay tô pô học cũng đã đi vào cuộc sống. Các vật liệu mới với các tính chất kỳ lạ có những tính chất tô pô hết sức đẹp đẽ. Có thể đó mới là sự mở đầu cho việc ứng dụng tô pô trong thực tế.

Vật liệu tô pô và máy tính lượng tử

Máy tính ngày nay được xây dựng chủ yếu dựa trên các tính chất của vật liệu bán dẫn và các vật liệu từ. Các vật liệu mới có nhiều tính chất kỳ lạ và phong phú hơn nhiều, có thể sẽ giúp chúng ta xây dựng các thiết bị thông minh hơn.

Từ nghiên cứu cơ bản đến công nghệ là một đoạn đường dài. Tuy nhiên vào những năm 1970 khi đưa ra ý tưởng truyền thông tin trong sợi quang học, không ai có thể hình dung được ngày nay, cáp quang đã đến mọi nhà với tốc độ truyền tin hàng triệu lần hơn so với cách đây 20 năm.

Thế hệ máy tính hiện nay dựa trên khái niệm bit lấy giá trị logic 0 và 1. Tất cả thông tin được xử lý trong máy tính hiện đại đều quy về các phép toán với 0 và 1. Để xử lý một số lượng tính toán khổng lồ, người ta cần phải dùng một số lượng khổng lồ các mạch logic vô cùng nhỏ. Năm 2016 số mạch logic có trong một chip điều khiển trung tâm (CPU) của Intel đã tới con số trên 7.2 tỷ. Rõ ràng, phải có giới hạn cho việc thiết kế quá nhiều mạch logic trong một chip điều khiển.

Máy tính lượng tử được chờ đợi là bước phát triển có tính chất cách mạng dựa trên khái niệm qbit (bít lượng tử) có thể lấy giá trị 0 và 1 với các xác suất khác nhau tương ứng với các trạng thái lượng tử của một nguyên tử. Do đó năng lực tính toán, xử lý thông tin của máy tính lượng tử là gần như vô tận.

Một trong những vấn đề quan trọng nhất của máy tính lượng tử là làm thế nào các trạng thái có thể ổn định và bền vững. Các trạng thái lượng tử nói chung là không bền vững, do hệ thức bất định của Heisenberg và các hiệu ứng lượng tử. Điều đó cũng có phần nào giống như sự ổn định của các xoáy nước trên mặt nước.

Chính ổn định nhờ bất biến tô pô sẽ làm các trạng thái lượng tử trở nên bền vững. Các hệ Hall lượng tử phân số đều có những trạng thái lượng tử bền vững được ổn định nhờ bất biến tô pô. Chính đây là chìa khóa để giải quyết sự ổn định của các qbit trong máy tính lượng tử.

Gần đây đã có những bước tiến đáng kể về mặt này, để người ta hy vọng có đột phá trong việc chế tạo các máy tính lượng tử. Chính vì vậy mà các công trình của Thouless, Kosterlitz và Haldane sẽ có ảnh hưởng lớn đến sự phát triển tương lai của nhân loại.

Lời kết

Khác với mọi ngành toán học khác, các ứng dụng theo quy luật của tô pô như các vật liệu mới không được hình thành ngẫu nhiên trong tự nhiên. Vật liệu mới trên cơ sở gốm từ, hệ điện tử hai chiều, chuyển pha tô pô và máy tính lượng tử đều là sáng tạo của con người, thay Chúa điều khiển và biến đổi tự nhiên.

Tô pô học đã trải qua một con đường dài và khá vòng vèo để đi vào thực tế. Để ứng dụng vào thực tế, cần quá nhiều khái niệm liên quan và các tư tưởng ứng dụng cũng rất tinh tế và khó hiểu ngay với các nhà toán học. Nhưng chính điều đó mà chúng ta tin rằng, chúng ta đang ở ngưỡng cửa của một thời kỳ toán học, vật lý và công nghệ đang có sự phối hợp để có bước phát triển thần kỳ.

VỀ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM TRONG TOÁN HỌC

Terence Tao
(*University of California, Los Angeles*)
Người dịch Phùng Hồ Hải

Trong khi việc nâng cấp ứng dụng câu hỏi trắc nghiệm của tôi lên một định dạng hiện đại và tương tác hơn đang được thực hiện, tôi nghĩ rằng đây là một thời điểm tốt để thu thập ý kiến và những suy nghĩ của tôi về việc những câu hỏi trắc nghiệm hiện đang được sử dụng trong giảng dạy toán học, và về những hình thức tiềm năng của chúng có thể được sử dụng trong tương lai. Ý kiến của tôi là câu hỏi trắc nghiệm có những hạn chế đáng kể khi sử dụng trong các lớp học với mô hình truyền thống, nhưng có rất nhiều tiềm năng thú vị và chưa được khai thác khi được sử dụng như một công cụ tự đánh giá.

1. Câu hỏi trắc nghiệm trong lớp học

Về nguyên tắc, có vẻ rằng bản chất rõ ràng và chính xác của các mệnh đề toán học sẽ có thiên hướng cho phương thức trắc nghiệm, trái ngược với một số lĩnh vực tri thức khác, nhiều câu hỏi trong toán học có một câu trả lời chính xác duy nhất, khách quan, với tất cả các câu trả lời khác được đồng thuận coi là không chính xác. Với một bài kiểm tra trắc nghiệm, học sinh có thể được thử nghiệm trên các câu hỏi như vậy một cách khách quan. Thực vậy, chấm điểm cho các câu đố đó thậm chí có thể được tự động được thực hiện bởi một máy tính hoặc quét máy. Miễn là câu hỏi được phát biểu một cách rõ ràng (và đáp án là chính xác), việc chấm điểm đơn giản hơn các phương tiện kiểm tra khác. Điểm mạnh cuối cùng là, hình thức thi trắc nghiệm rất quen thuộc với hầu như tất cả các sinh viên đại học (những người đã có thể phải vượt qua kỳ thi trắc nghiệm để nhập học) và như vậy các quy tắc của các bài kiểm tra đòi hỏi rất ít lời giải thích.

Mặt khác, hình thức trắc nghiệm, như đang được sử dụng trong các kỳ thi toán, có một số điểm yếu nghiêm trọng, theo ý kiến của tôi, làm cho nó kém hơn so với các hình thức kiểm tra khác trong các khóa học toán ở mức cao hơn, mặc dù có nhiều cách để loại bỏ các khiếm khuyết rõ ràng nhất của hình thức thi này. Có lẽ vấn đề rõ ràng nhất là cách tiếp cận không khoan nhượng với những sai lầm, có thể bóp méo các mối quan hệ giữa khả năng và đánh giá: một học sinh đã có cách tiếp cận đúng cho một câu hỏi, nhưng thực hiện một lỗi nhỏ một hoặc hơi hiểu lầm câu hỏi, có thể mất toàn bộ điểm câu hỏi đó, trong khi một học sinh không hề biết phải làm gì, và chỉ đơn giản là đoán ngẫu nhiên, có thể kiếm được điểm cho một câu hỏi trắc nghiệm thuần túy nhờ may mắn, trong các hình thức kiểm tra khác điều này khó xảy ra hơn nhiều. (Tất nhiên, ta có thể giảm thiểu vấn đề này bằng cách xây dựng các câu hỏi đơn giản và rõ ràng, và đảm bảo rằng các câu trả lời không chính xác sinh ra bởi những lỗi nhỏ không được đưa ra như là một trong những lựa chọn.) Một vấn đề nữa của câu hỏi trắc nghiệm là dễ bị một số loại gian lận và tiêu cực hơn các hình thức kiểm tra khác, vì đáp án dễ dàng được sao chép và sử dụng, thậm chí bởi những học sinh không thực sự hiểu các tài liệu. (Vấn đề cụ thể này có thể phần nào được bảo vệ bằng cách xáo trộn các câu hỏi riêng cho từng học sinh, mặc dù điều này tất nhiên làm việc chấm bài cũng như việc cung cấp đáp án khó khăn hơn.) Một vấn đề thứ ba là khi học sinh thu được câu trả lời không nằm trong số các lựa chọn được liệt kê sẽ có khuynh hướng làm bừa, nhiều khi lý luận phi logic để đi đến một trong những câu trả lời được liệt kê, đó không phải là một thói quen tốt để thấm nhuần vào một nhà toán học.

Tuy nhiên, một vấn đề sâu sắc hơn, là những câu trắc nghiệm này cho một ấn tượng sai lệch về việc thế nào là giải một bài toán, và làm thế nào để thực hiện điều đó. Trong nghiên cứu toán học, các câu hỏi không thường đi kèm với một danh sách của năm phương án, một trong số đó là chính xác. Thông thường, hình dung ra những câu trả lời tiềm năng, có lý, hoặc nhiều khả năng xảy ra, hoặc thậm chí kiểu câu trả lời được mong đợi hay đặt vấn đề liệu có nên hỏi câu hỏi đó, cũng quan trọng không kém việc xác định câu trả lời đúng. Câu hỏi trắc nghiệm có xu hướng khuyến khích cho các cách tiếp cận nhanh-chóng-và-không-lành-mạnh hoặc cẩu thả để giải quyết vấn đề, trái ngược với cách tiếp cận thận trọng, cân nhắc, và tinh tế. Đặc biệt, câu hỏi như vậy có xu hướng khuyến khích việc áp dụng nguyên si quy tắc hình thức để đi đến câu trả lời, mà không dành nhiều suy nghĩ về việc liệu những quy định là thực sự áp dụng được đối với vấn đề đang xét hay không. (Thực ra, đào sâu quá mức về một đề trắc nghiệm, tìm kiếm những mẹo mực, những chỗ thiếu chặt chẽ, hoặc đặc biệt trong cách diễn đạt câu hỏi, hoặc cố gắng để chơi một số loại "*luật chơi*", trong đó cố gắng thần thánh hóa mục đích của người ra đề [xem cảnh này từ vở "*The Princess Bride*" cho một ví dụ cực đoan này], có thể làm cho những sinh viên khá hơn, hiểu nội dung kiến thức, lại có kết quả tồi tệ hơn so với những người chỉ đơn giản là việc áp dụng các quy tắc mà họ được dạy mà không có sự hiểu nội dung kiến thức. Ngược lại, một đề bài quá mẹo, được thiết kế để bẫy những học sinh áp dụng quy tắc một cách cẩu thả, không kiểm tra xem nó có áp dụng được không, thường sẽ được cảm nhận (khá đúng) như là không công bằng với học sinh.) Trong khi việc luyện tập các quy tắc cơ bản (ví dụ như các quy tắc và thuật toán trong môn Giải tích) chắc chắn là cần thiết, đặc biệt là ở cấp trung học và giai đoạn đầu đại học môn toán, tại thời điểm chuyển lên giai đoạn cao hơn trong bậc đại học sinh viên cần bắt đầu hiểu những cơ sở lý thuyết và những giải thích cho những quy tắc đó, như là một phần của việc phát triển tư duy căn bản đối với môn học. (Ngoài ra, khi học những môn nâng cao, sẽ có nhiều ngoại lệ và điểm yếu đối với bất kỳ quy tắc nào kiến việc áp dụng nó một cách không suy nghĩ trở nên nguy hiểm. Ví dụ, tính toán một tích phân đường bằng cách tịnh tiến đường rất dễ cho một câu trả lời sai nếu không có một cảm giác tốt khi nào tích phân sẽ hội tụ tới không khi chuyển qua một giới hạn, và khi nào thi không hội tụ. Cách học thuộc một số quy tắc dễ nhớ rằng khi nào có thể tích phân an toàn và khi nào không, thì sẽ thất bại vì có rất nhiều biến thể khác nhau, đặc biệt là trong các ứng dụng thực tế, cách duy nhất đáng tin cậy để tiến hành là để thực sự hiểu cách ước lượng tích phân và tính toán giới hạn).

Nhưng có lẽ hơn tất cả, câu hỏi trắc nghiệm thúc đẩy ý tưởng rằng câu trả lời cho một câu hỏi toán học là quan trọng hơn so với quá trình đi đến câu trả lời đó (và những hiểu biết thu được trong quá trình đó, và nghệ thuật trao đổi việc đó một cách hiệu quả với người khác). Sự thật, quá trình này quan trọng hơn nhiều so với câu trả lời, đặc biệt đối với một câu hỏi nhân tạo, chẳng hạn như là một câu hỏi thiết kế cho mục đích kiểm tra. Biết được quá trình suy luận được thực hiện bởi sinh viên để đi đến một câu trả lời - thậm chí là một trả lời sai - sẽ cung cấp cho ta một bức tranh chi tiết về khả năng của học sinh khi xử lý những câu hỏi tương tự (hoặc phức tạp hơn) trong tương lai, trong khi việc học sinh lựa chọn một câu trả lời đúng trong số năm giải pháp cho ta ít hơn nhiều thông tin về vấn đề này. Việc xác định điểm mạnh và điểm yếu cụ thể trong lý luận của học sinh cho nhiều phản hồi có giá trị hơn trong quá trình chấm điểm so với chỉ đơn giản là biết xem một câu hỏi được đưa ra đã được trả lời một cách chính xác hoặc không chính xác.

2. Trắc nghiệm như hình thức tự kiểm tra

Tôi đã thảo luận những hạn chế của việc sử dụng câu hỏi trắc nghiệm trong kỳ thi trên lớp học, đặc biệt là trong các khóa học toán học tại những năm cuối đại học. Mặt khác, tôi cảm thấy rằng các câu hỏi như vậy có thể đóng một vai trò hỗ trợ rất hữu ích trong việc tự kiểm tra cho các khóa học này, đặc biệt là liên quan đến các nội dung kiến thức cơ bản (ví dụ định nghĩa hoặc các quy tắc cơ bản của tính toán). Tôi sẽ chứng minh điều này với một khóa học giả định về đại số ở trung học phổ thông, mặc dù điểm này là chắc chắn áp dụng cho nhiều khóa học toán học ở cấp cao hơn.

Giả sử khóa đại số này nhằm dạy cho học sinh cách giải các phương trình đại số. Tất nhiên có nhiều cạm bẫy thông thường mà học sinh gặp phải khi thực sự cố gắng để giải quyết các phương trình đó, một trong những ví dụ phổ biến là, từ phương trình như $x^2 = y$ kết luận sai rằng $x = \sqrt{y}$, khi thay vì nói là $x = \sqrt{y}$ hoặc $x = -\sqrt{y}$. Bây giờ, ta có thể cảnh báo lỗi này trong các lớp học, và học sinh thậm chí có thể viết ra cảnh báo này khi ghi chú, nhưng nó vẫn lặp lại quá thường xuyên trong khi giải quyết bài toán đại số phức tạp hơn trong một bài thi (hoặc tệ hơn, trong một ứng dụng thực tế của đại số). Khi đó, các sinh viên cũng có thể nhận ra nguyên nhân của lỗi - nhưng phản hồi này có thể đến sau nhiều ngày hoặc nhiều tuần từ lần đầu tiên, nếu không được nhắc đi nhắc lại, các lỗi tương tự thì có thể tái phát sau này trong khóa học, hoặc trong các khóa học tiếp theo. Lặp đi lặp lại tiếp xúc với đại số cuối cùng sẽ loại bỏ các lỗi, nhưng nó có thể là một quá trình không hiệu quả. Đây là nơi mà một sự lựa chọn nhiều bài trắc nghiệm tự làm (đặc biệt, một bài kiểm tra trực tuyến) có thể giúp đỡ, với những câu hỏi như:

Câu hỏi 1. *Nếu x và y là các số thực thỏa $x^2 = y$, điều đúng nhất chúng ta có thể nói về x là*

a) $x = \sqrt{y}$.

b) $x = y^2$.

c) $x = y^{-2}$.

d) $x = \sqrt{y}$ *hoặc* $x = -\sqrt{y}$.

e) $x = y^{-2}$ *hoặc* $x = -y^{-2}$.

hoặc pha trộn với nhau với các biến thể như

Câu hỏi 2. *Cho x và y là các số thực. Khẳng định nào sau đây là không đủ để ngụ ý rằng $x^2 = y$?*

a) $x = \sqrt{y}$.

b) $x = -\sqrt{y}$.

c) $x = +\sqrt{y}$ *hoặc* $x = -\sqrt{y}$.

d) $x = y^2$.

e) $y = x^2$.

và

Câu hỏi 3. *Nếu* x *và* y *là các số thực sao cho* $x^3 = y$*, khi đó tốt nhất có thể nói về* x *là*

a) $x = \sqrt{y}$.

b) $x = y^{\frac{1}{3}}$.

c) $x = +y^{\frac{1}{3}}$ *hoặc* $x = -y^{\frac{1}{3}}$.

d) $x = y^{-3}$.

e) $x = y^{-3}$ *hoặc* $x = -y^{-3}$.

Những câu hỏi như vậy có cho biết khá trực tiếp (và có thông tin phản hồi ngay lập tức) rằng học sinh có mắc sai lầm ở vấn đề cụ thể này không, mà không cần sự can thiệp trực tiếp của một giảng viên hoặc giảng dạy trợ. (Một cách lý tưởng, một bài kiểm tra tự động không chỉ để cho biết ngay lập tức câu trả lời được lựa chọn là đúng hay sai, mà còn để giải thích những gì lỗi là trong trường hợp này).

Lưu ý một số khác biệt giữa những loại câu hỏi trắc nghiệm và những câu hỏi trong một cuộc kiểm tra trên lớp. Trong khung cảnh kỳ thi, người ta thường muốn có những câu hỏi phức tạp hơn mà kiểm tra một số khía cạnh của kiến thức cùng một lúc (ví dụ phân tích nhân tử, rút gọn, thế, ...) thay vì tập trung một cách hẹp và đơn giản lên một khía cạnh. (Đặc biệt, khi sinh viên thực sự nắm được kiến thức có thể trả lời mỗi câu hỏi ở đây dễ dàng, mà không cần phải tính toán đáng kể.) Ngoài ra, trong khi các bài kiểm tra trên lớp học cố gắng làm cho câu trả lời chính xác khá khác biệt so với các lựa chọn thay thế không chính xác (để phân biệt những người về cơ bản hiểu các kiến thức với những người đang thực sự không biết gì), việc tự kiểm tra cho phép sự khác biệt khá tinh tế giữa các câu trả lời đúng và những câu trả lời khác, để khuyến khích học sinh suy nghĩ cẩn thận và để giải quyết bất kỳ quan niệm sai lầm đầu vào, các loại "*câu hỏi lừa*" sẽ là không công bằng trong môi trường căng thẳng của một kỳ thi đánh giá trên lớp, nhưng có thể được thực hiện một cách an toàn trong một đề tự kiểm tra. Câu hỏi trắc nghiệm dường như có hiệu quả nhất khi dùng để giải thích các định nghĩa chính xác của một khái niệm quan trọng ("*với mỗi* ε *tồn tại một* δ" hay "*cho mỗi* δ *tồn tại một* ε*?*"), việc xây dựng chính xác một số quy tắc (đạo hàm của $\frac{f}{g}$ bằng $\frac{fg'-gf'}{g^2}$ hay $\frac{f'g-gf'}{g^2}$ hay $\frac{f'g-gf'}{f^2}$, ...?), hoặc kiểm tra trực tiếp một lỗi cụ thể và thường được thực hiện (nếu $x < y$, thì $-x < -y$, hay $-x > -y$?) Xem thêm danh sách các lỗi phổ biến trong giáo trình toán đại học). Nhưng với một chút trí tưởng tượng, người ta có thể đưa ra một số câu trắc nghiệm hữu ích cho việc tự kiểm tra với các mục đích khác, thậm chí cho các chủ đề toán học khá cao cao. Ví dụ, hãy xem xét các câu hỏi sau đây để kiểm tra của một người nắm bắt được các tính chất của biến đổi Fourier:

Câu hỏi 4. *Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ là một hàm số. Trong số tất cả các giả thiết dưới đây, đâu là giả thiết yếu nhất mà vẫn cho phép các biến đổi Fourier $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tồn tại và là liên tục?*

a) *f trơn và giảm nhanh chóng.*

b) *f là hoàn toàn khả tích.*

c) *f là bình phương khả tích.*

d) *f là liên tục.*

e) *f là liên tục và có giá compact.*

f) *f là một phân phối tăng chậm.*

Các loại kiến thức trong giải tích Fourier mà câu hỏi này kiểm tra như rất khó kiểm tra bởi các kiểu câu hỏi khác (trừ thi vấn đáp). Một khả năng thú vị khác là sử dụng trắc nghiệm để khám phá chiến lược giải quyết bài toán, một vấn đề chỉ gián tiếp được giải quyết bởi hầu hết các phương pháp kiểm tra. Ví dụ, trong một khóa học giải tích một biến, người ta có thể tập trung vào chiến thuật tích hợp, sử dụng câu hỏi như thế này:

Câu hỏi 5. *Kỹ thuật nào sau đây bạn cảm thấy là một bước đầu tiên để tìm nguyên hàm $\int x^2 \log(1+x)dx$ của hàm $x^2 \log(1+x)$?*

a) *Tích phân từng phần, đạo hàm x^2 và tích phân $\log(1+x)$.*

b) *Tích phân từng phàn, đạo hàm $\log(1+x)$ và tích phân x^2.*

c) *Thế $y = x^2$.*

d) *Thế $y = 1 + x$.*

e) *Thế $y = \log(1+x)$.*

f) *Thử đạo hàm hàm số $x^3 \log(1+x)$.*

g) *Phác thảo một đồ thị của $x^2 \log(1+x)$.*

h) *Khai triển Taylor $\log(1+x)$.*

i) *Khởi động Maple, Mathematica, hoặc SAGE.*

Lưu ý rằng câu hỏi này là có tính chất chủ quan hơn là câu hỏi trước, với câu trả lời khác nhau có điểm mạnh và điểm yếu khác nhau, không có trả lời thuần túy "*đúng*" hoặc thậm chí "*tốt nhất*" ở đây. Như vậy, đây sẽ là một câu hỏi khủng khiếp để đặt trong một kỳ thi đánh giá, nhưng tôi nghĩ rằng nó sẽ là một câu hỏi kích thích tư duy tốt để cung cấp cho một bài tự kiểm tra. (Điều này sẽ là một ví dụ về một câu hỏi mà các quá trình đến với câu trả lời của một người được lựa chọn chắc chắn là có giá trị hơn bản thân câu trả. Ngoài ra, có một nơi để thảo luận về các câu trả lời khác nhau cho một câu hỏi như thế này - chẳng nếu câu hỏi đã được lưu trữ trên một trang web thảo luận (wiki) - cũng sẽ thêm một chiều kích tới bài tập này). Lưu ý sự khác biệt giữa các câu hỏi trên và câu truyền thống hơn "*Tính nguyên hàm của* $x^2 \log(1+x)$." Sự nhấn mạnh tại đây là về chiến thuật hơn là tính toán.

Tóm lại, tôi tin rằng có một số cách thú vị - nhiều trong số đó chưa được khai thác hiện nay - trong đó các câu tự trắc nghiệm được thiết kế tốt và trực tuyến có hiệu quả để đánh giá những điểm mạnh và điểm yếu của một người trong một môn toán. Tất nhiên, có một tương tác một-một với giảng viên hoặc trợ giảng sẽ là một cách rất thích hợp để đạt được điều này loại thông tin phản hồi ngay lập tức, nhưng điều này là không thực tế cho các lớp học lớn hơn. Ngoài ra cũng đúng là một mức độ trưởng thành và kỷ luật nhất định là cần thiết đối với học sinh để thực sự được hưởng lợi từ phương thức tự đánh giá này, đặc biệt là khi chúng không có ảnh hưởng trực tiếp tới điểm số trên lớp của học sinh, nhưng triết lý của tôi ở đây là để cho sinh viên hưởng lợi từ sự nghi, tôi cảm thấy rằng khả năng thực hiện hơn mức tối thiểu để thi đỗ là một phần của những gì một khóa học ở các năm cuối đại học cần hướng tới.

Terence Tao 14/12/2008.

NƯỚC MỸ CHỌN VÀ LUYỆN ĐỘI TUYỂN THI TOÁN QUỐC TẾ (IMO) THẾ NÀO?

Lê Tự Quốc Thắng
(*Học viện Công Nghệ Georgia, Mỹ*)

GIỚI THIỆU

Bài viết này giới thiệu cách Mỹ chọn và luyện đội tuyển IMO. Để viết bài này, tôi đã tham khảo các tài liệu trên Internet, phỏng vấn các huấn luyện viên đội tuyển Mỹ, và các thành viên các đội tuyển IMO của nhiều nước trên thế giới.

Mỹ là nước không có các hệ thống trường chuyên lớp chọn như Nga, Trung Quốc, hay Việt Nam, nhưng Mỹ luôn chiếm vị trí khá cao trong các kỳ thi vô địch toán quốc tế (IMO), như hai năm 2015, 2016 đã đứng nhất đồng đội.

Trước hết xin nhất mạnh một điểm: *Độc giả đừng nhầm lẫn giữa việc tuyển chọn và huấn luyện cho các kỳ thi (Toán, Lý, Tin học, ...) với việc đào tạo học sinh có năng khiếu ở Mỹ, vì ở Mỹ hai vấn đề này, dù có liên quan với nhau, vẫn khác nhau rất xa, không như ở Việt Nam. Mục đích đào tạo học sinh giỏi ở Mỹ là để phát triển hết khả năng cho các học sinh có năng khiếu chứ không nhằm vào việc thi các kỳ thi Olympiad.*

Tôi sẽ viết về việc đào tạo học sinh năng khiếu ở Mỹ ở một bài khác. Bài viết này tập trung vào các nội dung như đã nêu ở tiêu đề.

Ở Mỹ không phải học sinh giỏi toán nào cũng biết/muốn thi toán quốc tế. Văn hóa Mỹ không đánh giá quá cao các tài năng toán học. Các nghiên cứu chỉ ra rằng rất nhiều các học sinh của đội tuyển Mỹ trong các kỳ thi này là những học sinh nhập cư hoặc con của những người nhập cư từ các nước mà ở đó giáo dục toán học được coi trọng và các tài năng toán học được nuôi dưỡng thông qua một quy trình khó khăn và kiên trì. "*Có thể nói là văn hóa Mỹ ngày nay dường như không khuyến khích nam giới và phụ nữ trong toán học*" - Michael Sipser, trưởng khoa Toán Học viện công nghệ MIT nói.

Đúng là ở Mỹ không có các trường chuyên với mục đích là luyện thi học sinh giỏi cho các kỳ thi Olympiad. Nhưng ở Mỹ cũng có một số trường chuyên, và các câu lạc bộ toán để đào tạo học sinh năng khiếu/giỏi. Các chương trình đào tạo học sinh giỏi thường được các trường đại học hỗ trợ, cho nên các học sinh IMO đến từ khắp các miền của nước Mỹ. Có học sinh học ở nhà (home schooling) do cha mẹ dạy, không đến trường. Thí dụ Reid Barton, cho đến nay là người duy nhất thi 4 lần thì được huy chương vàng cả 4, là home schooling.

Có một số ngộ nhận rằng Mỹ không cần luyện thi mà kết quả thi vẫn cao (thí dụ bài viết của ông Lê Quang Tiến về việc thi toán quốc tế). Trên thực tế việc tuyển chọn và luyện đội tuyển của Mỹ được tổ chức khá kỹ, có chiến lược, và ngày càng phức tạp và kỹ hơn. Tôi có hỏi trưởng đoàn và thành viên đội tuyển một số nước có thành tích cao trong thi toán quốc tế, tất cả đều cho rằng để có thành tích cao, rất cần có một chương trình huấn luyện kỹ, nhất là thời kỳ $3-4$ tuần trước khi thi IMO.

Và Mỹ ngay từ đầu đã huấn luyện khá kỹ đội tuyển của mình. Một số nước không có chương trình chọn lựa kỹ (qua các vòng thi tuyển) và không có luyện tập, thường không có kết quả cao. Điển hình là đội Italia, năm 1984, cả 6 thành viên của đội tuyển Italia được tổng cộng ... 0 điểm. Ngoại lệ có lẽ là nước Anh. Trong $10-15$ năm đầu tiên, nước Anh không huấn luyện đội tuyển trước khi đi thi, nhưng đội tuyển Anh vẫn khá thành công. N. Boston, thành viên đội tuyển Anh năm 1979 và hiện giờ là giáo sư toán đại học Wisconsin, nói với tôi rằng, đó là do ở Anh có truyền thống coi trọng việc giải toán nhanh trong trường phổ thông, và có nhiều câu lạc bộ toán ở các trường.

Việc chọn và luyện đội IMO của Mỹ được thực hiện bởi MAA, một tổ chức phi chính phủ. Nhà nước Mỹ hay Bộ giáo dục Mỹ hầu như không nhúng tay vào việc này, mặc dù lúc phát giải thưởng kỳ thi USAMO (vô địch toán Mỹ) thì trợ lý tổng thống Mỹ về khoa học và công nghệ thường có mặt và đọc phát biểu. Chi phí cho đội tuyển, tập trung luyện, đi thi, chủ yếu từ MAA và các nhà tài trợ. NSF (quỹ nghiên cứu khoa học Mỹ) cũng có đóng góp một ít.

IMO được khởi xướng bởi các nước Đông Âu (khối XHCN cũ) từ năm 1959. Nước tư bản đầu tiên tham gia là Phần Lan, năm 1965, và xếp chót bảng. (Phần Lan nghỉ luôn 8 năm, đến năm 1973 mới tham gia lại). Pháp tham gia lần đầu vào năm 1967, Hà Lan lần đầu năm 1969, và đều xếp chót bảng. M. Klamkin, huấn luyện đội tuyển IMO Mỹ những năm $1977-1984$ nói rằng nhiều người Mỹ "*không muốn Mỹ tham gia IMO, sợ rằng đội Mỹ sẽ bị các nước cộng sản đè bẹp*." Năm 1971 N. Turner viết bài báo ở tạp chí "Amer. Math. Monthly" nói rằng Mỹ đã có một số kỳ thi toán ở cấp tiểu bang, và nên gửi đội tuyển tham gia IMO, rằng có thể lúc đầu sẽ bị "*nhục*" vì thứ hạng thấp, nhưng tình hình sẽ cải thiện. Năm 1972 Mỹ lần đầu tổ chức thi vô địch toán nước Mỹ (USAMO) và năm 1974 MAA đồng ý gửi đội tuyển Mỹ tham gia IMO. Trong các nước tư bản thì Mỹ là nước thành công nhất trong thi IMO, có thứ hạng trung bình $1995-2008$ là 3 (Việt Nam thứ hạng trung bình là 6). Đặc biệt năm 1994 cả 6 thành viên đội tuyển Mỹ đều được điểm tuyệt đối, một kỷ lục mà chưa nước nào làm được. (Điều này tương phản với thành tích trung bình trong các đánh giá về trình độ toán của học sinh Mỹ nói chung). Để có được những thành công như vậy là nhờ việc chọn lựa và chuẩn bị cho đội tuyển IMO của Mỹ khá kỹ.

Hiện nay rất nhiều nước tham gia IMO (104 nước năm 2015). Trong các kỳ thi quốc tế cho học sinh phổ thông, IMO vẫn được xem trọng nhất. Cũng cần nói thêm, để thành công ở IMO, bạn cần phải nhanh và có khiếu trong việc giải toán. Việc giải toán kiểu IMO khác với việc nghiên cứu toán của các nhà toán học. Nghiên cứu toán thì phải trường kỳ, hiểu biết rộng và sâu ngành của mình, có nhiều tính sáng tạo, tìm lời giải cho một bài toán mà có thể nó không có lời giải. Trong khi giải toán Olympiad thì phải nhanh vì thời gian có hạn, và bạn biết rằng bài toán chắc chắn có lời giải, bạn chỉ phải tìm nó thôi. Nhưng cũng có một số điểm chung, trước hết là bạn phải có năng khiếu về tư duy toán. Không phải ngẫu nhiên mà sau năm 2000, hơn một nửa số người được giải thưởng Fields đã từng đoạt huy chương vàng tại IMO. Nếu tính số người tham gia IMO thì còn nhiều nữa. Năm 1994 Pháp có 2 giải thưởng Fields là Lions và Yoccoz, cả 2 đều là thành viên đội tuyển IMO của Pháp năm 1973.

Khoảng $\frac{1}{4}$ số thành viên đội tuyển IMO của Mỹ sau này trở thành nhà toán học. Khoảng $\frac{1}{2}$ số thành viên đội tuyển IMO của Mỹ là dân nhập cư hoặc con của dân mới nhập cư vào Mỹ từ những nước có thành tích cao ở IMO (theo hội toán học Mỹ, trong đó có người gốc Việt).

Để huấn luyện cho đội tuyển, MAA đã lập MOP (Mathemetical Olympiad Program, sau này là MOSP), một khóa huấn luyện không những cho những thành viên đội tuyển IMO của Mỹ mà còn tạo nguồn cho đội tuyển tương lai. Thường MOP kéo dài $2-4$ tuần, ngay trước khi đi thi, và đội tuyển sẽ đi đến địa điểm thi (ở nước nào đó) trực tiếp từ MOP.

Quy trình chọn đội tuyển IMO của Mỹ đã thay đổi nhiều lần. Vào thời điểm hiện tại phức tạp hơn các bạn nghĩ. Tuy nhiên việc "*luyện*" của đội tuyển Mỹ không nhiều như một số nước như Trung Quốc, Nga hay Việt Nam. Những trường chuyên của các nước này cho học sinh làm các loại toán Olympiad quanh năm. Làm nhiều quá có lẽ cũng có hại cho sự sáng tạo của (một số) học sinh sau này.

Ở Mỹ có 3 kỳ thi toán chính. Kỳ đầu tiên là AMC 12, bất cứ học sinh trung học nào muốn tham gia cũng được, nhưng phải đóng một khoản lệ phí. Những học sinh đạt điểm cao được mời tham dự vòng tiếp theo là AIME. Rồi khoảng gần 300 học sinh được điểm cao nhất AIME + AMC 12 được tham gia kỳ thi vô địch toán nước Mỹ (USAMO). Cả 2 vòng sau đều miễn phí.

Trước đây, $6-8$ người được điểm cao nhất của USAMO sẽ là thành viên đội tuyển IMO của Mỹ. Sau USAMO, thành viên đội tuyển Mỹ, và khoảng $25-35$ học sinh được điểm cao USAMO nhưng không phải đang học lớp 12, được mời đến MOP (hoặc sau này là MOSP). Mục đích là ngoài huấn luyện đội tuyển còn đào tạo thế hệ tương lai chuẩn bị cho IMO năm sau. Rất nhiều thành viên đội tuyển đã được tham dự MOSP của những năm trước, thậm chí không chỉ một lần. MOP đầu tiên được tổ chức năm 1974, năm Mỹ bắt đầu tham gia IMO. Ngay lần đầu này MOP đã "*đào tạo*" cho một số thành viên đội tuyển năm sau.

Về sau, đội tuyển IMO không được chọn dựa vào kết quả USAMO nữa. Sau khi khoảng 40 người điểm cao của USAMO được tập trung tại MOSP, sẽ có $2-3$ bài thi chọn đội tuyển nữa. Kết quả các bài thi chọn đội tuyển và điểm của USAMO sẽ được dùng để chọn đội tuyển. Việc tuyển chọn như vậy sẽ chính xác hơn nhưng đội tuyển chỉ được chọn ra khoảng 3 tuần trước IMO, gây một số phiền phức cho đội tuyển và các công việc hành chính như làm giấy tờ, visa.

Đến năm 2011, công thức chọn đội tuyển IMO lại thay đổi. Lần này việc chọn đội tuyển bắt đầu từ hơn một năm trước khi thi IMO, và gồm các bước sau đây. Để được vào đội tuyển năm sau, bạn phải được chọn vào MOSP của năm trước đó.

1. Đầu tiên là $2-3$ bài sơ tuyển diễn ra trong suốt Chương trình Toán học mùa hè (MOSP) tháng 6 năm trước. Khoảng 40 người qua được vòng này sẽ tham gia thi tuyển ở mục 2 và mục 3 dưới đây.

2. Hai bài thi chọn đội tuyển vào mùa đông (tháng 12, tháng 1).

3. Tiếp theo là bài thi của ngày đầu tiên của Romannian Master of Mathematics (bài thi các năm trước ở đây: http://rmms.lbi.ro/rmm2016), thường tổ chức vào tháng 3.

4. Cuối cùng là kỳ thi USAMO của năm nay, vào khoảng cuối tháng 4.

Kỳ thi 1 quyết định ai sẽ tham gia kỳ 2 và 3. AMC 12+ AIME sẽ quyết định ai sẽ tham gia USAMO, và sau đó $2 + 3+$ USAMO sẽ quyết định đội tuyển. Vì thế, đội tuyển được quyết định ngay sau khi USAMO diễn ra khoảng cuối tháng 4. Đến tháng 6 các thành viên đội tuyển và khoảng 50 ứng cử viên cho đội tuyển các năm sau sẽ được tập trung luyện chuẩn bị thi toán quốc tế (MOSP).

Ban tổ chức của MOSP là MAA (Hiệp hội Toán học Mỹ). Các thành viên tham gia MOSP được tài trợ hoàn toàn chi phí đi lại và ăn ở trong $3 - 4$ tuần. Phần lớn chi phí được chi trả bởi MAA và các nhà tài trợ. Thí dụ AKAMAI là một nhà tài trợ lớn – công ty đã giúp giúp MOSP tăng gấp đôi số học sinh. Số tiền nhận được từ chính phủ Mỹ là khá khiêm tốn.

Được nhận vào MOSP là rất khó, và là một vi dự đối với học sinh phổ thông Mỹ. Một chương trình khác cũng có uy tín cao là Research Science Institute (RSI), được tổ chức 6 tuần hàng năm ở MIT. RSI thiên về nghiên cứu, không thi tuyển chọn mà chỉ xét hồ sơ rồi tuyển chọn. Khoảng 80 học sinh cấp 3 đến từ khắp nơi trên thế giới (50 từ Mỹ và 30 học sinh nước ngoài) được chọn tham gia RSI (miễn phí hoàn toàn). Rất nhiều công trình nghiên cứu của các thành viên RSI được các giải thưởng cao ở cuộc thi Intel Sience Talent Search. MOSP và RSI thỉnh thoảng cũng có cạnh tranh với nhau, tranh giành học sinh giỏi nhất Mỹ về toán.

Các giảng viên tại MOSP. Có 2 loại chức danh: Giảng viên (hay còn gọi là huấn luyện viên) và trợ giảng. Hầu hết các giảng viên đều đã từng là trợ giảng, trừ một số ngoại lệ như Titu Andreescu, Zuming Feng và Razvan Gelca. Những người này được Huấn luyện viên trưởng (hiện tại là giáo sư Po-Shen Loh tới từ ĐH Carnegie-Mellon) mời đến làm việc. Họ thường là cựu thành viên của các đội tuyển IMO của Mỹ và các quốc gia khác, hoặc từng là thí sinh tham gia MOSP, và hầu hết rất trẻ.

Các giảng viên phần lớn là các giáo sư đại học, các nghiên cứu viên hậu tiến sĩ hoặc nghiên cứu sinh. Trợ giảng thường là sinh viên đại học. Họ đến từ các trường như MIT, Carnegie Mellon, Harvard, Berkeley. Có một số giảng viên từ các công ty tư nhân (như Jane Street Capital, Microsoft). Rất ít giáo viên phổ thông. Tổng cộng có khoảng 15 giảng viên và 7 trợ giảng. Nhưng không phải ai cũng ở đó đủ $3 - 4$ tuần của MOSP.

Cuối cùng, để có thể có một góc nhìn đầy đủ hơn về "*bếp núc*" của MOSP, chương trình huấn luyện chính của đội tuyển Mỹ, tôi xin giới thiệu phần trả lời của Razvan Gelca, huấn luyện viên kỳ cựu của MOSP cho các câu hỏi mà tôi đặt ra cho anh ấy. Một vài câu trong các câu hỏi này được đề xuất bởi Trần Nam Dũng, giảng viên trường Đại học Khoa Học Tự Nhiên thành phố Hồ Chí Minh, một cái tên quen thuộc trong giới Olympiad toán ở Việt Nam. Trong các câu trả lời dưới đây, đại từ "*tôi*" nghĩa là Razvan Gelca.

1. *Một ngày bình thường ở MOSP như thế nào?*

Có 3 kiểu ngày ở MOSP:

1. Có 2 bài giảng vào buổi sáng, mỗi bài 90 phút và một bài giảng 90 phút nữa vào buổi chiều. Sau đó, học sinh hoạt động tự do, hoặc là nghỉ ngơi, hoặc là làm toán hoặc có các hoạt động chung. Cũng có một bài báo cáo khoa học vào buổi tối dành cho các giảng viên và trợ giảng. Học sinh có thể tham gia hoặc không tùy ý.

2. Có 2 bài giảng vào buổi sáng và 1 bài kiểm tra vào buổi chiều.

3. Các ngày thứ Bảy có một số bài kiểm tra vào buổi sáng, thi sơ tuyển hoặc thi thử IMO, buổi chiều thứ bảy và Chủ nhật nghỉ ngơi.

   Kiểu ngày số 1 và số 2 xen kẽ nhau trong tuần, vì thế có rất nhiều bài kiểm tra.

2. *Hình thức các bài giảng?*

Tôi sẽ nói với bạn về cách mà tôi điều hành giờ học của tôi. Tôi tập trung rất nhiều vào các bài toán, và tập trung ít vào lý thuyết. Tôi bắt đầu bằng việc đưa cho các em danh sách các bài toán, tôi cho họ làm việc trong khoảng 45 phút, sau đó chúng tôi viết các thảo luận lên bảng. Những giảng viên khác có thể tập trung nhiều hơn vào lý thuyết.

3. *Các cấp độ giảng dạy?*

Học sinh được chia thành các nhóm tùy theo khả năng của mình:

A: Nhóm dai đen: Đây là đội tuyển chính thức của Mỹ, có thể thêm những người giỏi nhất trong số các cô gái tham dự EGMO (Olympiad Toán học dành cho nữ sinh châu Âu), và thành viên của đội tuyển Canada có 2 quốc tịch. Đây là nơi mà tất cả mọi người đều phải tập trung vào các bài toán, không nhiều lý thuyết. Trình độ và khả năng rất cao. Chỉ cần đưa cho họ các bài toán, họ lên bảng và cho ra những lời giải tuyệt vời.

B: Nhóm đai xanh: Nhóm này khá gần với nhóm đai đen, cũng tập trung chủ yếu vào các bài toán. Nhưng cũng có dạy cho họ một số lý thuyết mới. Với một số bài toán dành cho nhóm đai đen, ở nhóm này cần gợi ý cách giải.

C: Nhóm đai đỏ: Đây là những tân binh. Ở nhóm này, lý thuyết sẽ được dạy trước, sau đó mới là các bài toán. Dù tôi thường chọn những bài toán mà học sinh có thể giải được, nhưng luôn có một nhóm nhỏ không theo kịp.

4. *Có dạng toán cao cấp nào được dạy ở MOSP không?*

Có một số bài giảng toán cao cấp vào cuối ngày. Tôi luôn dạy về lý thuyết Chern - Simons: Topo học, hàm theta, cơ học lượng tử, và tôi cố gắng sử dụng những từ đơn giản để truyền tải ý của mình. Nhưng chúng tôi hiếm khi làm những thứ quá cao cấp trong lớp học.

Bài giảng là tài sản riêng của các giảng viên. Các giảng viên làm việc độc lập với nhau. Tôi không biết những người khác đang làm gì, ngoại trừ thỉnh thoảng tôi có ghé thăm lớp của họ, chỉ cho vui thôi. Trình độ các học sinh ngày càng cao, do đó tôi luôn phải tìm những bài toán mới, khó hơn.

5. *Thành viên trong đội tuyển IMO của Mỹ có nhận được bất kỳ giải thưởng nào từ Chính phủ hay các tổ chức không? Các thí sinh sau đó thường theo học những trường nào?*

Chính phủ Mỹ không tham gia vào việc này, mặc dù Nhà Trắng có cử đại diện là ông J.P. Holdrenla trợ lý tổng thống về khoa học và kỹ thuật tham dự lễ trao giải của USAMO. Hầu hết thí sinh nhận được học bổng của các trường đại học. MIT không trao học bổng cho những người đạt giải, nhưng Harvard thì có, vì thế có nhiều người học Harvard hơn MIT. Carnegie - Mellon hiện tại đang rất tích cực thu hút những sinh viên này bằng học bổng. Và đây cũng là lý do giải thích tại sao Carnegie - Mellon hiện đang là một đối thủ lớn ở kỳ thi Putnam. Ngay cả UCLA cũng trao học bổng để thu hút sinh viên, nhưng họ mới chỉ thu hút được một số sinh viên nước ngoài. Trước đây, Duke cũng trao học bổng, nhưng bây giờ họ không còn thu hút được những học sinh của chúng tôi nữa. Princeton đứng sau Harvard, MIT, CMU trong việc thu hút người của Olympiad.

Tôi muốn nói rằng có rất nhiều người đã trở thành nhà toán học, nhưng không phải là tất cả. Đáng tiếc là nhiều người cuối cùng lại làm việc cho các quỹ đầu cơ (tiền nhiều nhưng tương lai mù mịt). Tôi không rõ con số cụ thể.

6. *Có trường nào chuyên biệt ở Mỹ giống như các trường ở Nga dạy toán ở mức độ cao không? Hay có chương trình đào tạo nào tập trung vào các vấn đề toán học phục vụ riêng Olympiad không? Có trường nào ở Mỹ (hay địa phương nào) có truyền thống lâu đời về việc giành giải cao ở USAMO không?*

Có các trường như Phillips Exeter, Thomas Jefferson và một số trường khác chuyên cung cấp khá nhiều học sinh giỏi, nhưng ở Mỹ thì hơi khác các nước như Nga. Có nhiều cơ sở giáo dục, chương trình đào tạo tư nhân hoặc phi lợi nhuận thậm chí còn đóng góp nhiều hơn. Tôi ủng hộ và tham gia vào một số chương trình này. Và tôi tin rằng chúng đang định hình lại bộ mặt giáo dục ở đất nước này. Đây là một số chương trình: Nghệ thuật giải quyết vấn đề (chương trình đào tạo trực tuyến), Toán học tuyệt vời (trường hè), Toán học lý tưởng (trường hè).

Có nhiều câu lạc bộ toán học, nổi bật nhất là câu lạc bộ toán học ở Bay Area và chương trình dành cho những học sinh tài năng ở Johns Hopkins. Và còn có rất nhiều chương trình khác ở New England, East Coast (New York, New Jersey, North Carolina), Bay Area, San Diego, Dallas. Tuy nhiên cũng có những học sinh trên khắp nước Mỹ tự học và vào được MOP.

7. *IMO đầu tiên mà Mỹ tham gia là vào năm* 1974, *cũng là năm mà đội tuyển Mỹ rất thành công. Vậy việc ôn luyện cho MOSP thời điểm đó có nặng nề không? Bạn có thể so sánh MOSP và việc tuyển chọn giữa bây giờ và lúc đó?*

Cứ 10 năm IMO lại tăng lên một cấp độ cao hơn. Đội tuyển Mỹ có thể đối mặt rất tốt với những thay đổi, hầu hết là vì những người trẻ đã đổi mới chương trình đào tạo. Mỗi năm, các bài toán mỗi lúc một khó hơn, và học sinh của chúng tôi cũng ngày càng giỏi hơn. Bây giờ chúng tôi đã có nhiều học sinh hơn, chúng tôi có những cơ sở vật chất tốt hơn, chúng tôi có quá trình tuyển chọn cạnh tranh hơn và cũng có nhiều nguồn tài liệu hơn: Sách, Internet, các chương trình đào tạo tại địa phương.

LUẬN LÝ VỚI THÌ

Trần Thanh Hải (Vienna)

TÓM TẮT

Luận lý với thì (temporal logics hoặc đôi khi còn được gọi là tense logics) được phát triển bởi các nhà triết học để nghiên cứu yếu tố thời gian trong những lập luận. Hiện tại, nhiều loại luận lý với thì đã được phát triển và chúng thường được phân biệt dựa trên việc mô tả cấu trúc của yếu tố thời gian: nhánh hoặc tuyến tính. Trong phần này, chúng tôi sẽ giới thiệu LTL - một loại loại luận lý với thì thuộc nhóm tuyến tính. LTL thường được dùng để mô tả và kiểm chứng chương trình máy tính. Giá trị của các công thức trong LTL được xác định dựa trên cấu trúc $Kripke$.

1. Cấu trúc $Kripke$

Ở đây, chúng tôi giả sử rằng người đọc đã quen thuộc với *luận lý bậc nhất* (gồm các phép toán $\wedge, \vee, \ldots$, hai vị từ với mọi $\forall$ và tồn tại $\exists$). Gọi AP là tập hợp các mệnh đề cơ bản trong luận lý bậc nhất. Cấu trúc *Kripke* cũng được xem là một đồ thị chuyển trạng thái có gán nhãn và được mô tả như một bộ $K = (S, S_0, R, L)$ [2], với

- S là một tập hợp các nốt hay *trạng thái*,
- $S_0 \subseteq S$ là một tập hợp các *trạng thái bắt đầu*,
- R là một *quan hệ* toàn phần bên trái trên $S \times S$, (nói cách khác, với mọi trạng thái $s \in S$, tồn tại một trạng thái $s' \in S$ sao cho $R(s, s')$),
- L là một *hàm gán nhãn* $L : S \to 2^{AP}$ gắn mỗi trạng thái $s \in S$ một tập $L(s)$ các mệnh đề cơ bản trong AP và các mệnh đề này được xem là luôn luôn đúng trong s [1].

Vì R là một quan hệ toàn phần bên trái, chúng ta luôn luôn có thể xây dựng một đường đi *vô hạn* π dựa trên một cấu trúc Kripke được cho sẵn. Một *đường đi* trong K là một chuỗi có thứ tự các trạng thái $\pi = s_0, s_1, \ldots$ sao cho với mọi $i \geq 0, R(s_i, s_{i+1})$ luôn tồn tại. Chúng ta dùng ký hiệu $\pi(i)$ để mô tả trạng thái thứ i trên đường đi π và π^i để chỉ một đường đi mới bắt đầu từ trạng thái thứ i, nói cách khác $\pi^i = (s_i, s_{i+1}, \ldots)$.

2. Biểu diễn chương trình với luận lý

Gọi $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ là tập hợp các *biến* của hệ thống. Chúng ta giả sử rằng mọi biến trong V có thể được gán một giá trị trong từ tập hữu hạn D [2]. Một *phép lượng giá* trên V là một hàm gán các giá trị trong D cho những biến trong V.

Một *trạng thái* của hệ thống có thể được mô tả bằng các giá trị được gán cho những biến trong V, nói cách khác, một trạng thái có thể hiểu làm một hàm $s : V \to D$. Giả sử hệ thống của chúng ta có hai chiếc đồng hồ hr_1 và hr_2, hay $V = \{hr_1, hr_2\}$, và một phép lượng giá như sau $\langle hr_1 = 5, hr_2 = 10\rangle$, chúng ta có thể biểu diện trạng thái tương ứng bằng công thức $(hr_1 = 5) \wedge (hr_2 = 10)$. Ngoài ra, nếu chúng ta hình dung một công thức luận lý bậc nhất f như tập hợp các phép lượng giá cho f có giá trị đúng, chúng ta có thể biểu diễn một tập các trạng thái bằng một công thức của luận lý bậc nhất.

[1] Trong một số trường hợp AP có thể là tập hợp các mệnh đề cơ bản của các loại luận lý khác

[2] Yêu cầu tập D có hữu hạn phần tử chủ yếu xuất phát mục đích kiểm thử lỗi phần mềm tự động. Chúng ta sẽ bàn về một số phương pháp này kiểm lỗi ở dịp khác. Với cách biểu diễn phần mềm ở đây, D có thể vô hạn

Algorithm 1 Hai đồng hồ

procedure HOẠT ĐỘNG
  $hr_1 \in \mathsf{Int}$
  $hr_2 \in \mathsf{Int}$
khởi tạo:
  $hr_1 \leftarrow 1$
  $hr_2 \leftarrow 6$
lặp:
  while true **do**
    $hr_1 = (hr_1 + 1) \bmod 12$
    $hr_2 = (hr_2 + 1) \bmod 12$

Trong ví dụ "Hai đồng hồ", chúng ta thấy rằng ban đầu hai đồng hồ hr_1, hr_2 lần lượt có giá trị 1 và 6. Sau đó, chúng lần lượt có các giá trị $\langle 2,7\rangle, \langle 3,8\rangle \ldots$. Với cách biểu diễn mô tả ở trên, trạng thái khởi tạo của hệ thống sẽ được biểu diễn bằng công thức $(hr_1 = 1) \wedge (hr_2 = 6)$. Và để biểu diễn bước các bước chuyển trạng thái, ví dụ như từ $\langle 1,6\rangle$ sang $\langle 2,7\rangle$, chúng ta cần thêm một số khái niệm khác. Chúng ta tạo ra một tập mới các biến, ký hiệu là V'. Chúng ta có thể hiệu V là tập các biến của trạng thái *hiện tại* và V' là tập hợp các biến của trạng thái kế tiếp. Mỗi biến v trong V sẽ có một biến tương ứng v' ở trong V'. Một phép lương giá (có thứ tự) trên V và V' được xem như một cặp (có thứ tự) hai trạng thái hay còn gọi là một *bước chuyển trạng thái*. Trọng ví dụ dụ "Hai đồng hồ", chúng ta biểu diễn bước chuyển trạng thái đầu tiên bằng công thức $(hr_1 = 1) \wedge (hr_2 = 6) \wedge (hr_1' = 2) \wedge (hr_2' = 7)$. Tập hợp các cặp trạng thái được gọi là một *quan hệ trạng thái*. Nếu R là một quan hệ trạng thái, chúng ta đùng ký hiệu $\mathcal{R}(V, V')$ để chỉ công thức luận lý bậc nhất tương ứng. Trong ví dụ trên, ta có $\mathcal{R}(V, V') = (hr_1' = (hr_1 + 1) \bmod 12) \wedge (hr_2' = (hr_2 + 1) \bmod 12)$.

Để mô tả tính chất của hệ thống, chúng ta cần định nghĩa tập hợp các mệnh đề cơ bản AP. Ở đây, một mệnh đề cơ bản sẽ có dạng $v = d$ với v là một biến trong V và d là một giá trị trong D.

3. Định nghĩa LTL

Chúng ta thấy rằng cách biểu diễn chương trình máy tính như trên chỉ dùng luận lý bậc nhất. Tuy nhiên sẽ rất bất tiện nếu chúng ta dùng luận lý bậc nhất để mô tả một số tính chất gắn với yếu tố thời gian của hệ thống [2, 4]. Ví dụ hr_1 không bao giờ nhận giá trị 13 hoặc đèn giao thông không thể từ màu xanh chuyển sang màu đỏ ngay lập tức. Để việc mô tả một số tính chất của hệ thống thuận tiện, LTL đã được phát triển. Sau đây, chúng ta sẽ tìm hiểu định nghĩa của LTL [4].

3.1. Ngữ pháp

Các biểu thức trong LTL được xây dựng dựa trên các luật sau:

$$\varphi ::= \top \mid p \mid \varphi \vee \varphi \mid \neg\varphi \mid \mathbf{X}\varphi \mid \varphi\mathbf{U}\varphi$$

với

- p là một mệnh đề cơ bản trong AP và
- **X** and **U** là những *liên kết với thì* và lần lượt được gọi *tiếp theo* và *tới khi*.

Các liên kết khác được định nghĩa tương tự như trong luận lý cổ điển. Ngoài ra, chúng ta có thể định nghĩa thêm hai liên kết *sau một lúc* **F** và *luôn luôn* **G** như sau

$$\mathbf{F}\varphi = \top\mathbf{U}\varphi$$
$$\mathbf{G}\varphi = \neg\mathbf{F}\neg\varphi$$

3.2. Ngữ nghĩa

Theo ngữ nghĩa tự nhiên, các liên kết **X**, **U**, **F** và **G** có thể hiểu như sau:

- $\mathbf{X}\varphi$: φ sẽ đúng tại trạng thái kế tiếp,
- $\varphi_1\mathbf{U}\varphi_2$: nếu φ_2 đúng tại một thời điểm nào đó thì φ_1 sẽ đúng từ trạng thái hiện tại cho tới trạng thái ở thời điểm đó,
- $\mathbf{F}\varphi$: φ sẽ đúng trong một thời điểm nào đó ở tương lai, và
- $\mathbf{G}\varphi$: φ luôn luông đúng.

Chính xác hơn, giá trị của mệnh đề φ trong LTL sẽ được xác định dựa trên một cấu trúc Kripke và một đường đi K, π (π là một đường đi trên K như sau:

- $K, \pi \vDash \top$ luôn luôn đúng,
- $K, \pi \vDash \bot$ luôn luôn sai,
- $K, \pi \vDash p$ khi và chỉ khi $p \in L(\pi_0)$, nói cách khác, một mệnh đề cơ bản p chỉ đúng trên K, π khi và chỉ khi hàm gán nhãn L gắn p với phần tử đầu tiên $\pi(0)$ của đường đi π,
- $K, \pi \vDash \neg\varphi$ khi và chỉ khi if $M, \pi \nvDash \varphi$.
- $K, \pi \vDash \varphi \vee \psi$ khi và chỉ khi $K, \pi \vDash \varphi \vee K, \pi \vDash \psi$
- $K, \pi \vDash \mathbf{X}\varphi$ khi và chỉ khi $K, \pi(1) \vDash \mathbf{X}\varphi$
- $K, \pi \vDash \varphi\mathbf{U}\psi$ khi và chỉ khi $\exists i. (K, \pi(i) \vDash \psi) \wedge (\forall j < i. (K, \pi(j) \vDash \varphi))$
- $K, \pi \vDash \mathbf{F}\varphi$ khi và chỉ khi $\exists i. K, \pi(i) \vDash \varphi$
- $K, \pi \vDash \mathbf{G}\varphi$ khi và chỉ khi $\forall i. K, \pi(i) \vDash \varphi$

4. Ứng dụng của LTL

4.1. Mô tả tính chất của chương trình máy tính

Dễ thấy rằng LTL không thể mô tả mọi tính chất của hệ thống. Tuy nhiên, rất may mắn rằng LTL đủ hữu dụng để mô tả hai lớp tính chất quan trọng của chương trình máy tính [2, 4]:

- *Tính an toàn*: những điều xấu không bao giờ xảy ra trong suốt quá trình chạy của chương trình,
- *Tính sống sót*: những điều tốt sau một lúc sẽ xảy ra.

Những trạng thái vi phạm một tính chất mong đợi nào đó được gọi là những *trạng thái xấu*.

Ví dụ 4.1, 4.3 và 4.2 mô tả cách dùng LTL để biểu diễn một số tính chất của chương trình. Hai ví dụ đầu tiên là tính an toàn và ví dụ thứ ba là tính sống sót.

Ví dụ 4.1 *Hai chương trình A and B không thể cùng ở trong trạng thái quan trọng (critical) cùng lúc.*

$$\boldsymbol{G}(\neg inCS_A \vee \neg inCS_B)$$

Ví dụ 4.2 *Đèn giao thông không thể từ màu xanh chuyển sang màu đỏ ngay lập tức.*

$$\boldsymbol{G}(green \Rightarrow \neg\boldsymbol{X}red)$$

Ví dụ 4.3 *Đèn giao thông sẽ chuyển sang màu xanh vô hạn lần.*

$$\boldsymbol{GF}xanh$$

4.2. Kiểm lỗi hệ thống

Dựa trên phương pháp biểu diễn hệ thống bằng các công thức luận lý với thì, các nhà khoa học máy tính đã phát triển phương pháp tự động kiểm lỗi của hệ thống dựa trên mô hình (model checking). Hiện tại, những nền tảng hỗ trợ viết đặc tả và kiểm lỗi tự động như TLA$^+$, Spin, nuSMV... đều cho phép người dùng sử dụng LTL [3, 4, 1]. Chúng ta sẽ bàn tới phương pháp và nền tảng này ở phần sau.

Tài liệu

[1] Alessandro Cimatti, Edmund Clarke, Enrico Giunchiglia, Fausto Giunchiglia, Marco Pistore, Marco Roveri, Roberto Sebastiani, and Armando Tacchella. Nusmv 2: An opensource tool for symbolic model checking. In *International Conference on Computer Aided Verification*, pages 359–364. Springer, 2002.

[2] Edmund M Clarke, Orna Grumberg, and Doron Peled. *Model checking*. MIT press, 1999.

[3] Gerard J Holzmann. The model checker spin. *IEEE Transactions on software engineering*, 23(5):279, 1997.

[4] Leslie Lamport. *Specifying systems: the TLA+ language and tools for hardware and software engineers*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 2002.

CÁC PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN HỮU HẠN CHO PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG

Henry Tran
Wayne State University, Michigan, USA

LỜI BAN BIÊN TẬP

Bài viết của tác giả Henry Tran có nguyên bản là tiếng Anh, có ba phần chính gồm:

- Lý thuyết và ứng dụng lập trình MATLAB trong phương trình Parabolic.
- Lý thuyết và ứng dụng lập trình MATLAB trong phương trình Hyperbolic.
- Lý thuyết và ứng dụng lập trình MATLAB trong phương trình Elliptic.

Chúng tôi đã tiến hành dịch, biên tập và sẽ trích đăng lần lượt trong các số báo của Epsilon, mở đầu là Parabolic.

1. Giới thiệu

Chúng ta sử dụng phương trình đạo hàm riêng (Partial Differential Equations, ký hiệu là PDEs) để biểu diễn cho nhiều hiện tượng vật lý trong thực tế, trong toán học và trong vật lý lý thuyết. Trong bài viết này, chúng ta sẽ tập trung vào phương trình đạo hàm riêng trên phương trình truyền nhiệt, phương trình Laplace, phương trình sóng, phương trình Poisson, phương trình Helmholtz, v.v.

Thông thường, với mỗi dạng phương trình đạo hàm riêng, chúng ta sẽ áp dụng các phương pháp số để tìm nghiệm gần đúng với các điều kiện biên cho trước, và các sai số, độ hội tụ của nghiệm gần đúng tìm được và nghiệm chính xác.

Ở đây, chúng ta sẽ áp dụng hai phương pháp sai phân hữu hạn (Finite Difference Method) là: phương pháp tường minh (Explicit method) và một phương pháp khác cao cấp hơn là phương pháp Crank-Nicolson (viết tắt là CNM). Chúng ta sẽ dùng một dạng đơn giản nhất của bài toán PDFs dạng Parabol, đó là phương trình truyền nhiệt. Chúng ta sẽ dùng phương pháp sai phân hữu hạn cho phương trình sóng trong bài toán PDEs dạng Hyperbolic. Cuối cùng là phương trình Helmholtz trong bài toán PDEs dạng Elliptic để xem xét tính ổn định và hội tụ của nghiệm.

Thông qua việc biểu diễn đồ họa của các phương trình đã nêu và tính toán bằng phần mềm lập trình cho toán ứng dụng MATLAB trong không gian hai chiều và ba chiều, chúng ta sẽ so sánh được các phương pháp ở các khía cạnh nhất định. Hơn nữa, dựa vào các giá trị khác nhau của các bước không gian h và các bước thời gian k, cũng như các điều kiện biên, chúng ta có thể xác định được tính ổn định, tính hội tụ của các nghiệm qua các dạng của bài toán PDEs.

Chúng ta sẽ lập trình với phần mềm MATLAB để hỗ trợ trong việc tính toán và biểu diễn các nghiệm trong bài toán PDEs bằng các đồ thị. MATLAB phiên bản 14 là một công cụ mạnh cho toán ứng dụng, nó còn chứa các công thức, bảng công cụ dành cho phương trình đạo hàm riêng. Trong tính toán chúng ta sẽ lập trình cho các bài toán PDEs bằng các câu lệnh trong MATLAB qua việc sử dụng các hàm tính toán.

Cuối cùng, thông qua các sự so sánh, chúng ta cũng biểu diễn được tính ứng dụng của các phương pháp sai phân hữu hạn trong mỗi vấn đề, nêu được các kết quả tuỳ thuộc vào tính ổn định và tính hội tụ.

2. Các bài toán dạng Parabolic

2.1. Phương trình đạo hàm riêng dạng Parabolic

Một phương trình đạo hàm riêng bậc hai có dạng

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial xy} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + f = 0$$

được gọi là bài toán Parabolic nếu như ma trận

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

thỏa mãn điều kiện $\det(M) = ac - b^2 = 0$.

Từ phương trình trên, ta có thể viết ra dạng đơn giản nhất của PDEs trong bài toán Parabolic của không gian 1 chiều, còn gọi là phương trình truyền nhiệt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

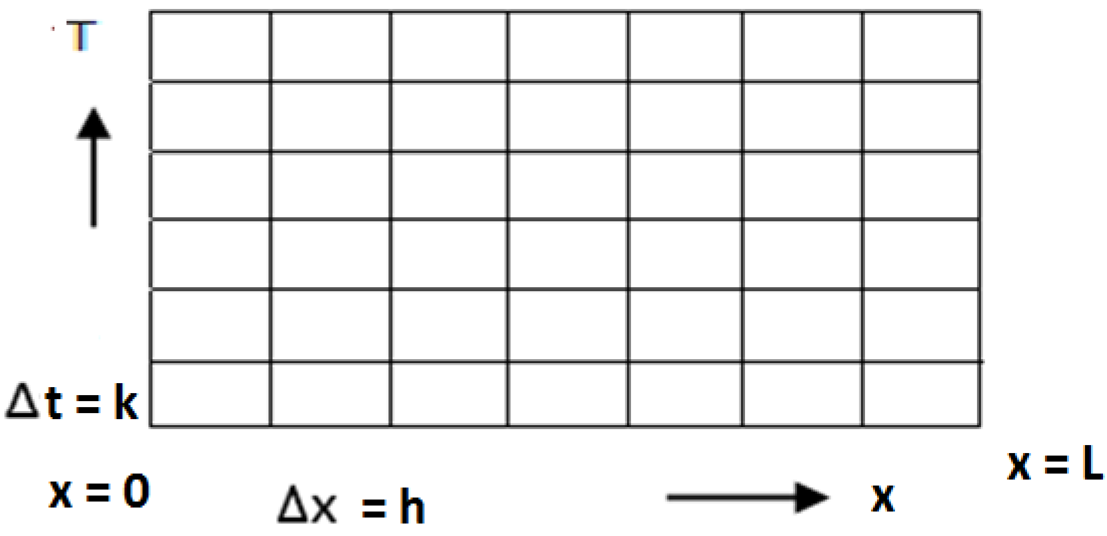
trong đó

$$\begin{aligned} &0 \le x \le L, \\ &0 \le t \le T, \\ &x = i\Delta x, \\ &t = j\Delta t, \\ &i = \overline{1, n}, \\ &j = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Với

- L: Độ dài cho trước.
- T: Thời gian cho trước.
- Δx: Bước độ dài.
- Δt: Bước thời gian.

Chúng ta có hai điều kiện biên là $u(0,t) = b$ và $u(L,t) = c$.



2.2. Phương pháp tường minh (Explicit method)

2.2.1. Phương pháp tường minh sử dụng công thức

Xét phương trình

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Chúng ta sẽ bắt đầu với định lý Taylor theo biến h trong công thức tổng quát

$$f(x+h,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x,y)}{k!}h^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi,y)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

với $\xi \in (x, x+h)$. Do đó, hàm số f có dạng

$$f(x+h,y) = f(x,y) + hf_x(x,y) + \frac{1}{2}h^2 f''(\xi,y)$$

có thể đưa về dạng

$$f_x(x,y) = \frac{1}{h}\left[f(x+h,y) - f(x,y)\right] - \frac{1}{2}hf''(\xi,y)$$

hoặc xấp xỉ thành

$$f_x(x,y) \approx \frac{1}{h}\left[f(x+h,y) - f(x,y)\right].$$

Tương tự, ta cũng có các kết quả sau

$$f(x-h,y) = f(x,y) - hf_x(x,y) + \frac{1}{2}h^2 f_{xx}(x,y) - \frac{1}{3!}h^3 f'''(\xi)$$

và

$$f(x+h,y) = f(x,y) + hf_x(x,y) + \frac{1}{2}h^2 f_{xx}(x,y) + \frac{1}{3!}h^3 f'''(\xi).$$

Cộng từng vế các đẳng thức, ta có biểu thức của $f_{xx}(x,y)$ là

$$f_{xx}(x,y) = \frac{1}{h^2}\left[f(x+h\cdot y) - 2f(x,y) + f(x-h,y)\right].$$

Tiếp theo, ta có phương trình đạo hàm riêng với số bước độ dài h trong không gian và giá trị k theo thời gian là

$$u_{xx}(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}\left[u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)\right]$$

và

$$u_t = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{k}\left[u(x,t+k) - u(x,t)\right].$$

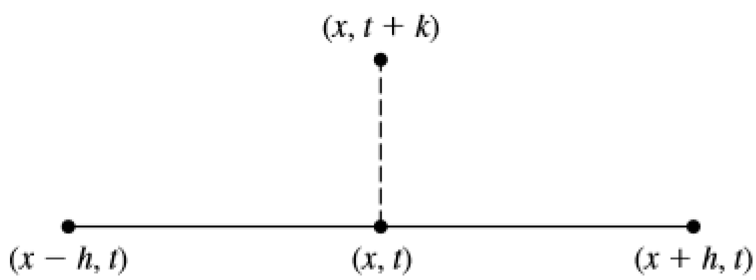
Suy ra

$$\frac{1}{h^2}\left[u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)\right] = \frac{1}{k}\left[u(x,t+k) - u(x,t)\right] \tag{1}$$

với các điều kiện

- $a = 1$.
- h là độ dài của mỗi bước không gian (space steps).
- k là giá trị của mỗi bước thời gian (time steps).

Hình minh họa bên dưới biểu diễn bốn điểm của phương trình (1) ở trên



Phương trình (1) còn có thể viết thành dạng

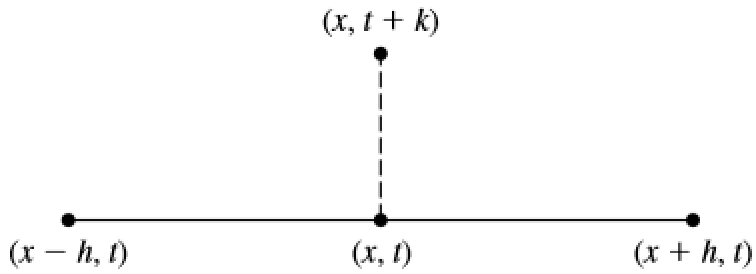
$$u\left(x,t+k\right)=\sigma\, u\left(x+h,t\right)+\left(1-2\sigma\right)u\left(x,t\right)+\sigma\, u\left(x-h,t\right) \tag{2}$$

trong đó $\sigma=\frac{k}{h^2}$.

Chúng ta có điều kiện ổn định cho bài toán dạng Parabolic là: $\sigma=\frac{k}{h^2}\le\frac{1}{2}$.

2.2.2. Công thức tường minh theo dạng ma trận

Chúng ta sử dụng phương trình (1) với bốn điểm như sau:



$$u\left(x,t+k\right)=\sigma\, u\left(x+h,t\right)+\left(1-2\sigma\right)u\left(x,t\right)+\sigma\, u\left(x-h,t\right).$$

Bằng cách viết $u^j=\left[u_{0j},u_{1j},u_{2j},\dots,u_{nj}\right]^T$ thì phương trình (2) có thể đưa về dạng với các giá trị i,j cho hàm u như sau:

$$u_{i,j+1}=\sigma\, u_{i+1,j}+\left(1-2\sigma\right)u_{i,j}+\sigma\, u_{i-1,j}.$$

trong đó $u\left(x_i,t_j\right)=u_{ij}=u\left(idx,jdt\right)$ và $i=1,\dots,n;j=1,\dots,m.$

Bây giờ chúng ta sẽ viết phương trình (2) thành dạng ma trận là:

$$u^{j+1}=Au^j$$

trong đó

$$A=\begin{bmatrix}
1-2\sigma & \sigma & 0 & & \cdots & & \cdots & 0\\
\sigma & 1-2\sigma & \sigma & & & & & \\
0 & \sigma & 1-2\sigma & \ddots & & & & \vdots\\
\vdots & & \sigma & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \sigma & & \vdots\\
 & & & & \ddots & 1-2\sigma & \sigma & 0\\
\vdots & & & & & \sigma & 1-2\sigma & \sigma\\
0 & \cdots & & & \cdots & 0 & \sigma & 1-2\sigma
\end{bmatrix}$$

2.2.3. Phương trình truyền nhiệt: bài toán mẫu và lập trình tính toán

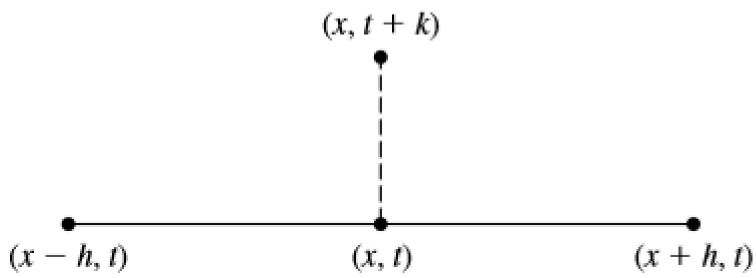
Xét hệ sau

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = \sin \pi x \end{cases}$$

trong đó $0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1$. Chúng ta được phương trình vi phân với các tham số h, k là

$$\frac{1}{h^2}\left[u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x+h,t)\right] = \frac{1}{k}\left[u(x,t+k) - u(x,t)\right]$$
$$\Leftrightarrow u(x,t+k) = \sigma\, u(x+h,t) + (1-2\sigma)\, u(x,t) + \sigma\, u(x-h,t)$$

Điều kiện ổn định ở đây là $\sigma = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$.



2.2.4. Ví dụ và lập trình tính toán

Xét ví dụ sau

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = \sin \pi x \end{cases}$$

Chọn $L = 1, T = 0.25$, $h = dx = \frac{L}{n_x} = \frac{1}{2^4}$; $k = dt = \frac{T}{n_t} = \frac{0.25}{2^{10}}$

trong đó

- n_t là số bước thời gian.
- n_x là số bước độ dài.
- dt là giá trị của bước mỗi thời gian.
- dx là độ dài của mỗi bước không gian.

Chúng ta sẽ áp dụng công thức tường minh để giải phương trình truyền nhiệt bởi

$$\sigma = \frac{k}{h^2} = \frac{dt}{dx^2}.$$

Nghiệm gần đúng được tính bởi công thức

$$u(x, t+k) = \sigma\, u(x+h, t) + (1-2\sigma)\, u(x,t) + \sigma\, u(x-h, t).$$

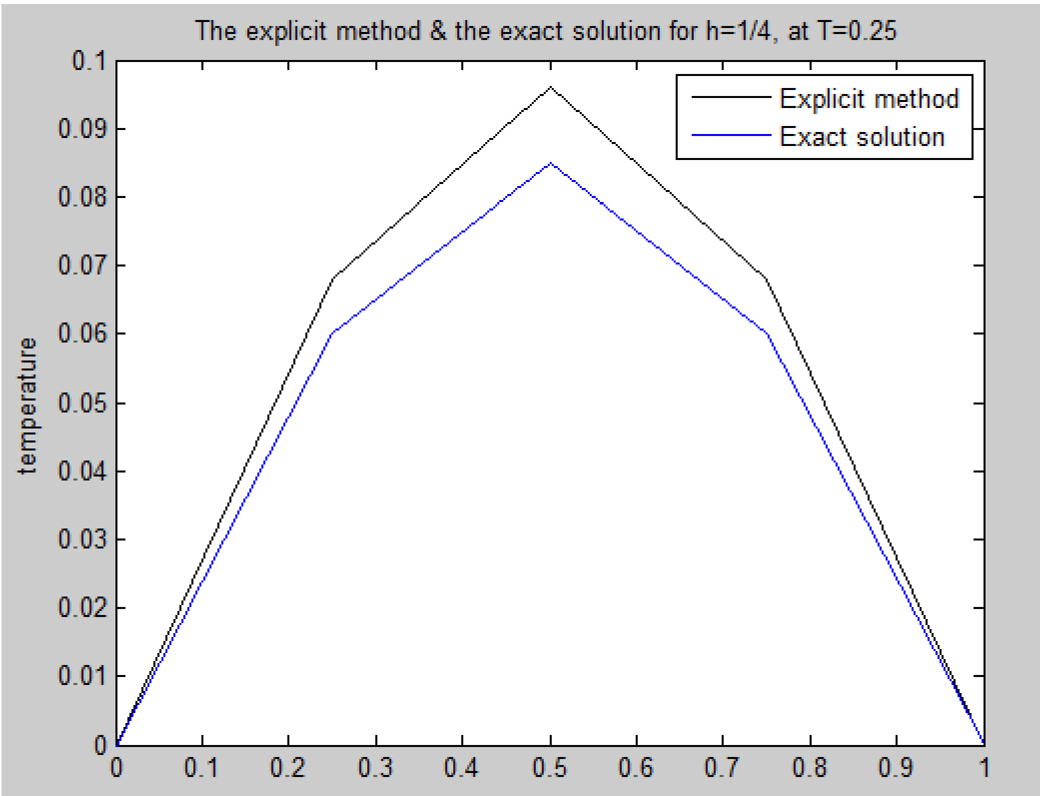
Trong khi đó, nghiệm chính xác là

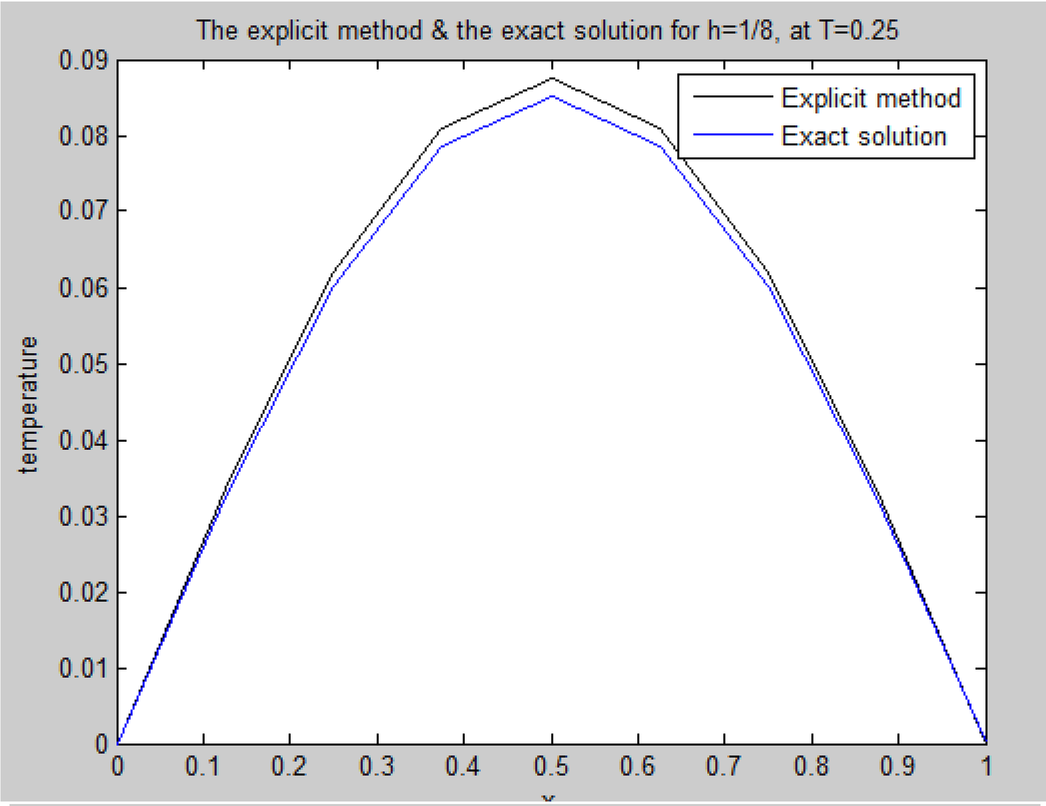
$$u_{exact}(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x.$$

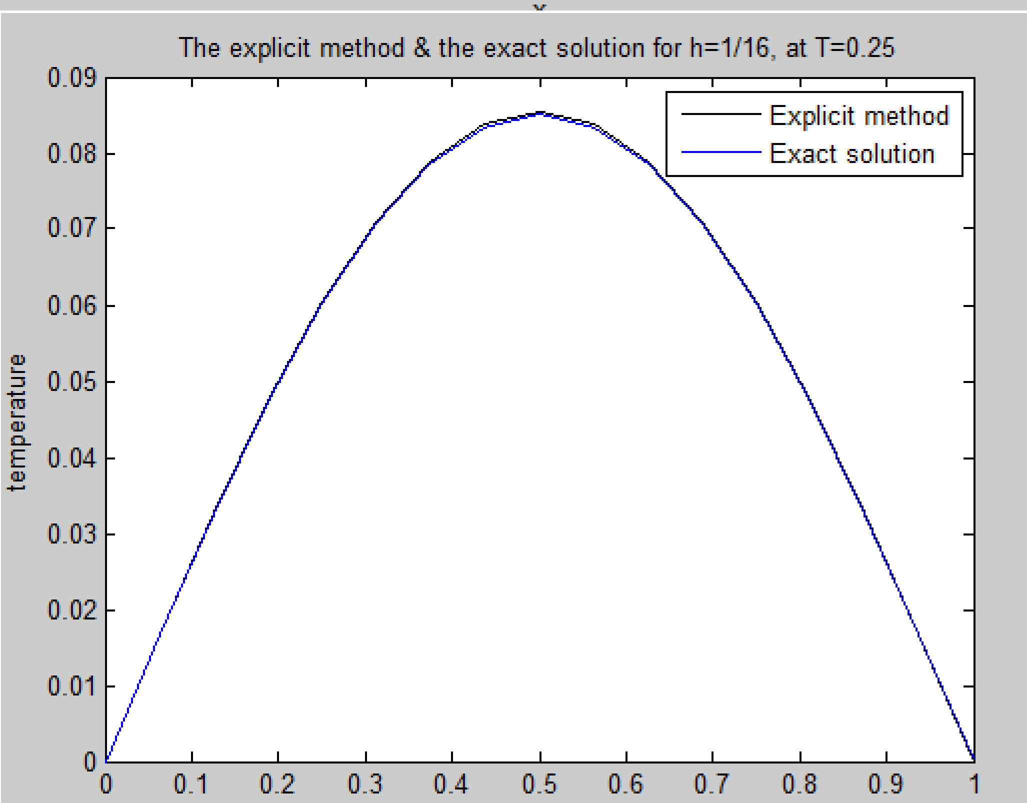
Tiếp theo là lập trình tính toán (xem thêm phần Phụ lục bên dưới).

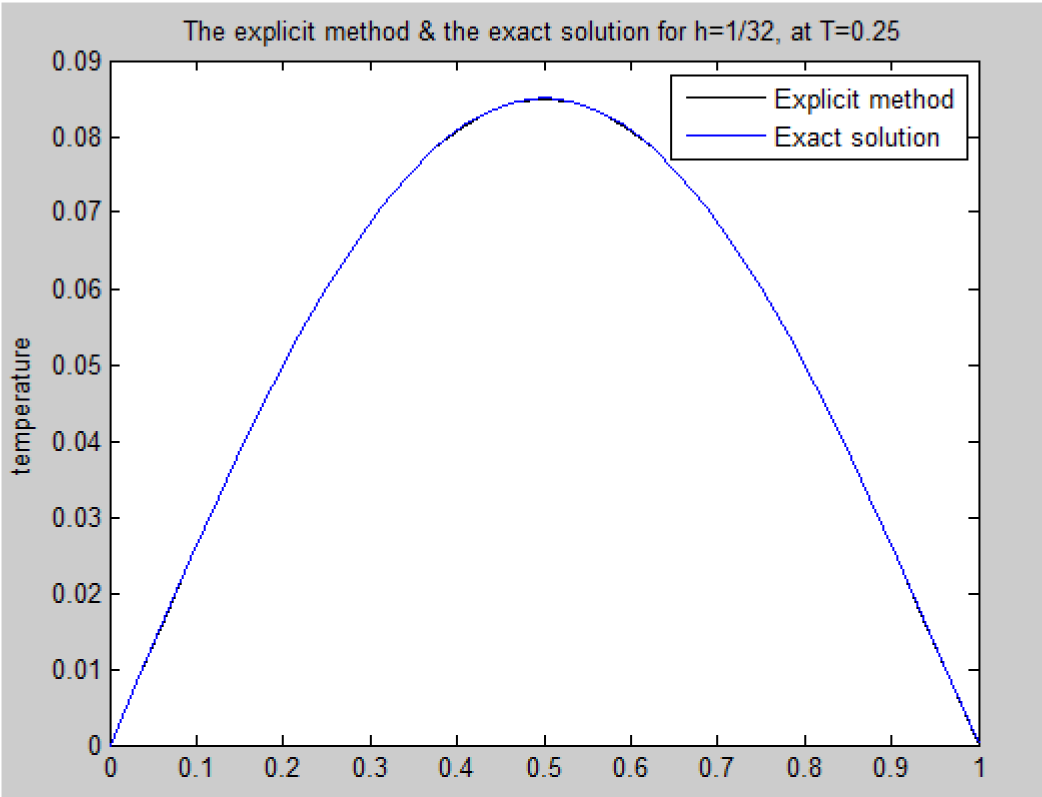
Chúng ta có kết quả của nghiệm gần đúng bởi phương pháp tường minh và nghiệm chính xác tại $T = 0.25$ trong đồ thị sau.

Theo cách hình học, chúng ta sẽ vẽ đồ thị của các nghiệm với các giá trị cố định của $k = \frac{1}{n_t} = \frac{1}{2^{10}}$ và các giá trị khác nhau của $h = \frac{1}{n_x}$ với $n_x = 4, 8, 16, 32$ rồi sau đó biểu diễn chúng trên cùng một mặt phẳng hai chiều, ta có

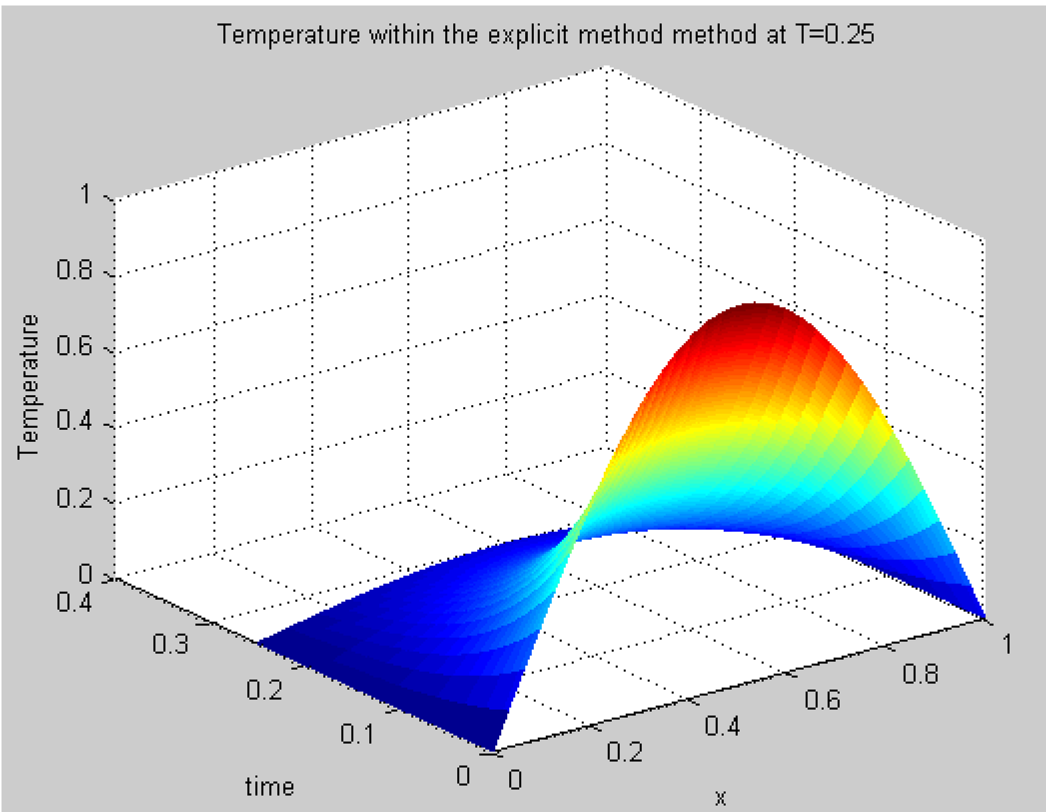



The explicit method & the exact solution for h=1/8, at T=0.25
Explicit method
Exact solution
temperature
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

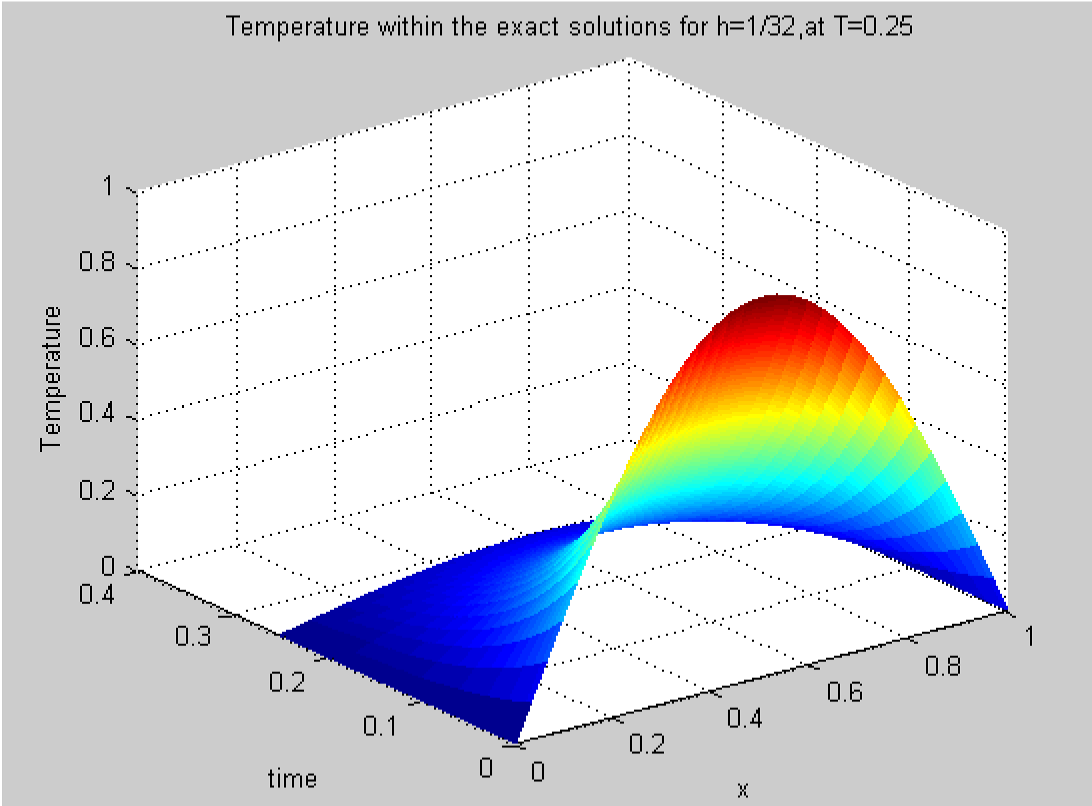

The explicit method & the exact solution for h=1/16, at T=0.25
Explicit method
Exact solution
temperature
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1



Đồ thị của nghiệm gần đúng bởi phương pháp tường minh và nghiệm chính xác với $h = \frac{1}{n_x}$ với $n_x = 4, 8, 16, 32$ và $T = 0.25$



Minh họa của nghiệm gần đúng bởi phương pháp tường minh trong không gian 3 chiều



Minh họa của nghiệm chính xác trong không gian 3 chiều

2.3. Phương pháp Crank-Nicolson

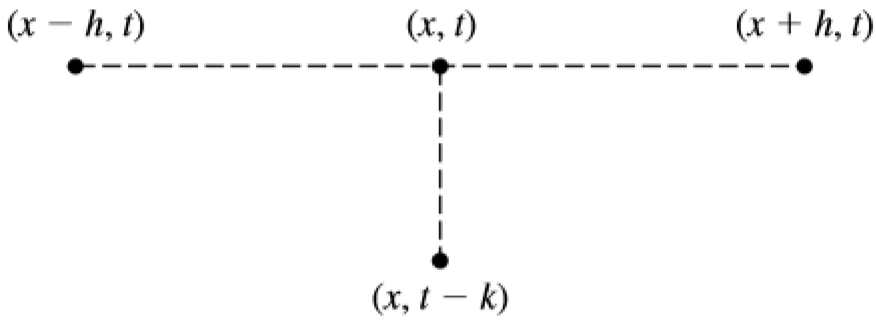
Dựa vào phương trình 1, ta biến đổi lại như sau

$$\frac{1}{h^2}\left[u\left(x+h,t\right)-2u\left(x,t\right)+u\left(x-h,t\right)\right]=\frac{1}{k}\left[u\left(x,t\right)-u\left(x,t-k\right)\right],$$

trong đó $r=2+s,\ \ s=\frac{h^2}{k}$. Tiếp theo, ta viết nó dưới dạng

$$-u\left(x-h,t\right)+ru\left(x,t\right)-u\left(x+h,t\right)=su\left(x,t-k\right).$$

Do đó, ta ký hiệu thành $su_{i,j-1}=-u_{i-1,j}+ru_{i,j}-u_{i+1,j}$. Bốn điểm biểu diễn của công thức như hình bên dưới



Đặt $b_i = su\left(x, t-k\right)$, từ phương trình (2), chúng ta viết lại dạng ma trận thành

$$\begin{bmatrix} r & -1 & 0 & . & . & 0 \\ -1 & r & -1 & 0 & 0 & . \\ 0 & -1 & r & \ddots & 0 & . \\ . & 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ . & 0 & 0 & -1 & r & -1 \\ 0 & . & . & 0 & -1 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

Phương trình có thể viết thành dạng đơn giản như dưới đây

$$b_j = Mu_j$$

trong đó

$$M = \begin{bmatrix} r & -1 & & . & . & 0. \\ -1 & r & -1 & & & . \\ & -1 & r & \ddots & & . \\ . & \ddots & \ddots & -1 & & \\ . & & -1 & r & -1 & \\ 0\ . & . & & -1 & r & \end{bmatrix}.$$

2.3.1. Ví dụ

Xét ví dụ sau đây

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u\left(x,t\right) = \frac{\partial}{\partial t} u\left(x,t\right) \\ u\left(0,t\right) = u\left(1,t\right) = 0 \\ u\left(x,0\right) = \sin \pi x \end{cases}$$

Chọn các tham số

$$
\begin{aligned}
&L = 1, T = 0.25;\\
&h = dx = \frac{L}{nx} = \frac{1}{2^4};\\
&k = dt = \frac{T}{nT} = \frac{1}{2^{10}};\\
&n_x = 2^4\ n_t = 2^{10}
\end{aligned}
$$

trong đó

- n_t là số bước thời gian.
- n_x là số bước không gian.
- dt là giá trị của mỗi bước thời gian.
- dx là độ dài của mỗi bước không gian.

Ta áp dụng phương pháp sai phân hữu hạn để giải phương trình truyền nhiệt

$$
\begin{aligned}
&r = 2 + s, s = \frac{h^2}{k},\\
&b_i = su(x, t-k), -u(x-h, t) + ru(x, t) - u(x+h, t) = su(x, t-k).
\end{aligned}
$$

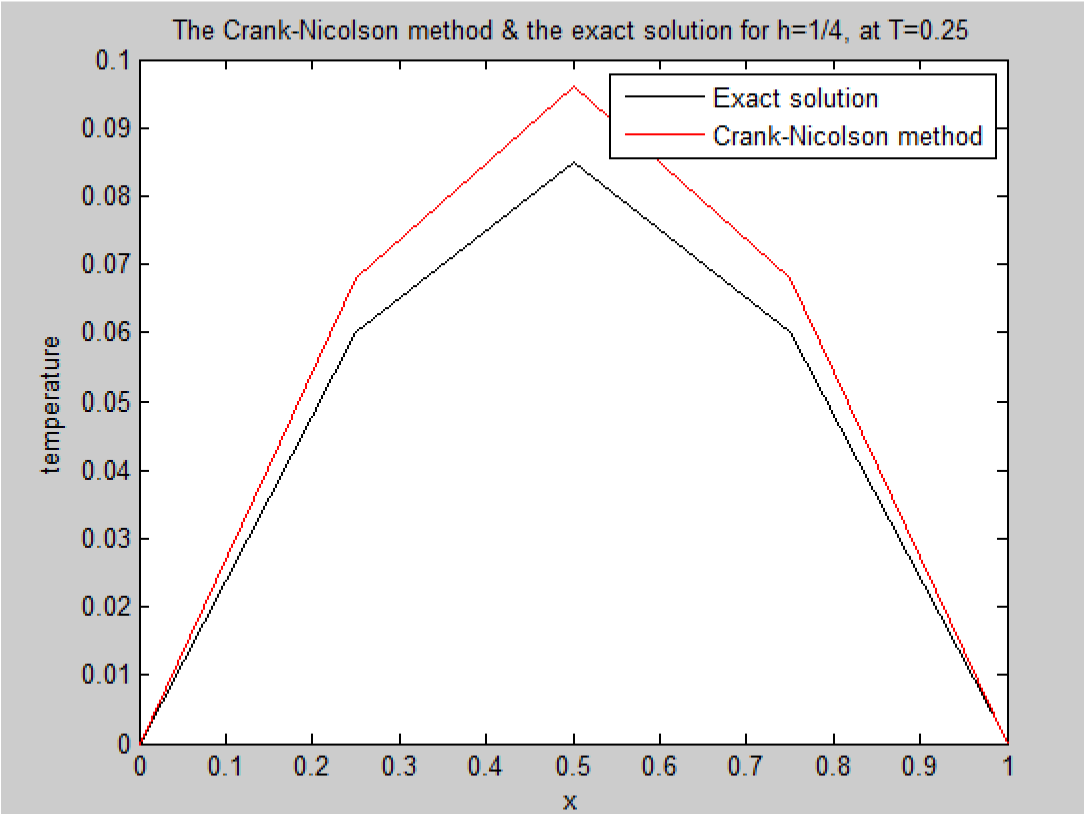
2.3.2. Lập trình tính toán.

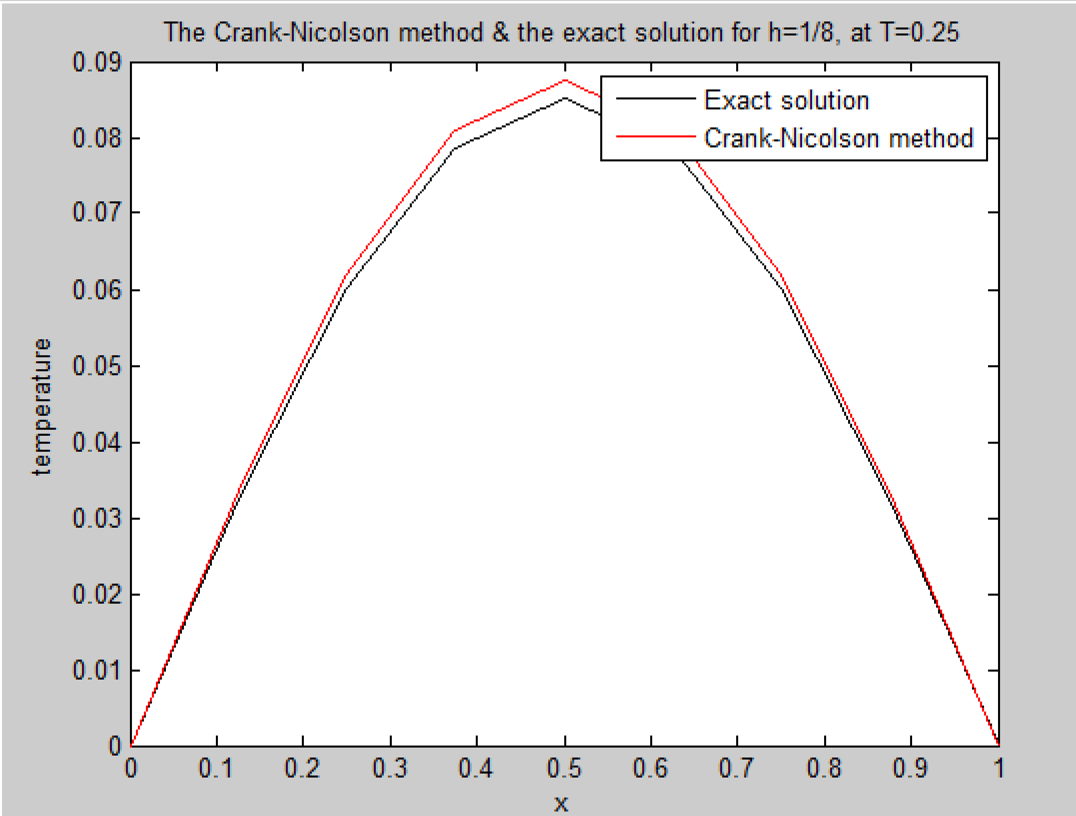
Chúng ta có kết quả của nghiệm gần đúng bởi phương pháp Crank-Nicolson và nghiệm chính xác với $T = 0.25$ trong đồ thị minh họa.

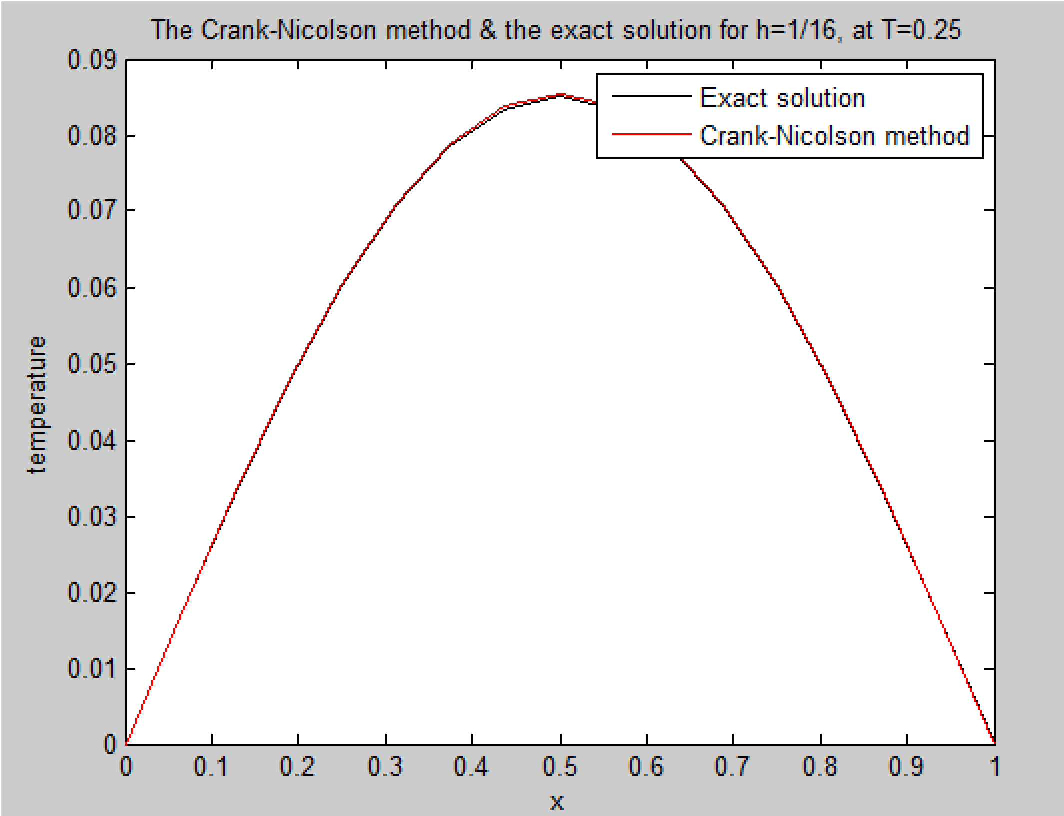
Nghiệm chính xác là

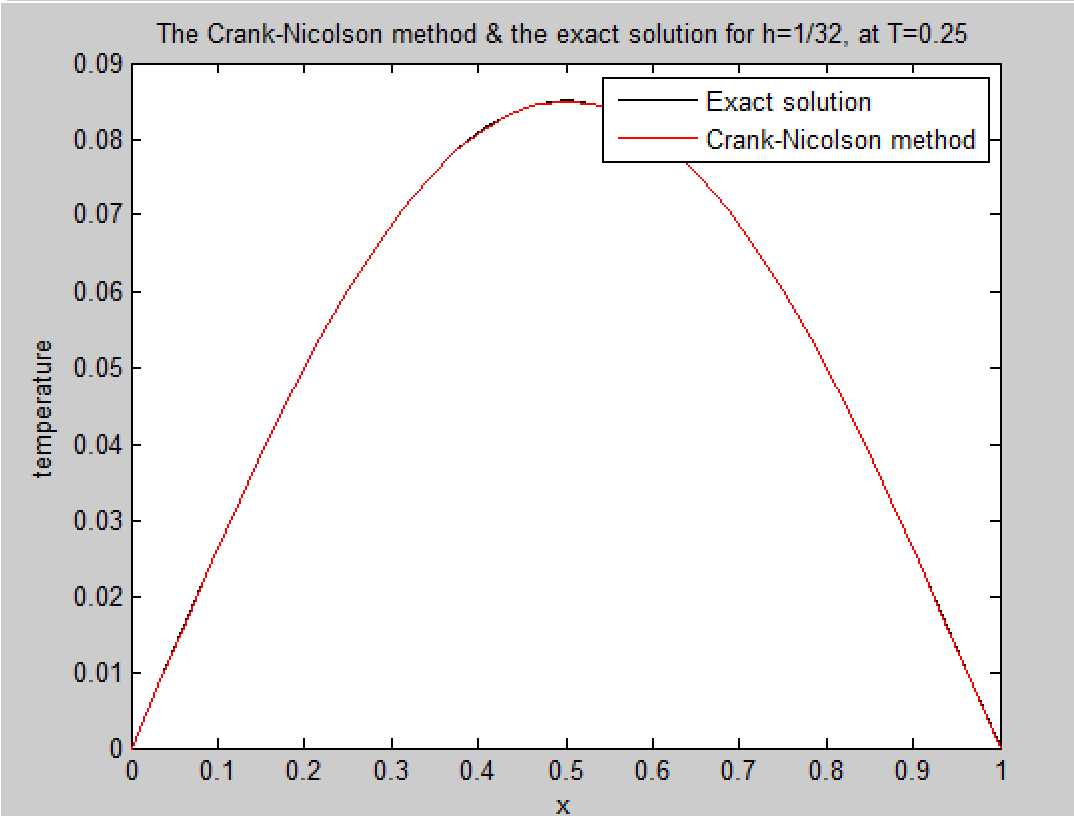
$$u_{exact}(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x.$$

Theo cách hình học, chúng ta sẽ vẽ đồ thị của nghiệm với các giá trị cố định $k = \frac{1}{n_t} = \frac{1}{2^{10}}$ và các giá trị khác nhau của $h = \frac{1}{n_x}$ với $n_x = 4, 8, 16, 32$ và mô tả trong các hình minh họa sau

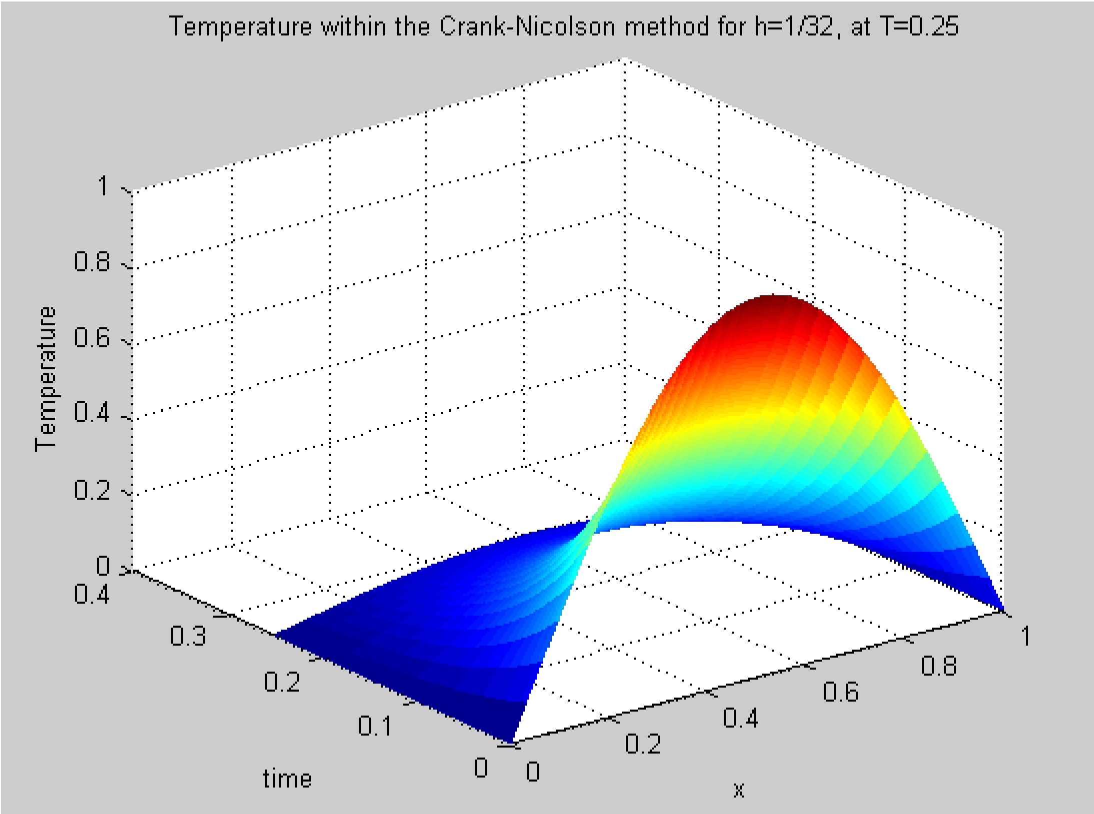

The Crank-Nicolson method & the exact solution for h=1/4, at T=0.25
Exact solution
Crank-Nicolson method
temperature
x
0
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
0.08
0.09
0.1
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


The Crank-Nicolson method & the exact solution for h=1/8, at T=0.25
Exact solution
Crank-Nicolson method
temperature
x
0
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
0.08
0.09
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

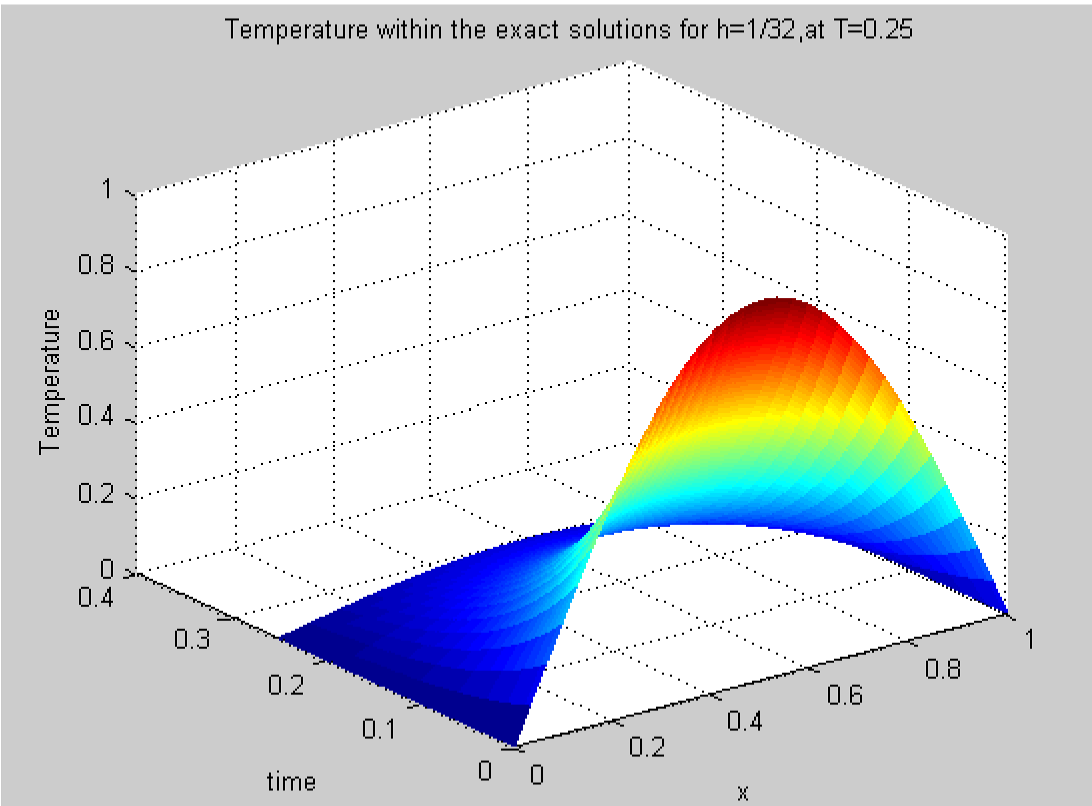




Minh họa cho nghiệm gần đúng bởi phương pháp Crank-Nicolson từ các giá trị khác nhau của h và nghiệm chính xác.



Minh họa của nghiệm gần đúng bởi phương pháp Crank-Nicolson trong không gian 3 chiều.



Minh họa của nghiệm chính xác trong không gian 3 chiều.

3. Quá trình hội tụ của các nghiệm

Ta sẽ so sánh giữa nghiệm chính xác, nghiệm cho bởi phương pháp tường minh và phương pháp. Crank-Nicolson

3.1. Ví dụ

Xét ví dụ sau

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = \sin \pi x \end{cases}$$

Nghiệm chính xác là

$$u_{exact}(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x, \text{ tại } T = 0.25.$$

Các điều kiện biên ban đầu là:

$$\begin{array}{c} u(x,0) = \sin \pi x \\ u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{array}$$

Chúng ta sẽ dùng chuẩn vô hạn (infinity norm) để tìm các sai số của nghiệm:

$$\begin{array}{c} \|u_{exact} - u_h\|_\infty \leq C \cdot h^\alpha \\ \|u_{exact} - u_h\|_\infty = \max_{0 \leq j \leq n} |(u - u_h)(x_j)| \end{array}$$

trong đó

- u_{exact} : là nghiệm chính xác.
- u_h : là các nghiệm gần đúng.
- α : là độ hội tụ của nghiệm.

Sai số giữa nghiệm gần đúng và nghiệm chính xác của phương pháp sai phân hữu hạn

$$e = \|u_{exact} - u_h\|_\infty = \max_{0 \leq j \leq n} |(u - u_h)(x_j)|.$$

3.2. Độ hội tụ

Từ việc tìm ra các sai sốt của nghiệm, ta có thể tìm ra độ hội tụ của nghiệm (α_{2^i}) bởi công thức.

Tổng quát, ta có

$$\frac{e_{2^i}}{e_{2^{(i+1)}}} = \left(\frac{h_{2^i}}{h_{2^{(i+1)}}}\right)^{\alpha_{2^i}} = \left(\frac{\frac{1}{2^i}}{\frac{1}{2^{i+1}}}\right)^{\alpha_{2^i}} = 2^{\alpha_{2^i}}$$
$$\alpha_{2^i} = \log_2\left(\frac{e_{2^i}}{e_{2^{(i+1)}}}\right).$$

Với $i = 2$, ta có công thức như sau:

$$\frac{e_4}{e_8} = \left(\frac{h_4}{h_8}\right)^{\alpha_4} = \left(\frac{1/4}{1/8}\right)^{\alpha_4} = 2^{\alpha_4} \Rightarrow \alpha_4 = \log_2\left(\frac{e_4}{e_8}\right),$$

trong đó

- $e_{2^i}, i = \overline{1,n}$: là sai số giữa các nghiệm gần đúng và nghiệm chính xác.
- α_{2^i} : là độ hội tụ của các nghiệm.

3.3. Lập trình tính toán (xem thêm phần Phụ lục bên dưới)

Chúng ta có bảng các giá trị hội tụ của các nghiệm gần đúng và nghiệm chính xác từ hai phương pháp trên là:

N	The errors of the explicit method and the exact solution	The order of the explicit and exact solution	The errors of the CN method and the exact solution	The order of the CN method and the exact solution
4	1.0978e-02	0		0
8	2.4678e-03	$\alpha_4 = 2.1533$	8.1877e-08	$\alpha_4 = 1.9746$
16	4.2216e-04	$\alpha_8 = 2.5474$	2.0728e-08	$\alpha_8 = 1.9819$
32	8.4166e-05	$\alpha_{16} = 2.3265$	5.3673e-09	$\alpha_{16} = 1.9493$
64			1.5224e-09	$\alpha_{32} = 1.8178$

trong đó:

- The errors of the explicit method and the exact solution: các sai số của các nghiệm theo phương pháp tường minh và nghiệm chính xác.

- The order of the explicit and exact solution: Độ hội tụ của các nghiệm theo phương pháp tường minh và nghiệm chính xác.
- The errors of the CN method and the exact solution: các sai số của của các nghiệm theo phương pháp Crank-Nicolson và nghiệm chính xác.
- The order of the CN method and the exact solution: Độ hội tụ của các nghiệm theo phương pháp Crank-Nicolson và nghiệm chính xác.

4. Kết luận

Trong phần này, chúng ta đã trình bày phương pháp sai phân hữu hạn cho PDEs trong Parabolic với dạng đơn giản nhất, đó là phương trình truyền nhiệt.

Bằng cách tính toán và biểu diễn bằng đồ thị theo các giá trị của h và k, chúng ta đã thấy được các giá trị khác nhau cũng như các đồ thị khác nhau của hàm u. Điều này chứng tỏ độ ổn định và độ hội tụ của nghiệm. Hơn nữa, chúng ta cũng có thể áp dụng một dạng khác của phương pháp sai phân hữu hạn, đó là phương pháp Crank- Nicolson để biểu diễn tính ổn định và tính hội tụ của nghiệm (do tính ổn định của phương pháp), và do đó chúng ta có thể sử dụng các giá trị lớn của k.

Phần này còn biểu diễn các sai số của nghiệm gần đúng và nghiệm chính xác trong hai phương pháp (tường minh và Crank-Nicolson) bằng các giá trị khác nhau của h và với giá trị cố định của k. Điều này cũng thể hiện được tính xấp xỉ của nghiệm gần đúng.

Xét về mặt giải tích, chúng ta không thể biết được nghiệm chính xác của hai phương pháp sai phân hữu hạn ở trên, quá trình hội tụ trong bảng trên cho biết sai số và độ hội tụ của các nghiệm trong hai phương pháp, mặc dù hai phương pháp này cho các kết quả khác nhau nhưng chúng luôn hội tụ về nghiệm chính xác.

Xét về mặt hình học, chúng ta biểu diễn kết quả của ba nghiệm bao gồm nghiệm gần đúng của phương pháp tường minh, phương pháp Crank-Nicolson và nghiệm chính xác trên cùng một đồ thị với các giá trị khác của h. trong không gian 2 chiều. Trong không gian ba chiều, chúng ta đã biểu diễn được hai đồ thị trong mỗi phương pháp và chúng cho ta thấy rõ dáng điệu của hình ảnh các đồ thị của các nghiệm.

Phương trình truyền nhiệt được sử dụng trong việc mô phỏng các hiện tượng vật lý và nó cũng thường dùng trong toán tài chính để mô hình hóa các sự lựa chọn. Một ứng dụng nổi tiếng của nó là phương trình vi phân của mô hình định giá Black–Scholes. Hơn thế nữa, phương trình PDE Parabolic có nhiều ứng dụng trong phương trình Diffusion, chuyển động Brownian, phương trình Schrödinger, v.v.

5. Phụ lục

5.1. Chương trình MATLAB 1: Phương pháp tường minh và nghiệm chính xác

```
function fdm_para(L,T,nT,nx)

% Matlab Program 1 : The explicit method and the exact solution
%L = 1.; % Length of space
%T = 0.25; % Length of time
%Parameters needed to solve the equation within the explicit method
         %Choose nT= 2^10. Number of time steps
dt = T/nT; %dt = 2^(-10);
%nx = 2^4; %Choose nx= 2^4. Number of space steps
dx = L/nx; %Change with dx = h = 1/4,1/8, . . .
s = (dx^2)/dt;
r = 2 + s;
sigma = dt/(dx^2) %Stability parameter (sigma = <1/2)
%Initial temperature of the wire:
%initilalize u
u = zeros(nx+1,nT+1);
u2 = zeros(nx+1,nT+1);
x = zeros(nx+1,1);
b = zeros(nx+1,1);
time = zeros(nT+1,1);
for i = 1:nx+1
   x(i) = (i-1)*dx;
   u(i,1) = u0(x(i));

end
% Temperature at the boundary (t=0)
for k = 1:nT+1
   u(1,k) = 0;
   u(nx+1,k) = 0.;
   time(k) = (k-1)*dt;

end
% Implementation of Finite Difference method by matrix form
A = zeros(nx-1,nx-1);
A(1,1) = 1-2*sigma;
A(1,2) = sigma;
A(nx-1,nx-2) = sigma;
A(nx-1,nx-1) = 1-2*sigma;
for i = 2:nx-2 % Matrix form
   A(i,i) = 1-2*sigma;
   A(i,i+1) = sigma;
   A(i,i-1) = sigma;
end
```

```
for k = 1:nT %Time Loop
   u(2:nx,k+1) = A*u(2:nx,k);
end

 %Implementation of the exact equation
for i = 1:nx+1
   for k=1:nT+1
      u2(i,k) = exact_u(x(i),time(k));
   end
end

%Graphical representation of the temperature at different selected
   times

% Plot explicit method in 2D
plot(x,u(:,nT),'-k','MarkerFaceColor','k'); hold on

%Plot the exact solution in 2D
plot(x,u2(:,nT),'-b','MarkerFaceColor','b'); hold on

xlabel('x')
ylabel('temperature')
legend({'Explicit method' 'Exact solution' },'location','NE');
title('The explicitmethod & the exact solution for h=1/32, at
   T=0.25')
hold off

% Plot explicit method in 3D
figure
mesh(x,time,u')
title('Temperature within the explicit method for h=1/32,at T=0.25')
xlabel('x')
ylabel('time')
zlabel('Temperature')

%Plot the exact solution in 3D
figure
mesh(x,time,u2')
title('Temperature within the exact solutions for h=1/32,at T=0.25')
xlabel('x')
ylabel('time')
zlabel('Temperature')
```

Nghiệm chính xác

```
function u2 = exact_u(x,t)

 u2 = exp(-(pi^2)*t)*sin(pi*x);

end
```

Trong đó, chúng ta sử dụng chương trình con để tính :

```
function u = u0(x)
% Initial condition
u = sin(pi*x);
```

5.2. Chương trình MATLAB 2: Phương pháp Crank-Nicolson và nghiệm chính xác

```
function cn_para(L,T,nT,nx)

%Matlab Program 2 : The Crank-Nicolson method and the exact solutions
%L = 1.; % Length of the wire
%T = 0.25; % Final time
% Parameters needed to solve the equation
          %Choose nT= 2^10. Number of time steps
dt = T/nT; %dt = 2^(-10); nT is fixed 2^10
%nx = 2^4; %Choose nx= 2^4. Number of space steps
dx = L/nx; %Change with dx =h = 1/4,1/8, . . .
s = (dx^2)/dt;
r = 2 + s;
% Initial temperature of the wire
% Initilalize u
u = zeros(nx+1,nT+1);
u2 = zeros(nx+1,nT+1);
x = zeros(nx+1,1);
b = zeros(nx+1,1);
time = zeros(nT+1,1);
for i = 1:nx+1
   x(i) = (i-1)*dx;
   u(i,1) = u0(x(i));

end
%Temperature at the boundary (t=0)
for k = 1:nT+1
   u(1,k) = 0;
   u(nx+1,k) = 0.;
   time(k) = (k-1)*dt;

end
 %Implementation of the exact equation
for i = 1:nx+1
   for k = 1:nT+1
      u2(i,k) = exact_u(x(i),time(k));
   end
```

```
end

%Implementation of the Crank - Nicolson method by matrix
M = zeros(nx-1,nx-1);
M(1,1) = r;
M(1,2) = -1;
M(nx-1,nx-2) = -1;
M(nx-1,nx-1) = r;
for i = 2:nx-2
   M(i,i) = r;
   M(i,i+1) = -1;
   M(i,i-1) = -1;
end

for k = 2:nT+1 %Time Loop
   u(2:nx,k) = M\(s*u(2:nx,k-1));
   error2 = max(abs(u2(2:nx,k) - u(2:nx,k)));
end
disp(error2);

%Graphical representation of the temperature at different selected
   times
figure
%Plot the exact solution in 2D
plot(x,u2(:,nT),'-k','MarkerFaceColor','k'); hold on

%Plot Crank -Nicolson method in 2D
plot(x,u(:,nT),'-r','MarkerFaceColor','r'); hold off

%Plot Crank -Nicolson method in 3D
figure
mesh(x,time,u')
title('Temperature within the Crank-Nicolson method for h=1/32,at
   T=0.25')
xlabel('x')
ylabel('time')
zlabel('Temperature')

%Plot the exact solution in 3D
figure
mesh(x,time,u2')
title('Temperature within the exact solutions for h=1/32,at T=0.25')
xlabel('x')
ylabel('time')
zlabel('Temperature')
```

Nghiệm chính xác

```
function u2 = exact_u(x,t)
```

```
 u2 = exp(-(pi^2)*t)*sin(pi*x);

end
```

Trong đó, chúng ta sử dụng chương trình con để tính

```
function u = u0(x)
% Initial condition
u = sin(pi*x);
```

Tài liệu

[1] W. Cheney., D. Kincaid. 2008. Numerical Mathematics and Computing, Sixth edition. Belmont. CA: Thomson, 582-624.

[2] E.K.P. Chong, S.H. Zak., 2001. An Introduction to Optimization, Second edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.

[3] R. J. Lopez. 2001. Advanced Engineering Mathematics. Addison Wesley.

[4] G.E. Forsythe., W.R.Wasow.1960. Finite Difference Methods for Partial Differential Equations. New York: John Wiley & Sons, Inc.

[5] G.F.D. Duff., D. Naylor. 1966. Differential Equations of Applied Mathematics. New York: John Wiley & Sons, Inc.

[6] G.F.D. Duff., D. Naylor. 1966. Differential Equations of Applied Mathematics. New York: John Wiley & Sons, Inc.

[7] R. J. LeVeque.2007. Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations. Philadelphia: SIAM.

[8] E.D. Rainville., P.E. Bedient., R.E. Bedient. 1997. Elementary Differential Equations, Eight edition. New Jersey: Prentice Hall. Inc.

[9] S.C. Chapra., 2012. Applied Numerical Methods with Matlab for Engineers and Scientists, Third edition. New York: McGraw-Hill.

[10] P.D.Lax., Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theoryof Shock Waves. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1973. ,October 8.

[11] B.L.Keyfitz., Self-similar solutions of two-dimensional conservation laws. Journal of Hyperbolic Differential Equations, 2004.

[12] W. Boyce and R.D. Prima., Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. John Wiley & Sons Ltd., Hoboken, N.J., Eight edition, 2005.

[13] L.C. Evans. , Partial Differential Equations, volume 19 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, Second edition, 2010.

[14] R. Haberman., Applied Partial Differential Equations. Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, N.J., Fourth edition, 2004.

[15] T. Myint-U, L. Debnath., Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. Birkhauser Boston Inc., Boston, MA, Fourth edition, 2007.

[16] F. John., Partial Differential Equations, volume 1 of Applied Mathematica Sciences. Springer-Verlag, New York, Fourth edition, 1982.

[17] M. A. Pinsky. Partial Differential Equations and Boundary Value Problems with Applications. Waveland Press Inc., Prospect Heights, Illinois, Third edition, 2003.

[18] I. P. Stavroulakis, S. A. Tersian. Partial Differential Equations. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, second edition, 2004. An introduction with Mathematica and MAPLE.

[19] W. A. Strauss. Partial Differential Equations. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, Second edition, 2008.

[20] S.Attaway., MATLAB: A Practical Introduction to Programming and Problem Solving, Elsevier Science, Burlington, MA, 2009.

[21] D. Hanselma , B. Littlefield., Mastering MATLAB 7, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2005.

[22] C. B. Moler., Numerical Computing with MATLAB, SIAM, Philadelphia, 2004.

[23] W. J. Palm, A Concise Introduction to MATLAB, McGraw-Hill, New York, 2007.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH TRONG CÁC BÀI TOÁN OLYMPIC

Kiều Đình Minh
(*Trường THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ*)

GIỚI THIỆU

Giải tích là một ngành toán học rộng lớn và có nhiều ứng dụng mạnh mẽ. Trong chương trình trung học phổ thông chúng ta mới chỉ làm quen với phần mở đầu của giải tích thực. Tuy nhiên việc vận dụng một số kiến thức ít ỏi đó vào giải các bài toán thi Olympic cũng thật thú vị và hiệu quả. Trong bài viết này chúng tôi chủ yếu tập trung khai thác định nghĩa của giới hạn dãy, giới hạn hàm trong việc giải quyết các bài toán về dãy số và số học. Các bài toán ứng dụng đạo hàm đã quá quen thuộc, các bài toán về phương trình hàm, đa thức, bất đẳng thức cũng đã được nêu nhiều trong các tài liệu mà vì thế không được nhắc lại ở đây.

1. Các bài toán đại số

Ví dụ 1. *Cho dãy số $(a_n), (b_n)$ xác định bởi*

$$a_n = \ln\left(2n^2+1\right) - \ln\left(n^2+n+1\right), n = 1, 2, \ldots$$
$$b_n = \ln\left(2n^2+1\right) + \ln\left(n^2+n+1\right), n = 1, 2, \ldots$$

a) *Chứng minh rằng chỉ có hữu hạn số n sao cho $\{a_n\} < \frac{1}{2}$.*

b) *Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số n sao cho $\{b_n\} < \frac{1}{2016}$.*

Lời giải. a) Dễ thấy $1 \leqslant \frac{2n^2+1}{n^2+n+1} < 2, \forall n = 1, 2, \ldots$ Từ đó suy ra $0 \leqslant a_n < \ln 2 < 1$ và $[a_n] = 0$. Với kết quả này, ta có $\{a_n\} = a_n$ và

$$\lim\{a_n\} = \lim a_n = \lim \ln\frac{2n^2+1}{n^2+n+1} = \ln 2.$$

Do đó tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ để $\{a_n\} > \ln 2 - \frac{1}{1992}, \forall n \geqslant n_0$. Bây giờ nếu có vô hạn số n để $\{a_n\} < \frac{1}{2}$, ta chọn $n_1 > n_0$ là một trong các số đó. Khi đó, theo các lý luận ở trên, ta có

$$\frac{1}{2} > \{a_{n_1}\} > \ln 2 - \frac{1}{1992} \Rightarrow \frac{1}{1992} > \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Mâu thuẫn này cho ta kết quả cần chứng minh.

b) Dễ thấy (b_n) tăng và $\lim b_n = +\infty$. Ngoài ra ta cũng có

$$\lim (b_n - b_{n-1}) = \lim \ln \frac{(2n^2+1)(n^2+n+1)}{(2n^2-4n+3)(n^2-n+1)} = 0.$$

Trở lại bài toán, giả sử tồn tại hữu hạn n để $\{b_n\} < \frac{1}{2016}$. Khi đó, ta thấy tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ để $\{b_n\} \geqslant \frac{1}{2016}$, với mọi $n \geqslant n_0$.

Do $\lim (b_n - b_{n-1}) = 0$ nên tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}^*$ đủ lớn để $b_n - b_{n-1} < \frac{1}{2016}$, với mọi $n \geqslant n_1$. Vì (b_n) tăng và dần về vô hạn nên ta thấy tồn tại vô số các số $n > \max\{n_0, n_1\}$ để $[b_n]-[b_{n-1}] = 1$.

Xét các số n như thế, từ bất đẳng thức ở trên, ta suy ra

$$[b_n] - [b_{n-1}] + \{b_n\} - \{b_{n-1}\} < \frac{1}{2016},$$

hay $\{b_{n-1}\} > \{b_n\} + \frac{2015}{2016}$. Do $\{b_n\} \geqslant \frac{1}{2016}$,nên $\{b_{n-1}\} > 1$. Mâu thuẫn nhận được cho ta điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán trên thể hiện sự vận dụng sâu sắc định nghĩa của giới hạn dãy. Mấu chốt của ý b) là phát hiện ra giới hạn dạng $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha b_n - b_{n-1})$, giới hạn này còn gặp nhiều trong các bài toán khác.

Ví dụ 2. *Giả sử $0 < \alpha \leqslant 2$ và $a_1, a_2, \ldots,$ là dãy các số thực dương thỏa mãn*

$$a_n^\alpha \geqslant a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1, \forall n \geqslant 2.$$

Chứng minh rằng có một số thực c sao cho $a_n \geqslant nc, \forall n \geqslant 1$.

Lời giải. Ta có $a_n \geqslant a_1^{1/\alpha}, \forall n \geqslant 2$. Do đó $a_n^\alpha \geqslant (n-2)\, a_1^{1/\alpha} + a_1, \forall n \geqslant 2$. Vậy $a_n \to +\infty$. Do đó, tồn tại n_0 sao cho $a_n \geqslant 1, \forall n > n_0$.

Lấy $c = \min\left\{\frac{1}{4}, a_1, \frac{a_2}{2}, \ldots, \frac{a_{n_0}}{n_0}\right\}$. Xét bất đẳng thức

$$a_n \geqslant cn,\ \ \forall n \geqslant 1. \tag{1}$$

Rõ ràng (1) đúng với mọi $n \leqslant n_0$. Xét $n > n_0$. Giả sử (1) đúng với mọi $k \leqslant n$. Ta chứng minh (1) cũng đúng cho $k = n+1$. Thật vậy do $\frac{n}{2(n+1)} \geqslant \frac{1}{4} \geqslant c$, cho nên

$$a_{n+1}^2 \geqslant a_{n+1}^\alpha \geqslant a_n + \cdots + a_1 \geqslant \frac{n(n+1)}{2} c \geqslant (n+1)^2 c^2.$$

Suy ra $a_{n+1} \geqslant (n+1)\, c$. □

Ví dụ 3. *Cho $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ là một dãy vô hạn số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất $n \geqslant 1$ sao cho*

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant a_{n+1}.$$

Nếu bỏ giả thiết nguyên dương thì kết quả còn đúng nữa không ?

Lời giải. Xét dãy $x_n = na_n - \sum_{i=0}^{n} a_i$. Ta có

$$x_0 = x_1 = -a_0,$$
$$x_{n+1} - x_n = n(a_{n+1} - a_n) > 0,$$
$$x_n = -a_0 + \sum_{i=1}^{n}(a_n - a_i) \geqslant -a_0 + \sum_{i=1}^{n}(n-i) = \frac{n(n-1)}{2} - a_0 \to +\infty.$$

Do đó tồn tại duy nhất n thỏa mãn $x_n < 0 \leqslant x_{n+1}$, suy ra điều phải chứng minh. Nếu bỏ giả thiết nguyên dương thì kết quả không còn đúng nữa, chẳng hạn $a_n = 2 - \frac{1}{2^n}$. □

Nhận xét. Ta chú ý rằng dãy số một hàm số đặc biệt. Trong bài toán trên ta đã sử dụng định lý giá trị trung gian để có khẳng định điều cần chứng minh.

Ví dụ 4. *Cho $a \in \mathbb{R}, |a| < 1$. Tìm tất cả các dãy số thực (x_n), $n = 1, 2, \ldots$ thỏa mãn các điều kiện sau*

a) $|x_n| < 1$.

b) $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n+1}^2 + a^2\right)$.

Lời giải. Vì $|x_{n+1}| < 1$ nên theo b) ta có $|x_n| \leqslant \frac{a^2+1}{2}$. Đặt $\beta = \frac{a^2+1}{2}$. Do $|a| < 1$ nên $\beta < 1$, suy ra $|x_n| \leqslant \beta$. Mặt khác với mọi $n \geqslant 1$, ta có

$$\begin{aligned}|x_{n+1} - x_n| &= \left|\frac{x_{n+2}^2 + a^2}{2} - \frac{x_{n+1}^2 + a^2}{2}\right| = |x_{n+2} - x_{n+1}|\left|\frac{x_{n+2} + x_{n+1}}{2}\right| \\ &\leqslant |x_{n+2} - x_{n+1}|\left(\frac{|x_{n+2}|}{2} + \frac{|x_{n+1}|}{2}\right) \\ &\leqslant \beta\,|x_{n+2} - x_{n+1}|.\end{aligned}$$

Bằng quy nạp theo k, ta có với mọi $k \in \mathbb{N}$ thì

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant \beta^k\,|x_{n+k+1} - x_{n+k}| \leqslant \beta^k\left(|x_{n+k+1}| + |x_{n+k}|\right) \leqslant \beta^k \cdot 2\beta = 2\beta^{k+1}.$$

Vì $0 < \beta < 1$ nên cho $k \to +\infty$ thì $2\beta^{k+1} \to 0$. Vậy ta có $|x_{n+1} - x_n| = 0$ suy ra $x_{n+1} = x_n$. Thay vào điều kiện b) ta có

$$x_n = \frac{\left(x_n^2 + a^2\right)}{2}, \forall n \geqslant 1,$$
$$\Leftrightarrow x_n^2 - 2x_n + a^2 = 0.$$

Do $|x_n| < 1$, nên $x_n = 1 - \sqrt{1 - a^2}$. □

Nhận xét. Bài toán tinh tế ở chỗ khi cho $k \to +\infty$ thì với mỗi n cố định ta khẳng định được $|x_{n+1} - x_n| = 0$ suy ra $x_{n+1} = x_n, \forall n \geqslant 1$.

Ví dụ 5. *Xét dãy số thực vô hạn $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ thỏa mãn điều kiện*

$$|x_{m+n} - x_m - x_n| < \frac{1}{m+n}, \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng dãy này là một cấp số cộng.

Lời giải. Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned}|(x_{n+1}-x_n)-(x_{k+1}-x_k)| &= |(x_{n+k+1}-x_n-x_{k+1})-(x_{n+k+1}-x_{n+1}-x_k)|\\ &\leqslant |x_{n+k+1}-x_n-x_{k+1}|+|x_{n+k+1}-x_{n+1}-x_k|\\ &< \frac{2}{n+k+1}, \forall k,n \in \mathbb{N}^*.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}|(x_{n+1}-x_n)-(x_{k+1}-x_k)| &\leqslant |(x_{n+1}-x_n)-(x_{m+1}-x_m)|+|(x_{m+1}-x_m)-(x_{k+1}-x_k)|\\ &< \frac{2}{m+n+1}+\frac{2}{m+k+1}<\frac{4}{m}, \forall m \in \mathbb{N}^*.\end{aligned}$$

Do $\lim\limits_{m\to+\infty} \frac{4}{m}=0$ nên

$$|(x_{n+1}-x_n)-(x_{k+1}-x_k)|=0, \forall k,n \in \mathbb{N}^*,$$

suy ra

$$x_{n+1}-x_n=x_{k+1}-x_k, \forall k,n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ là một cấp số cộng. □

Nhận xét. Từ bất đẳng thức

$$\begin{aligned}|(x_{n+1}-x_n)-(x_{k+1}-x_k)| &\leqslant |(x_{n+1}-x_n)-(x_{m+1}-x_m)|+|(x_{m+1}-x_m)-(x_{k+1}-x_k)|\\ &< \frac{2}{m+n+1}+\frac{2}{m+k+1}<\frac{4}{m}, \forall m \in \mathbb{N}^*.\end{aligned}$$

Cố định k rồi cho $n\to+\infty$ ta được dãy số $(x_{n+1}-x_n)$ có giới hạn là $x_{k+1}-x_k$. Nhưng k là số bất kỳ, mà giới hạn của dãy số nếu tồn tại thì duy nhất nên hiệu $x_{k+1}-x_k$ không phụ thuộc vào k. Nói cách khác dãy đã cho là một cấp số cộng.

Ví dụ 6. *Chứng minh rằng không tồn tại dãy vô hạn các số thực (x_n), $n=1,2,\ldots$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

a) $|x_n| \leqslant 0,666$.

b) $|x_n-x_m| \geqslant \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{m(m+1)}, \forall m,n \in \mathbb{N}^*, m\neq n$.

Lời giải. Giả sử tồn tại dãy (x_n) thỏa mãn đề bài. Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ ta sắp xếp $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thành dãy không giảm $x_{i_1}\leqslant x_{i_2}\leqslant\cdots\leqslant x_{i_n}$ ở đó $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ là một hoán vị của $(1,2,\ldots,n)$. Đặt $A=0,666$, ta có

$$\begin{aligned}2A \geqslant x_{i_n}-x_{i_1} &= (x_{i_n}-x_{i_{n-1}})+(x_{i_{n-1}}-x_{i_{n-2}})+\cdots+(x_{i_2}-x_{i_1})\\ &\geqslant \left[\frac{1}{i_n(i_n+1)}+\frac{1}{i_{n-1}(i_{n-1}+1)}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{i_2(i_2+1)}+\frac{1}{i_1(i_1+1)}\right]\\ &= 2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}-\frac{1}{i_n(i_n+1)}-\frac{1}{i_1(i_1+1)}\\ &\geqslant 2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\\ &= 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}-\frac{2}{n+1}.\end{aligned}$$

Cho $n \to +\infty$ thì $\frac{4}{3} - \frac{2}{n+1} \to \frac{4}{3}$ mà $\frac{4}{3} > 1,332 = 2A$. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ không tồn tại dãy vô hạn số thực (x_n) thỏa mãn các điều kiện của đề bài. □

Ví dụ 7. *Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $|x_n - x_m| > \frac{1}{n}, \forall m, n \in \mathbb{N}^*, n < m$. Chứng minh rằng dãy (x_n) không bị chặn.*

Lời giải. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại số dương M sao cho $|x_n| < M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Xét khoảng

$$(*) = \left(-M - \frac{1}{2}, M + \frac{1}{2}\right),$$

chứa tất cả các số hạng của x_n.

Với mỗi x_n, ta xét $\sigma_n = \left(x_n - \frac{1}{2n}, x_n + \frac{1}{2n}\right)$ là $\frac{1}{2n}$ - lân cận của x_n. Các σ_n đôi một không giao nhau và cùng là tập con của $(*)$ nên tổng các độ dài của chúng không lớn hơn $2M + 1$ là độ dài của $(*)$. Mặt khác tổng các độ dài của chúng là $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \to +\infty$. Điều vô lý này chứng tỏ rằng dãy (x_n) là không bị chặn. □

2. Các bài toán số học

Trước hết, ta nhắc lại tính chất quen thuộc và quan trọng sau: *Nếu dãy số nguyên (a_n) hội tụ về a thì tồn tại n_0 sao cho với mọi $n \geqslant n_0$ thì $a_n = a$.*

Thật vậy, hiển nhiên $a \in \mathbb{Z}$. Theo giả thiết $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, ta suy ra

$$\exists n_0 : |a_n - a| < \frac{1}{2}, \forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| = 0, \forall n > n_0 \Rightarrow a_n = a, \forall n > n_0.$$

Ví dụ 8. *Cho dãy số nguyên (a_n), $n = 0, 1, 2, \ldots$ thỏa mãn*

$$0 \leqslant a_n + 7a_{n+1} + 10a_{n+2} \leqslant 9.$$

Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $n \geqslant n_0$ thì $a_n = 0$.

Lời giải. Đặt $x_k = \min\{a_k, a_{k+1}, \ldots\}$, $y_k = \max\{a_k, a_{k+1}, \ldots\}$ thì (x_k) là dãy tăng, (y_k) là dãy giảm và $x_k \leqslant y_k, \forall k$. Dãy (a_n) bị chặn nên hai dãy $(x_k), (y_k)$ cũng bị chặn. Do đó cả hai dãy này đều hội tụ.

Giả sử $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$. Do $x_k, y_k \in \mathbb{Z}$ nên tồn tại n_0 sao cho với mọi $n \geqslant n_0$ thì $x_n = x$, $y_n = y$. Tồn tại $n \geqslant n_0$ sao cho

$$a_{n+2} = y,\ a_n, a_{n+1} \geqslant x \Rightarrow 8x + 10y \leqslant 9. \tag{2}$$

Tương tự, tồn tại $m \geqslant n_0$ sao cho

$$a_{m+2} = x,\ a_m, a_{m+1} \leqslant y \Rightarrow 10x + 8y \geqslant 0. \tag{3}$$

Từ (2), (3) và $x, y \in \mathbb{Z}$ suy ra $x = y = 0$. Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. □

Ví dụ 9. *Cho a và b là các số nguyên sao cho $a \cdot 2^n + b$ là một số chính phương với mọi số nguyên dương n. Chứng minh rằng $a = 0$.*

Lời giải. Giả sử rằng $a \neq 0$. Thế thì $a > 0$, vì ngược lại $a < 0$ thì với n lấy các giá trị lớn số $a \cdot 2^n + b$ là âm.

Từ giả thiết, tồn tại một dãy số nguyên dương $(x_n)_{n \geqslant 1}$ sao cho $x_n = \sqrt{a \cdot 2^n + b}, \forall n$. Tính toán trực tiếp chỉ ra rằng

$$\lim_{n \to +\infty} (2x_n - x_{n+2}) = 0.$$

Suy ra tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho $2x_n = x_{n+2}, \forall n \geqslant n_0$. Nhưng $2x_n = x_{n+2}$ là tương đương với $b = 0$. Khi đó a và $2a$ đều là các số chính phương, điều này là không thể với $a \neq 0$. Vậy giả sử của ta là sai, do đó $a = 0$. □

Nhận xét. Đây là bài toán hay và rất khó. Một lần nữa ta thấy mấu chốt là phát hiện ra giới hạn dạng $\lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha b_n - b_{n-1})$.

Ví dụ 10. *Cho A, B, C là 3 số nguyên sao cho với mọi số nguyên n, thì $f(n) = An^2 + Bn + C$ là bình phương của một số nguyên. Chứng tỏ rằng tồn tại hai số nguyên a, b sao cho*

$$f(n) = (an + b)^2, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Lời giải. Nếu $A = 0$, thì $f(n) = Bn + C$ chỉ là bình phương của một số nguyên, với mọi $n \in \mathbb{Z}$, khi $B = 0$ và $C = c^2, c \in \mathbb{Z}$.

Xét $A \neq 0$. Khi đó ta phải có $A > 0$, vì nếu n đủ lớn thì $f(n)$ cùng dấu với A. Với mỗi $n \in \mathbb{Z}$, đặt $An^2 + Bn + C = M_n^2$, với M_n là một số nguyên dương khi n đủ lớn. Hiển nhiên

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{M_n}{n} = \sqrt{A}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
(M_{n+1} - M_n)(M_{n+1} + M_n) &= M_{n+1}^2 - M_n^2 \\
&= \left[A(n+1)^2 + B(n+1) + C\right] - \left(An^2 + Bn + C\right) \\
&= 2An + A + B.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$M_{n+1} - M_n = \frac{2An + A + B}{M_{n+1} + M_n} = \frac{2A + \frac{A+B}{n}}{\frac{M_{n+1} + M_n}{n}}.$$

Thành thử ta được $\lim\limits_{n \to +\infty} (M_{n+1} - M_n) = \sqrt{A}$. Nhưng $M_{n+1} - M_n$ chỉ nhận những giá trị nguyên. Suy ra $\sqrt{A} = a$ là một số nguyên dương và với n đủ lớn ta có

$$\begin{aligned}
M_{n+1} - M_n = a \Rightarrow M_{n+1} = M_n + a &\Rightarrow M_{n+1}^2 = M_n^2 + 2aM_n + a^2 \\
&\Rightarrow 2aM_n + a^2 = M_{n+1}^2 - M_n^2 = 2a^2 n + a^2 + B \\
&\Rightarrow 2aM_n = 2a^2 n + B.
\end{aligned}$$

Như vậy B chia hết cho $2a$, tức $B = 2ab$, suy ra $M_n = an + b$, hay

$$An^2 + Bn + C = M_n^2 = (an + b)^2.$$

Tuy rằng ta có hệ thức này với n đủ lớn, nhưng theo tính chất của các đa thức, ta thấy nó đúng với mọi số nguyên n. □

Tiếp theo, ta đến với thí dụ sau tổng quát hơn thí dụ trên.

Ví dụ 11. *Cho $u, v, a, b, c \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $u^2 < v$ và dãy số (x_n) xác định bởi*

$$x_n = au^n + bv^n + c.$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có vô số số hạng không là số chính phương.

Lời giải. Giả sử phản chứng. Tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geqslant n_0$, tồn tại $a_n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $a_n^2 = au^n + bv^n + c$. Suy ra

$$\frac{a_n^2}{v^n} = a\left(\frac{u}{v}\right)^n + b + \frac{c}{v^n}.$$

Cho $n \to +\infty$ thì $\frac{a_n^2}{v^n} \to b$ (vì $u^2 < v \Rightarrow \frac{u}{v} < 1$), suy ra $\frac{a_n}{v^{\frac{n}{2}}} \to \sqrt{b}$. Ta có

$$a_n^2 - bv^n = au^n + c,$$

$$\Leftrightarrow \left(a_n - \sqrt{b}v^{\frac{n}{2}}\right)\left(a_n + \sqrt{b}v^{\frac{n}{2}}\right) = au^n + c,$$

$$\Rightarrow \left(a_n - \sqrt{b}v^{\frac{n}{2}}\right) \cdot \frac{a_n + \sqrt{b}v^{\frac{n}{2}}}{u^n} = a + \frac{c}{u^n}.$$

Vì $\frac{v}{u^2} > 1$ cho nên

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n + \sqrt{b}v^{\frac{n}{2}}}{u^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{v^{\frac{n}{2}}\left(\frac{a_n}{v^{\frac{n}{2}}} + \sqrt{b}\right)}{u^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{v^{\frac{n}{2}} \cdot 2\sqrt{b}}{u^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{v}{u^2}\right)^n 2\sqrt{b} = +\infty$$

Mà $a + \frac{c}{u^n} \to a$, khi $n \to +\infty$ nên suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a_n - \sqrt{b}v^{\frac{n}{2}}\right) = 0$. Suy ra

$$\lim_{n\to+\infty}\left(va_n - \sqrt{b}v^{\frac{n+2}{2}}\right) = 0.$$

Lại do $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a_{n+2} - \sqrt{b}v^{\frac{n+2}{2}}\right) = 0$. Từ đó $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+2} - va_n) = 0$. Mặt khác $a_n, v \in \mathbb{N}^*$ nên suy ra tồn tại số nguyên dương n_1 sao cho $a_{n+2} - va_n = 0$ với mọi $n \geqslant n_1$. Ta có

$$a_{n+2}^2 = au^{n+2} + bv^{n+2} + c,$$

mà $a_{n+2}^2 = v^2a_n^2 = au^nv^2 + bv^{n+2} + cv^2$. Suy ra

$$au^{n+2} + c - au^nv^2 - cv^2 = 0,$$

$$\Leftrightarrow au^n\left(u^2 - v^2\right) = cv^2 - c \Rightarrow u^2 - v^2 = \frac{cv^2 - c}{au^n}, \forall n \geqslant n_1.$$

Cho $n \to +\infty$ ta có □

Ví dụ 12. *Giả sử b là một số nguyên lớn hơn 5. Với mỗi số nguyên dương n, xét số*

$$x_n = \underbrace{11\cdots1}_{n-1}\underbrace{22\cdots2}_{n}5,$$

được viết dưới dạng cơ số b. Chứng minh rằng "tồn tại số nguyên dương M sao cho với mọi số nguyên n lớn hơn M, số x_n là số chính phương khi và chỉ khi $b = 10$".

Lời giải. Giả sử rằng $b \geqslant 6$ có tính chất thỏa mãn bài toán. Ta có

$$\begin{aligned} x_n &= 5 + 2\left(b + b^2 + \cdots + b^n\right) + \left(b^{n+1} + \cdots + b^{2n-1}\right) \\ &= 5 + 2b\left(1 + b + \cdots + b^{n-1}\right) + b^{n+1}\left(1 + b + \cdots + b^{n-2}\right) \\ &= \frac{b^{2n} + b^{n+1} + 3b - 5}{b-1}. \end{aligned}$$

Xét dãy số $y_n = (b-1)\,x_n$. Từ định nghĩa của x_n ta có $y_n = b^{2n} + b^{n+1} + 3b - 5$. Khi đó $y_n y_{n+1} = (b-1)^2 x_n x_{n+1}$ là số chính phương với mọi $n > M$. Đặt $z_n = \sqrt{x_n}$. Từ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b^{2n}}{(b-1)x_n} = 1$, ta suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b^n}{z_n} = \sqrt{b-1}$. Hơn nữa từ

$$(bz_n + z_{n+1})(bz_n - z_{n+1}) = b^2x_n - x_{n+1} = b^{n+2} + 3b^2 - 2b - 5.$$

Ta có

$$\lim_{n\to+\infty}(bz_n - z_{n+1}) = \frac{b\sqrt{b-1}}{2}.$$

Từ z_n là số nguyên với mọi $n \geqslant M$, ta có $bz_n - z_{n+1} = \frac{b\sqrt{b-1}}{2}$ với n đủ lớn. Do đó $b-1$ là số chính phương và hơn nữa b chia hết $2z_{n+1}$ với mọi n đủ lớn. Điều này dẫn đến $b \mid 10$. Do đó chỉ có thể $b = 10$. □

Ví dụ 13. *Ta nói số nguyên t là số tam giác nếu $t = \frac{n(n+1)}{2}$ với số nguyên dương n. Tìm tất cả cặp số nguyên (a, b) có tính chất với mọi số nguyên t thì t là số tam giác khi và chỉ khi $at + b$ là số tam giác.*

Lời giải. Đầu tiên ta có nhận xét "số nguyên t là số tam giác khi và chỉ khi $8t + 1$ là số chính phương lẻ, $8t + 1 \geqslant 9$."

Giả sử cặp số nguyên (a, b) thỏa mãn t là số tam giác khi và chỉ khi $at + b$ là số tam giác. Ta sẽ chứng minh $a = 1, b = 0$ nghĩa là cặp số nguyên duy nhất thỏa mãn tính chất trên là $(1, 0)$.

Ta có $8(at + b) + 1 = a(8t + 1) + c$, trong đó kí hiệu $c = 8b + 1 - a$. Do đó tính chất trên tương đương với: Với mọi $u \in \mathbb{Z},\ u \equiv 1 \pmod 8$, u là số chính phương lẻ, $u \geqslant 9$ khi và chỉ khi $au + c$ là số chính phương lẻ

$$au + c \geqslant 9. \tag{4}$$

Ta thấy ngay $a > 0$, vì nếu $a < 0$ thì tồn tại số chính phương lẻ $u \geqslant 9$ mà $au + c < 0$, và nếu $a = 0$, lấy $u = 9$ suy ra c là số chính phương lẻ, $c \geqslant 9$, khi đó $au + c = c$ là chính phương lẻ với mọi u dẫn đến tính chất (4) sai.

Xét $v \in \mathbb{N}^*, v$ lẻ, $v \geqslant 3$. Giả sử $t_v, t_{v+2} \in \mathbb{N}^*$, đều là số nguyên lẻ, đều lớn hơn 2 và thỏa mãn

$$\begin{cases} av^2 + c = t_v^2 \\ a(v+2)^2 + c = t_{v+2}^2 \end{cases} \tag{5}$$

Từ $a > 0$, ta có $\lim\limits_{v \to +\infty} t_v = \lim\limits_{v \to +\infty} t_{v+2} = +\infty$. Do đó $\lim\limits_{v \to +\infty} \left(t_v + \sqrt{a}v\right) = +\infty$. Nhưng $c = \left(t_v + \sqrt{a}v\right)\left(t_v - \sqrt{a}v\right)$. Suy ra

$$\lim_{v \to +\infty} \left(t_v - \sqrt{a}v\right) = 0. \tag{6}$$

Bởi vậy

$$\lim_{v \to +\infty} (t_{v+2} - t_v) = \lim_{v \to +\infty} \left[\left(t_{v+2} - \sqrt{a}\,(v+2)\right) - \left(t_v - \sqrt{a}v\right) + 2\sqrt{a}\right] = 2\sqrt{a}. \tag{7}$$

Chú ý $t_{v+2} - t_v,\ \ v = 3, 5, 7, \ldots$ là dãy các số nguyên nên từ (7) suy ra trừ một số hữu hạn số v thì $t_{v+2} - t_v\ = 2\sqrt{a}$. Hệ quả là $\sqrt{a} \in \mathbb{N}^*$. Kết hợp với (6) và nhận xét rằng nếu $t_v - \sqrt{a}v \neq 0$ thì $\left|t_v - \sqrt{a}v\right| \geqslant 1$ ta nhận được $c = 0$. Tức là $b = \frac{a-1}{8}$, mà theo giả thiết thì b nguyên nên a là số chính phương lẻ. Nhưng nếu $a \geqslant 3^2$ thì (4) sai khi $u = 1$. Vậy $a = 1, b = 0$. □

Ví dụ 14. *Cho $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^+$ thỏa mãn có ít nhất một số trong chúng không nguyên. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương n mà*

$$\gcd\left(n, \lfloor a_1 n\rfloor + \lfloor a_2 n\rfloor + \cdots + \lfloor a_k n\rfloor\right) = 1.$$

Lời giải. Giả sử phản chứng. Không tồn tại vô hạn số nguyên dương n thỏa mãn đề bài. Suy ra tồn tại số nguyên dương n_0 mà với mọi $n \geqslant n_0$ thì

$$\gcd\left(n, \lfloor a_1 n\rfloor + \lfloor a_2 n\rfloor + \cdots + \lfloor a_k n\rfloor\right) > 1.$$

Cho $n = p_i$ là số nguyên tố tùy ý, ta có

$$\lfloor a_1 p_i\rfloor + \lfloor a_2 p_i\rfloor + \cdots + \lfloor a_k p_i\rfloor \,\vdots\, p_i,$$

suy ra tồn tại số nguyên x_i để

$$\lfloor a_1 p_i\rfloor + \lfloor a_2 p_i\rfloor + \cdots + \lfloor a_k p_i\rfloor = x_i p_i,$$

hay

$$p_i\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_k\right) = x_i p_i + \{a_1 p_i\} + \cdots + \{a_k p_i\},$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_k - x_i = \frac{\{a_1 p_i\} + \{a_2 p_i\} + \cdots + \{a_k p_i\}}{p_i}.$$

Vì $0 < \left\{a_j p_i\right\} < 1, \forall j = \overline{1,k}$, suy ra

$$0 < a_1 + a_2 + \cdots + a_k - x_i < \frac{k}{p_i}.$$

Cho $i \to +\infty$, ta có $\lim\limits_{i \to +\infty} x_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$. Mà $x_i \in \mathbb{N}^*, \forall i$ nên suy ra

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \in \mathbb{N}^*,$$

và tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = x_i, \forall i \geqslant n_1.$$

Do đó

$$\{a_1 p_i\} + \{a_2 p_i\} + \cdots + \{a_k p_i\} = 0, \forall i \geqslant n_1,$$
$$\Rightarrow \{a_1 p_i\} = \{a_2 p_i\} = \cdots = \{a_k p_i\} = 0.$$

Suy ra a_j có dạng $\frac{b_j}{p_i}, \forall i \geqslant n_0, b_j \in \mathbb{N}^*$. Mà p_i là số nguyên tố nên $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{N}^*$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. □

Ví dụ 15. *Tìm tất cả các đơn ánh $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn*

$$f(f(n)) \leqslant \frac{f(n) + n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải. Cố định $a \in \mathbb{N}^*$. Đặt

$$\underbrace{f(f(\cdots f(a)))}_{k} = a_k.$$

Ở giả thiết, cho $n = u_k$, ta có $u_{k+2} \leqslant \frac{u_{k+1}+u_k}{2}$. Đặt $A_k = \max\{u_{k+1}, u_k\}$, $B_k = \min\{u_{k+1}, u_k\}$ thì $u_{k+2} \leqslant \frac{u_{k+1}+u_k}{2} \leqslant A_k$, suy ra $\max\{u_{k+1}, u_{k+2}\} \leqslant A_k \Rightarrow A_{k+1} \leqslant A_k$. Mà $A_k \geqslant 0, \forall k$ nên tồn tại $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k = A$.

Nếu tồn tại vô số i sao cho $u_{i+1} = B_{i+1}$ thì

$$u_{i+2} \leqslant \frac{B_{i+1} + u_i}{2} \leqslant \frac{B_{i+1} + A_i}{2},$$

hay $A_{i+1} \leqslant \frac{B_{i+1}+A_i}{2}$.

Do $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k = A$ nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $|A_k - A| < \varepsilon, \forall k > N$. Cho $i > N$, ta có

$$A - \varepsilon < A_{i+1} \leqslant \frac{B_{i+1} + A_i}{2} < \frac{B_{i+1} + A + \varepsilon}{2},$$

suy ra

$$2A - 2\varepsilon < B_{i+1} + A + \varepsilon,$$
$$\Rightarrow A - 3\varepsilon < B_{i+1} \leqslant A_{i+1} < A + \varepsilon < A + 3\varepsilon,$$
$$\Rightarrow |B_{i+1}\_A| < 3\varepsilon, \forall i > N.$$

Do đó $\lim\limits_{i\to+\infty} B_{i+1} = A$. Mà (A_k) là dãy số nguyên nên tồn tại $T \in \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện $A_k = B_k, \forall k > T$. Hay

$$u_{k+1} = u_k \Rightarrow f(u_k) = f(u_{k-1}) \Rightarrow u_k = u_{k-1} = \cdots = u_1 \Rightarrow f(a) = a.$$

Thử lại thỏa mãn.

Nếu tồn tại hữu hạn i sao cho $u_{i+1} = B_{i+1}$ thì suy ra tồn tại vô số i sao cho $u_{i+2} = B_{i+1}$. Tức là tồn tại $T \in \mathbb{N}$ sao cho $u_{i+2} = B_{i+1}, \forall i > T \Rightarrow u_{i+2} < u_{i+1}, \forall i > T$, điều này vô lý vì (u_n) là dãy số nguyên dương. Tóm lại: $f(a) = a, \forall a \in \mathbb{N}^*$. □

Ví dụ 16. *Giả sử a, b là các số nguyên dương sao cho $a \mid b^2, b^3 \mid a^4, a^5 \mid b^6, b^7 \mid a^8, \ldots$ Chứng minh rằng $a = b$.*

Lời giải. Từ giả thiết $a \mid b^2, b^3 \mid a^4, a^5 \mid b^6, b^7 \mid a^8, \ldots$ ta có

$$a^{4n+1} \mid b^{4n+2}, \forall n \in \mathbb{N},$$

và $b^{4n+3} \mid a^{4n+4}, \forall n \in \mathbb{N}$. Gọi $v_p(a)$ và $v_p(b)$ lần lượt là số mũ cao nhất của số nguyên tố p trong phân tích a, b thành thừa số nguyên tố tương ứng.

Khi đó để chứng minh $a = b$ ta sẽ chỉ cần chứng minh $v_p(a) = v_p(b)$. Từ giả thiết $a^{4n+1} \mid b^{4n+2}, \forall n \in \mathbb{N}$, ta có

$$v_p(a) \leqslant \frac{4n+2}{4n+1} v_p(b), \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow v_p(a) \leqslant \lim_{n \to +\infty} \frac{4n+2}{4n+1} v_p(b) = v_p(b). \tag{8}$$

Tương tự thì từ

$$b^{4n+3} \mid a^{4n+4}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow v_p(b) \leqslant \lim_{n \to +\infty} \frac{4n+4}{4n+3} v_p(a) = v_p(a) \tag{9}$$

Từ (8) và (9) ta có $v_p(a) = v_p(b)$. □

Ví dụ 17. *Cho $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ đôi một khác nhau và số nguyên tố p thỏa mãn*

$$a^p + b^p = c^p + d^p.$$

Chứng minh rằng $|a - c| + |b - d| \geqslant p$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} a^p - a &\equiv 0 \pmod{p}, \\ b^p - b &\equiv 0 \pmod{p}, \\ c^p - c &\equiv 0 \pmod{p}, \\ d^p - d &\equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$0 = (a^p - c^p) + (b^p - d^p) \equiv a - c + b - d \pmod{p},$$

suy ra $a + b \equiv c + d \pmod{p}$.

Ta xét các trường hợp sau:

- $a + b \neq c + d$ suy ra điều phải chứng minh.
- $a + b = c + d$. Giả sử $a > c > d$ suy ra $b < d$ do đó $a > c > d > b$.

  Xét hàm số $f(t) = t^p$. Vì $f(t)$ có đạo hàm trên các khoảng $(c, a), (b, d)$ nên theo định lý Lagrange tồn tại $t_1 \in (c, a), t_2 \in (d, b)$ sao cho

  $$f'(t_1) = \frac{f(a) - f(c)}{a - c}, \quad f'(t_2) = \frac{f(d) - f(b)}{d - b}.$$

  Do đó $f'(t_1) = f'(t_2)$, vô lý vì p nguyên tố và t_1, t_2 thuộc hai khoảng khác nhau.

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

3. Bài tập rèn luyện

Bài tập 1. Cho $a_1, a_2, \ldots$ là dãy vô hạn các số thực nhỏ hơn 1 thỏa mãn $a_{n+1}(a_n + 2) = 3$, $\forall n \geqslant 1$. Chứng minh rằng

a) $-\frac{7}{2} < a_n < -2$.

b) $a_n = -3, \forall n$.

Bài tập 2. Cho dãy vô hạn (u_n), $n = 0, 1, 2, \ldots$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

a) $0 \leqslant u_n \leqslant 2, \forall n = 0, 1, 2, \ldots$

b) $u_n - 2u_{n+1} + u_{n+2} \geqslant 0, n = 1, 2, \ldots$

Chứng minh rằng $0 \leqslant n(u_n - u_{n+1}) \leqslant 2, \forall n = 0, 1, 2, \ldots$

Bài tập 3. Cho dãy số dương $x_0 = 1, x_1 = a > 0$, $x_{n+2} = \frac{x_n}{x_{n+1}+1}$, $\forall n \geqslant 0$. Chứng minh rằng tồn tại nhiều nhất một giá trị a để $x_{n+1} \leqslant x_n, \forall n$.

Bài tập 4. Cho một dãy bất kỳ gồm vô hạn các số thực dương $a_0, a_1, a_2, \ldots$Chứng minh tồn tại vô hạn giá trị n để bất đẳng thức sau đúng $1 + a_n > a_{n-1}\sqrt[n]{2}$.

Bài tập 5. Cho dãy số dương (c_n) thỏa mãn $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k < M, \forall n$. Chứng minh rằng có vô số số n sao cho $c_n \geqslant c_{n+1}\sqrt[n]{2}$.

Bài tập 6. Chứng minh rằng không tồn tại cấp số cộng tăng thực sự độ dài vô hạn thỏa mãn : Mỗi số hạng của cấp số cộng đó đều có dạng a^b $\left(a, b \in \mathbb{Z}^+, a, b \geqslant 2\right)$.

Bài tập 7. Cho dãy số thực $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ thỏa mãn

$$1 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots \tag{10}$$

Dãy số $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ được xác định như sau

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}.$$

Chứng minh rằng

a) $0 \leqslant b_n < 2, \forall n$.

b) Với mọi số C cho trước, $0 \leqslant C < 2$, đều tồn tại một dãy số $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ thỏa mãn điều kiện (10) sao cho $b_n > C$ với vô số chỉ số n.

Bài tập 8. Cho $f, g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ là các hàm số thỏa mãn đồng thời các điều kiện

a) g là hàm toàn ánh.

b) $2f^2(n) = n^2 + g^2(n), \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

c) $|f(n) - n| \leqslant 2016\sqrt{n}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ có vô số nghiệm.

Bài tập 9. Cho a, b là các số tự nhiên lớn hơn 1 thỏa mãn điều kiện $b^n - 1 \vdots a^n - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng b là lũy thừa của a.

Bài tập 10. Dãy số nguyên dương $(a_n), n = 1, 2, \ldots$ thỏa mãn điều kiện

$$0 < a_{n+1} - a_n < \sqrt{a_n}, \forall n \geqslant 1.$$

Lấy a, b là hai số nguyên dương tùy ý, với $0 < a < b < 1$. Chứng tỏ rằng tồn tại vô số cặp số nguyên dương (p, q) sao cho $a < \frac{a_p}{a_q} < b$.

Bài tập 11. Cho dãy (a_n) tăng ngặt gồm các số nguyên dương thỏa mãn dãy $(a_{n+1} - a_n)$ bị chặn. Chứng minh rằng tập các ước nguyên tố của dãy (a_n) là vô hạn.

Bài tập 12. Với mỗi số tự nhiên n, gọi $I(n)$ là tập hợp các số tự nhiên k sao cho

$$50^n < 7^k < 50^{n+1}.$$

a) Chứng tỏ rằng với mỗi số tự nhiên n, ta có $|I(n)| = 2$ hoặc $|I(n)| = 3$.

b) Chứng tỏ rằng tồn tại vô số số tự nhiên n sao cho $|I(n)| = 3$.

Bài tập 13. Tìm tất cả các bộ 3 số dương (a, b, c) sao cho $[na][nb] = [n^2c], \forall n \in \mathbb{N}$.

Bài tập 14. Cho n là số nguyên dương. Tính phần nguyên $\left[\frac{10 \cdot C_{2n}^n \cdot \sqrt{n}}{4^n}\right]$.

Bài tập 15. Cho số nguyên n với $2000 \leqslant n \leqslant 2095$. Đặt $a = \sum\limits_{k=1995}^{n} \frac{1}{k}$ và $b = \frac{n+1}{1995}$. Hãy tìm phần nguyên của số $b^{\frac{1}{a}}$.

Bài tập 16. Cho n và k là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $n \geqslant 7$ và $2 \leqslant k < n$. Chứng minh rằng $k^n > 2n^k$.

Bài tập 17. Cho a, b là các số nguyên lớn hơn 1. Chứng minh rằng có một bội của a chứa tất cả các chữ số $0, 1, \ldots, b-1$ khi được viết trong hệ cơ số b.

Bài tập 18. Cho các số thực dương a, b thoả mãn $b[an] = a[bn], \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Chứng minh rằng $a = b$ hoặc cả a và b đều nguyên.

Bài tập 19. Cho $k \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng nếu tồn tại dãy $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ các số nguyên thỏa mãn điều kiện $a_n = \frac{a_{n-1} + n^k}{n}, \forall n \geqslant 1$ thì $k - 2$ chia hết cho 3.

Bài tập 20. Một số nguyên dương được gọi là " số Kim cương 2005" nếu trong biểu diễn thập phân của nó có 2005 số 9 đứng cạnh nhau liên tiếp. Dãy $(a_n), n = 1, 2, 3, \ldots$ là dãy tăng ngặt các số nguyên dương thoả mãn $a_n < nC$ (C là hằng số thực dương nào đó). Chứng minh rằng dãy số $(a_n), n = 1, 2, 3, \ldots$ chứa vô hạn "số Kim cương 2005".

Tài liệu

[1] Trần Nam Dũng (chủ biên), *Các phương pháp giải toán qua các kỳ thi Olympic*.

[2] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu, *Problems from the Book*.

[3] Tạp chí Toán học và tuổi trẻ.

Tổng quát hóa đường thẳng Droz Farny

Trần Quang Hùng, THPT chuyên KHTN, Hà Nội

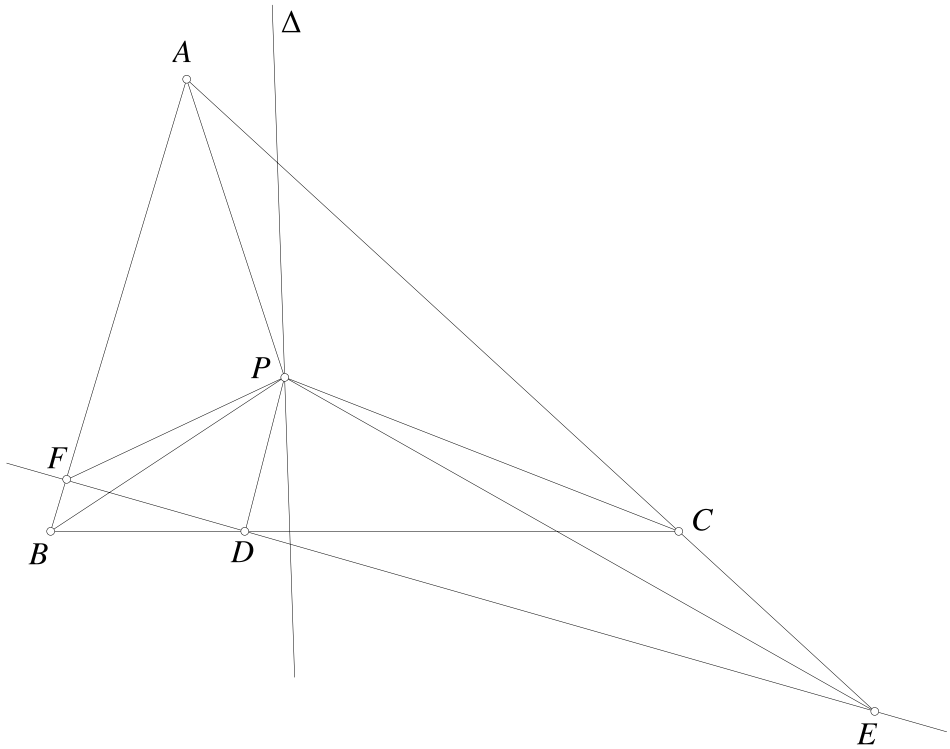
Tóm tắt

Hai đường thẳng vuông góc với nhau tại trực tâm của tam giác sẽ chắn trên ba cạnh tam giác ba đoạn thẳng mà trung điểm của chúng thẳng hàng. Đó là nội dung một định lý rất nổi tiếng có tên là Droz-Farny. Bài viết này đưa ra một hướng tổng quát cho bài toán đường thẳng Droz-Farny cùng với lời giải sử dụng phép nghịch đảo và một lời giải khác sử dụng tính chất chùm điều hòa.

Định lý lần đầu tiên được đề nghị bởi Arnold Droz năm 1899 trong [1]. Các lời giải sử dụng lượng giác, phương pháp tọa độ hoặc vector lần lượt được đưa ra trong [2,3,4,5,6]. Trong [7] trình bày một hướng tổng quát cho định lý này sử dụng các kiến thức về tỷ số kép và độ dài đại số. Trong [8] một định lý tổng quát khác được đề cập với lời giải sử dụng tính chất điểm Miquel và điểm đẳng giác. Bài viết này sẽ giới thiệu bài toán tổng quát giống trong [8] [1] với lời giải sử dụng phép nghịch đảo. Đồng thời bài viết cũng đề cập tới một bài toán tổng quát hơn nữa, với lời giải sử dụng thuần túy hình học xạ ảnh.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ không thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Đường thẳng Δ qua P. Các điểm D, E, F lần lượt thuộc các đường thẳng BC, CA, AB sao cho PD, PE, PF lần lượt là đối xứng của PA, PB, PC qua Δ. Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng.

[1] Tác giả tìm ra độc lập với [8]



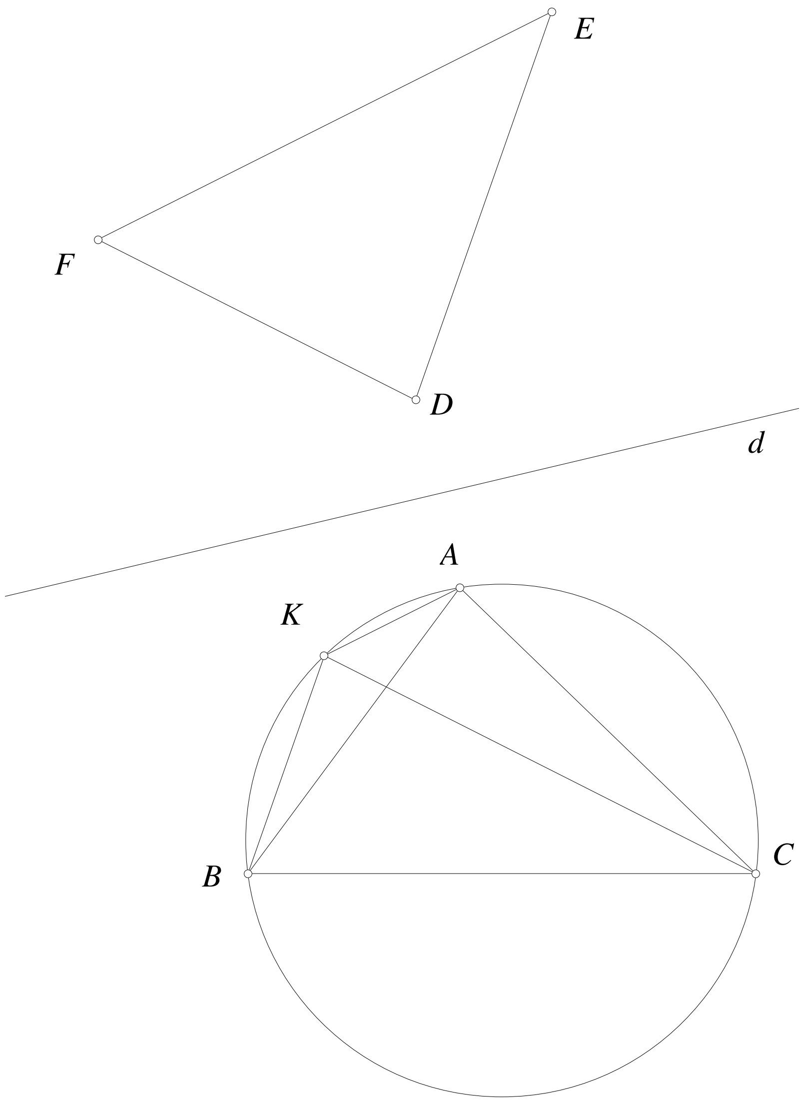
Hình 1.

Sử dụng phép nghịch đảo cực P phương tích bất kỳ ta chuyển bài toán trên về bài toán sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ. Gọi $(K), (L), (N)$ lần lượt là các đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC, PCA, PAB. D, E, F lần lượt thuộc $(K), (L), (N)$ sao cho PD, PE, PF lần lượt là đối xứng của PD, PE, PF qua Δ. Chứng minh rằng bốn điểm P, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Để giải bài toán trên ta cần một bổ đề sau

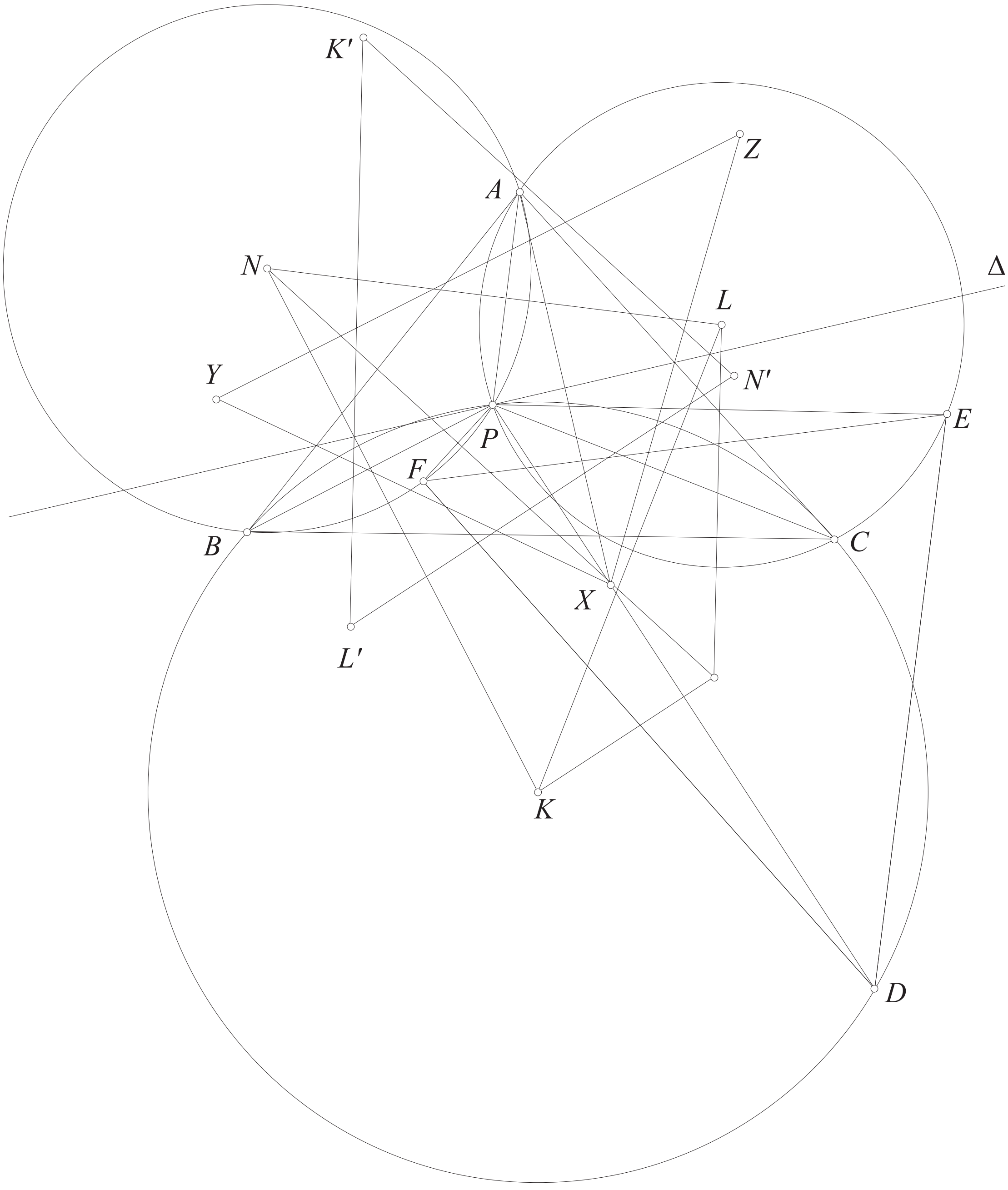
Bổ đề 2.1. Cho tam giác ABC và đường thẳng Δ bất kỳ. Tam giác DEF là đối xứng của tam giác ABC qua Δ, thì các đường thẳng qua A, B, C lần lượt song song với EF, FD, DE đồng quy.



Hình 2.

Chứng minh. Gọi đường thẳng qua B, C lần lượt song song với FD, DE cắt nhau tại K. Ta có $(KB, KC) \equiv (FD, DE) \equiv (AB, AC)(\mathrm{mod}\pi)$. Suy ra điểm K thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta lại có $(KA, EF) \equiv (KA, KB) + (KB, EF) \equiv (CA, CB) + (DF, EF) \equiv (CA, CB) + (CB, CA) \equiv 0(\mathrm{mod}\pi)$. Do đó $KA \parallel EF$. Vậy các đường thẳng qua A, B, C lần lượt song song với EF, FD, DE đồng quy tại K. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Trở lại giải bài toán



Hình 3.

Lời giải bài toán. Ta gọi X, Y, Z lần lượt là điểm đối xứng với A, B, C qua Δ, theo giả thiết dễ thấy X, Y, Z thuộc PD, PE, PF. Gọi trung trực của PX, PY, PZ cắt nhau tương ứng tại thành tam giác $K'L'N'$. Ta dễ thấy tam giác $K'L'N'$ đối xứng tam giác KLN qua Δ.

Để chứng minh P, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn ta sẽ chứng minh rằng trung trực của PD, PE, PF đồng quy. Thật vậy, do PD là một dây cung của (K) nên trung trực của PD đi qua K. Do X thuộc PD nên trung trực PD song song với trung trực PX chính là $L'N'$, vậy trung trực PD là đường thẳng qua K song song $K'N'$. Tương tự trung trực PE, PF lần lượt là các đường thẳng qua L, N theo thứ tự song song với $N'K'$ và $K'L'$. Do tam giác KLN và $K'L'N'$ đối xứng nhau qua Δ nên theo bổ đề các trung trực này đồng quy. Vậy P, D, E, F cùng thuộc một đường tròn. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Ta thấy rằng nếu kẻ một đường thẳng $\Delta' \perp \Delta$ thì chùm đường thẳng $(\Delta, \Delta', OA, OD)$ là một chùm điều hòa vì OA, OD đối xứng nhau qua Δ. Điều này gợi mở cho chúng ta một hướng tổng quát hơn nữa bài toán này thông qua khái niệm về chùm điều hòa mà bỏ qua tính chất đối xứng. Ta quy ước sử dụng các ký hiệu

$(XY, Z) = \dfrac{ZX}{ZY}$ chỉ tỷ số đơn của bộ ba điểm thẳng hàng X, Y, Z.

$(XY, ZT) = \dfrac{ZX}{ZT} : \dfrac{TX}{TY}$ chỉ tỷ số kép của bộ bốn điểm thẳng hàng hoặc đồng viên X, Y, Z, T.

$A(XY, ZT)$ chỉ tỷ số kép của bộ bốn tia (AX, AY, AZ, AT)

Với các độ dài sử dụng là độ dài đại số. Ta xét bài toán tổng quát hơn như sau

Bài toán 3. Cho tam giác ABC và P, K, L là các điểm bất kỳ. Giả sử có các điểm D, E, F lần lượt thuộc các đường thẳng BC, CA, AB sao cho các chùm $P(KL, AD) = P(KL, BE) = P(KL, CF) = -1$. Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng.

Ta thấy ngay rằng nếu $PK \perp PL$. Ta thu được bài toán ban đầu. Bài toán này phát biểu dưới dạng chùm điều hòa nên nó cũng có một lời giải thuần túy xạ ảnh. Ta cần một bổ đề sau

Bổ đề 3.1. Cho các điểm D, E, F, X, Y, Z, K, L cùng thuộc một đường thẳng thỏa mãn $(KL, DX) = (KL, EY) = (KL, FZ) = -1$. Chứng minh rằng tích $(EF, DX).(FD, EY).(DE, FZ) = -1$.

Chứng minh. Bài toán thực chất là các biến đổi độ dài đại số trên trục, để đơn giản ta sử dụng tọa độ trên trục. Cho $D(d), E(e), F(f), X(x), Y(y), Z(z), K(k), L(l)$.

Từ $(KL, DX) = -1$ suy ra $\dfrac{d-k}{d-l} : \dfrac{x-k}{x-l} = -1$ vậy $x = \dfrac{dl - 2kl + dk}{2d - k - l}$. Tương tự $y = \dfrac{el - 2kl + ek}{2e - k - l}, z = \dfrac{fl - 2kl + fk}{2f - k - l} \quad (1)$.

Ta có $(EF, DX).(FD, EY).(DE, FZ)$

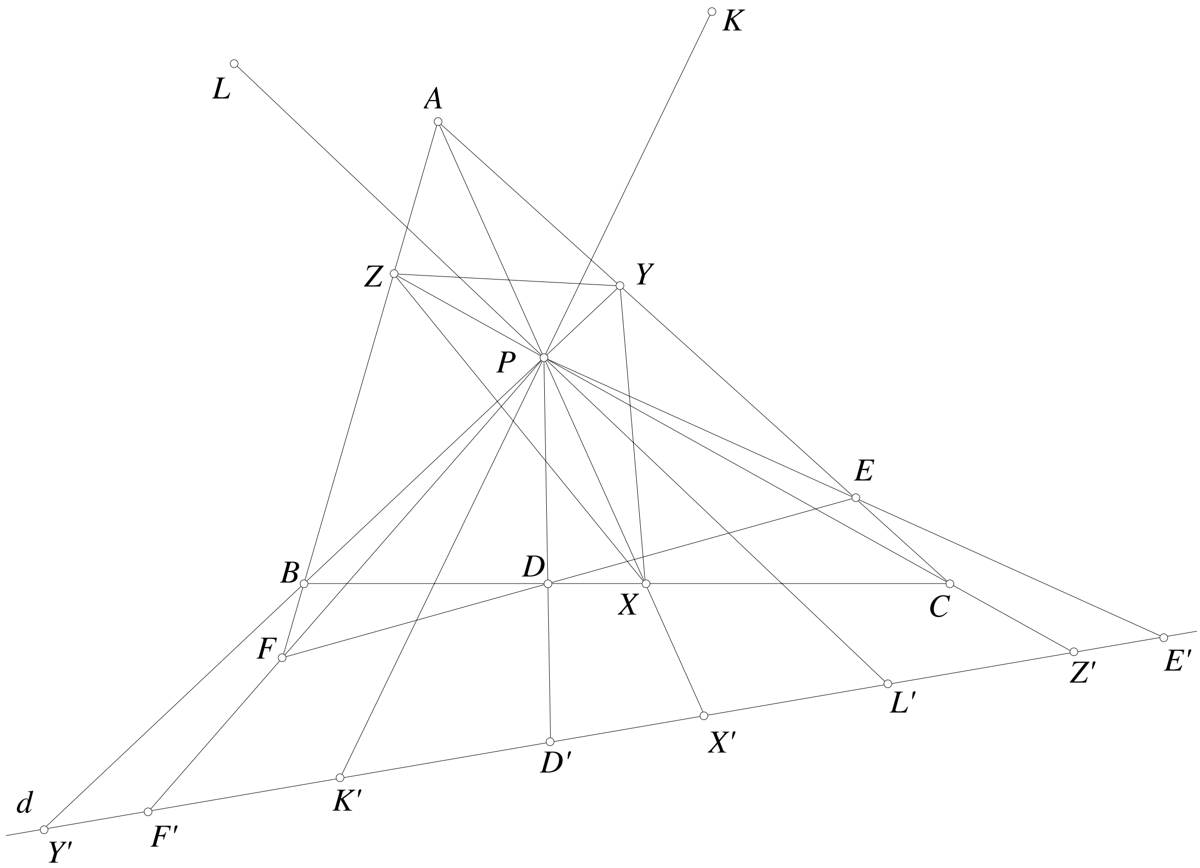
$= \dfrac{(EF, D)}{(EF, X)} . \dfrac{(FD, E)}{(FD, Y)} . \dfrac{(DE, F)}{(DE, Z)}$

$= \dfrac{-1}{(EF, X).(FD, Y).(DE, Z)}$

$= -\dfrac{x-f}{x-e} . \dfrac{y-d}{y-f} . \dfrac{z-e}{z-d} \quad (2).$

Thay biểu thức từ (1) vào (2) dễ kiểm tra được $(EF, DX).(FD, EY).(DE, FZ) = -1$. □

Trở lại bài toán



Hình 4.

Lời giải bài toán. Gọi PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại X, Y, Z. Gọi d là một đường thẳng bất kỳ. Gọi $PA, PB, PC, PD, PE, PF, PK, PL$ lần lượt cắt d tại $D', E', F', X', Y', Z', K', L'$. Từ giả thiết $P(KL, AD) = P(KL, BE) = P(KL, CF) = -1$, chiếu xuyên tâm P lên d ta có $(K'L', X'D') = (K'L', Y'E') = (K'L', C'F') = -1$.

Áp dụng bổ đề ta suy ra $(E'F', D'X').(F'D', E'Y').(D'E', F'Z') = -1 \quad (1)$.

Sử dụng phép chiếu xuyên tâm P lần lượt các đường thẳng BC, CA, AB thì ta thu được

$P(E'F', D'X') = (BC, DX) = \dfrac{(BC, D)}{(BC, X)}$, $P(F'D', E'Y') = (CA, EY) = \dfrac{(CA, E)}{(CA, Y)}$, $P(D'E', F'Z') = (AB, FZ) = \dfrac{(AB, F)}{(AB, Z)} \quad (2)$.

Vì AX, BY, CZ đồng quy tại P nên theo định lý Ceva $(BC, X).(CA, Y).(AB, Z) = -1 \quad (3)$.

Từ (1),(2),(3) ta suy ra

$$-1 = (E'F', D'X').(F'D', E'Y').(D'E', F'Z')$$

$$= P(E'F', D'X').P(F'D', E'Y').P(D'E', F'Z')$$

$$= \frac{(BC, D)}{(BC, X)}.\frac{(CA, E)}{(CA, Y)}.\frac{(AB, F)}{(AB, Z)}$$

$= -(BC, D).(CA, E).(AB, F).$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABC dễ suy ra D, E, F thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. □

Cuối bài viết, tác giả xin được nói lời cảm ơn tới **TS. Nguyễn Minh Hà** người đã cho tác giả một số ý tưởng về lời giải nghịch đảo của bài toán tổng quát này.

Tài liệu

[1] A. Droz-Farny, Question 14111, Ed. Times 71 (1899) 89-90.

[2] J. L. Ayme, Forum Geom., Vol 4, (2004), pp 219-224.

[3] F. M. van Lamoen, Hyacinthor messages 6140, 6144, December 11,2002.

[4] D. Grinberg, Hyacinthor messages 9854, July 23, 2003.

[5] M. Stevanovié, Hyacinthor messages 9130, January 25, 2004.

[6] C. Pohoata and S.H. Ta, A Short Proof of Lamoen's Generalization of the Droz-Farny Line Theorem, Mathematical reflections 2006.

[7] N.M. Ha and L.T. Vinh, Purely synthetic proof of the Generalized Droz-Farny Theorem, Global journal of advanced research on classical and modern geometries.

[8] T. Andreescu and C. Pohoata, Back to Euclidean: Droz-Farny Demystified, Mathematical reflections 2012.

[9] Roger A. Johnson, Advanced Euclidean Geomerty, Dover Publications, Inc., N.Y. (1960).

Note on Hermite - Hadamard Inequalities

Vandanjav Adiyasuren
(*National University of Mongolia*)
Enkhee Davaadulam, Bold Sanchir
(*Mongolian University of Life Science*)

Abstract

In this note we generalize some result of [1]

1. Introduction

Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ be a convex function, then the inequality

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{1.1}$$

is known as the Hermite-Hadamard inequality (see [3] for more information). Since then, some refinements of the Hermite-Hadamard inequality on convex functions have been extensively investigated by a number of authors (*e.g.*, [2, 4]).

2. Main Result

Theorem 1. *Assume that $f : I \to \mathbb{R}$ is a convex function on I. Then for all $\lambda \in [0,1]$, we have*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant l_n(\lambda) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant L_n(\lambda) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{2.1}$$

where

$$l_n(\lambda) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\lambda\cdot f\left(a+\frac{(b-a)(2k+1)\lambda}{2n}\right)+(1-\lambda)f\left(\lambda b+(1-\lambda)a+\frac{(2k+1)(1-\lambda)(b-a)}{2n}\right)\right],$$

and

$$L_n(\lambda) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\lambda\left(f\left(a+\frac{(k+1)\lambda(b-a)}{n}\right)+f\left(a+\frac{k(b-a)\lambda}{n}\right)\right)+\right.$$
$$\left.+(1-\lambda)\left(f\left(\lambda b+(1-\lambda)a+\frac{k(1-\lambda)(b-a)}{n}\right)+f\left(\lambda b+(1-\lambda)a+\frac{(k+1)(1-\lambda)(b-a)}{n}\right)\right)\right].$$

Proof. First we denote

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{\lambda b+(1-\lambda)a} f(x)\,dx + \int_{\lambda b+(1-\lambda)a}^b f(x)\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k(b-a)\lambda}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)\lambda}{n}} f(x)\,dx + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\lambda b+(1-\lambda)a+\frac{k(1-\lambda)(b-a)}{n}}^{\lambda b+(1-\lambda)a+\frac{(k+1)(1-\lambda)(b-a)}{n}} f(x)\,dx \tag{2.2}$$

Applying (1.1) on the subinterval $\left[a+\frac{k(b-a)\lambda}{n}, a+\frac{(k+1)(b-a)\lambda}{n}\right]$, $(k=0,\dots,n-1)$, we get

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{(b-a)(2k+1)\lambda}{2n}\right) \leqslant \frac{n}{(b-a)\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+\frac{k(b-a)\lambda}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)\lambda}{n}} f(x)\,dx$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(f\left(a+\frac{(k+1)\lambda(b-a)}{n}\right)+f\left(a+\frac{k(b-a)\lambda}{n}\right)\right). \tag{2.3}$$

Applying (1.1) again on $\left[\lambda b+(1-\lambda)a+\frac{k(1-\lambda)(b-a)}{n}, \lambda b+(1-\lambda)a+\frac{(k+1)(1-\lambda)(b-a)}{n}\right]$, $(k=0,\dots,n-1)$ we get

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\lambda b+(1-\lambda)a+\frac{(2k+1)(1-\lambda)(b-a)}{2n}\right)$$

$$\leqslant \frac{n}{(1-\lambda)(b-a)}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\lambda b+(1-\lambda)a+\frac{k(1-\lambda)(b-a)}{n}}^{\lambda b+(1-\lambda)a+\frac{(k+1)(1-\lambda)(b-a)}{n}} f(x)\,dx$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\lambda b+(1-\lambda)a+\frac{k(1-\lambda)(b-a)}{n}\right)+f\left(\lambda b+(1-\lambda)a+\frac{(k+1)(1-\lambda)(b-a)}{n}\right)\right). \tag{2.4}$$

Multiplying (2.3) by λ, (2.4) by $(1-\lambda)$ and adding the resulting inequalities, we get:

$$l_n(\lambda) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant L_n(\lambda), \tag{2.5}$$

where $l_n(\lambda)$ and $L_n(\lambda)$ are defined as in Theorem 2.1.

Using the fact that f is a convex function, we obtain

$$l_n(\lambda) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\lambda\cdot f\left(a+\frac{(b-a)(2k+1)\lambda}{2n}\right)+(1-\lambda)f\left(\lambda b+(1-\lambda)a+\frac{(2k+1)(1-\lambda)(b-a)}{2n}\right)\right]$$

$$\geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left[\lambda\left(a+\frac{(b-a)(2k+1)\lambda}{2n}\right)+(1-\lambda)\left(\lambda b+(1-\lambda)a+\frac{(2k+1)(1-\lambda)(b-a)}{2n}\right)\right]$$

$$\geqslant f\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\lambda\left(a+\frac{(b-a)(2k+1)\lambda}{2n}\right)+(1-\lambda)\left(\lambda b+(1-\lambda)a+\frac{(2k+1)(1-\lambda)(b-a)}{2n}\right)\right)\right]$$

$$= f\left(\frac{a+b}{2}\right). \tag{2.6}$$

Other side, we can easily see that

$$f\left(a+\frac{(k+1)(b-a)\lambda}{n}\right)\leqslant\frac{n-(k+1)\lambda}{n}f(a)+\frac{(k+1)\lambda}{n}f(b),\tag{2.7}$$

$$f\left(a+\frac{k(b-a)\lambda}{n}\right)\leqslant\frac{n-k\lambda}{n}f(a)+\frac{k\lambda}{n}f(b),\tag{2.8}$$

$$f\left(\lambda b+(1-\lambda)a+\frac{k(1-\lambda)(b-a)}{n}\right)\leqslant\frac{(n-k)(1-\lambda)}{n}f(a)+\frac{\lambda n+k(1-\lambda)}{n}f(b),\tag{2.9}$$

$$f\left(\lambda b+(1-\lambda)a+\frac{(k+1)(1-\lambda)(b-a)}{n}\right)\leqslant\frac{(n-k-1)(1-\lambda)}{n}f(a)+\frac{\lambda n+(k+1)(1-\lambda)}{n}f(b).\tag{2.10}$$

Multiplying (2.5) and (2.6) by λ, (2.7) and (2.8) by $(1-\lambda)$ and adding over $k=\overline{0,n-1}$, we get:

$$L_n(\lambda)\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}.\tag{2.11}$$

Then by (2.5) , (2.6) and (2.11) we get (2.1). □

References

[1] ABDALLAH EL FARISSI. *"Simple proof and Refinement of Hermite-Hadamard Inequality"* Journal of Mathematical Inequalities Volume 4, Number 3 (2010), 365-369.

[2] DRAGOMIR, S. S AND PEARCE, C. E. M. *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities,* (RGMIA Monographs http://rgmia.vu.edu.au/monographs/hermitehadamard.html), Victoria University, 2000.

[3] HADAMARD, J. "Etude sur les proprietes des fonctions entires en particulier d'une fonction consideree par Riemann"). *J. Math. Pures Appl. 58,* 171-215 (1893).

[4] PECARIC, J. E. AND PROSCHAN, F. AND TONG, Y. C. *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical* Applications, Academic Press, New York, 1992.

ANDREI KOLMOGOROV NGƯỜI MỞ ĐƯỜNG NGÀNH XÁC SUẤT HIỆN ĐẠI

Slava Gerovitch
Người dịch Hoàng Mai

GIỚI THIỆU

Bài báo được dịch từ bài viết The Man Who Invented Modern Probability của Slava Gerovitch đăng trên trang Nautilus và được Phùng Hồ Hải hiệu đính.

Theo *Tia Sáng*

Nếu hai nhà thống kê lạc mất nhau trong một khu rừng vô hạn, trước tiên họ sẽ uống cho say. Khi đó, có thể nói là họ sẽ đi một cách ngẫu nhiên và việc này sẽ mang lại cơ hội tốt nhất để họ gặp lại nhau. Tuy nhiên, các nhà thống kê nên tỉnh táo nếu họ muốn đi hái nấm. Say rượu đi lung tung không mục đích sẽ thu hẹp phạm vi khám phá, và khả năng cao là họ sẽ quay trở lại vị trí cũ, nơi nấm đã bị hái hết rồi.

Kolmogorov (bìa phải) và hai người bạn, các nhà toán học nổi tiếng thời bấy giờ, Lev Pontryagin (bìa trái) và Pavel Alexandrov (ngồi giữa).

Những cách tư duy như vậy thuộc về các lý thuyết thống kê về "*bước đi ngẫu nhiên*" hay "*bước đi của người say*", trong đó tương lai chỉ phụ thuộc vào hiện tại chứ không phải quá khứ. Ngày nay, bước đi ngẫu nhiên được sử dụng để mô hình hóa các hiện tượng như xu hướng giá cổ phiếu, khuếch tán phân tử, hoạt động thần kinh, biến động dân số, ... Người ta cho rằng cũng có thể sử dụng nó để mô tả "*xu hướng di truyền*" của một gene cụ thể - ví dụ như màu mắt xanh - trở nên phổ biến trong một nhóm dân cư. Một cách trớ trêu, lý thuyết với đặc trưng bỏ qua quá khứ này lại có một bề dày lịch sử khá phong phú. Nó là một trong nhiều đột phá tri thức được xây dựng bởi Andrei Kolmogorov, một nhà toán học với hiểu biết sâu rộng và khả năng đáng kinh ngạc, người đã cách mạng hóa vai trò của tính không dự đoán được trong toán học, trong khi bản thân ông vẫn cẩn trọng ứng đối với những biến động của đời sống chính trị và hàn lâm ở nước Nga Xô viết.

Khi còn trẻ, Kolmogorov đã được nuôi dưỡng bởi không khí tri thức sôi động của Moskva hậu cách mạng, tràn ngập các thử nghiệm văn chương, những xu hướng tiên phong trong nghệ thuật, và các ý tưởng khoa học mới mẻ. Ở những năm đầu thập niên 1920, khi là một sinh viên lịch sử ở tuổi 17, ông đã trình bày một bài báo trước các bạn học tại Đại học Moskva, đưa ra một phân tích thống kê khác thường về đời sống của người Nga thời Trung cổ, trong đó cho thấy thuế khóa đánh trên cả làng thường là số nguyên, trong khi thuế trên từng hộ dân lại được biểu diễn bởi một phân số. Bài báo kết luận – đầy tranh cãi vào thời điểm đó – rằng thuế trước đây được thu theo làng và phân bổ đến từng hộ, thay vì thu theo từng hộ rồi gộp tổng lại cho cả làng. Thầy của ông đã nhận xét gay gắt rằng "*cậu chỉ mới tìm thấy một bằng chứng mà thôi, như vậy là không đủ với một nhà sử học. Cậu cần ít nhất năm bằng chứng.*" Lúc đó, Kolmogorov đã quyết định chuyển sang nghiên cứu toán học, nơi chỉ một chứng minh là đủ.

Điều hợp lý một cách kỳ lạ là một sự kiện ngẫu nhiên như vậy đã dẫn dắt Kolmogorov vào lãnh địa của lý thuyết xác suất, khi đó chỉ là một nhánh nhỏ bị xem thường của toán học. Các xã hội tiền hiện đại thường nhìn nhận các sự kiện ngẫu nhiên như một biểu thị cho ý chí của thần thánh, ở Ai Cập và Hy Lạp Cổ đại, việc tung súc sắc được nhìn nhận là một công cụ cho việc tiên tri hay bói toán. Cho đến đầu thế kỷ XIX, các nhà toán học châu Âu đã phát triển các kỹ thuật để tính toán các tỉ lệ cược, và định nghĩa xác suất như là tỉ lệ của số những trường hợp muốn có trên số tất cả các trường hợp đồng xác suất. Nhưng cách tiếp cận này lại vướng vào lập luận vòng quanh – xác suất được định nghĩa theo số các khả năng đồng xác suất – và chỉ có hiệu lực với những hệ có hữu hạn khả năng. Nó không thích hợp với những đại lượng vô hạn đếm được (như trò chơi với súc sắc có vô hạn mặt) hay không đếm được (như trò chơi với súc sắc hình cầu mà mỗi điểm trên mặt cầu là một khả năng). Những nỗ lực xử lý các tình huống như vậy chỉ mang lại những kết quả mâu thuẫn và tạo ra một hình ảnh xấu về lý thuyết xác suất.

Uy tín và thanh danh là những phẩm chất được Kolmogorov coi trọng. Sau khi chuyển ngành học, ban đầu Kolmogorov gia nhập nhóm toán của Nikolai Luzin, một giảng viên nổi tiếng đầy sức cuốn hút ở Đại học Moskva. Những học trò của Luzin đặt tên cho nhóm là "*Luzitania*", một cách chơi chữ theo tên giáo sư của họ và con tàu của Anh bị chìm trong Thế chiến thứ nhất. Họ được thống nhất bởi một "*nhịp đập của các con tim*", như Kolmogorov từng mô tả, tập hợp nhau lại sau giờ học để bàn luận chuyên sâu về những phát kiến mới trong toán học. Họ nhại partial differential equation (các phương trình đạo hàm riêng) thành partial irreverential equations (các phương trình bất kính riêng) và finite difference (sai phân hữu hạn) thành fine night differences (những khác biệt trong đêm vui vẻ). Lý thuyết xác suất, thiếu cơ sở lý thuyết chắc chắn và bị vướng vào các nghịch lý, đã bị đùa cợt thành "*lý thuyết của sự không may*".

Cũng bởi Luzitania mà cách nhìn nhận của Kolmogorov về lý thuyết xác suất có thêm một bước chuyển mang tính cá nhân. Cho tới thập niên 30 thế kỷ trước dưới thời Stalin, bất kỳ ai cũng có thể bị cảnh sát mật gõ cửa ban đêm và sự may rủi quyết định cuộc sống của mọi người. Bị tê liệt bởi sợ hãi, rất nhiều người Nga cảm thấy bắt buộc phải tham gia vào việc tố giác, với hi vọng có thể tăng thêm cơ hội sống sót của mình. Một số người Bolshevik trong cộng đồng toán học, bao gồm cả những học trò cũ của Luzin, đã gán cho Luzin tội phản bội và phê phán ông gay gắt vì đã công bố công trình ở các tạp chí của nước ngoài. Bản thân Kolmogorov lúc ấy cũng có công bố ở nước ngoài nên có thể đã nhận thấy khả năng mình bị tố giác. Ông đã biểu lộ sự sẵn sàng thỏa hiệp về mặt chính trị vì lợi ích sự nghiệp của mình, chấp nhận một vị trí giám đốc viện nghiên cứu khi người tiền nhiệm của ông vì ủng hộ tự do tôn giáo mà bị chế độ Stalin bỏ tù. Bấy giờ, Kolmogorov tham gia phê bình và quay lưng lại với Luzin. Luzin đã trở thành đối tượng một buổi xét xử bởi Viện Hàn lâm Khoa học và mất tất cả các vị trí chính thức, nhưng đã thoát khỏi sự bắt giam và xử bắn bởi chính quyền Nga một cách ngạc nhiên. Luzitania cũng tan rã, bị đánh chìm bởi chính thủy thủ đoàn của nó.

Không bàn đến khía cạnh đạo đức trong quyết định của ông, Kolmogorov đã đặt cược thành công và nhận lại sự tự do để tiếp tục nghiên cứu. Trái ngược với sự phục tùng của mình trong chính trị, trong lý thuyết xác suất, Kolmogorov đã đưa ra một sửa đổi cấp tiến căn bản và thực sự là nền tảng của lĩnh vực này. Ông dựa vào lý thuyết độ đo, một lý thuyết thời thượng, mới được du nhập vào Nga từ Pháp. Lý thuyết độ đo là sự tổng quát hóa của các khái niệm "*độ dài*", "*diện tích*" hay "*thể tích*", cho phép đo đạc nhiều đối tượng toán học rắc rối nằm ngoài khả năng của các phương pháp thông thường. Chẳng hạn, nó có thể giúp tính diện tích của một hình vuông với vô hạn các lỗ ở bên trong, chia nó thành vô hạn các mảnh nhỏ, phân tán trên một mặt phẳng vô hạn. Trong lý thuyết độ đo, người ta vẫn có thể nói về "*diện tích*" (độ đo) của vật thể bị phân tán như thế.

Kolmogorov mô tả những tương tự giữa lý thuyết xác suất và lý thuyết độ đo, thể hiện trong năm tiên đề, ngày nay thường được phát biểu thành sáu mệnh đề, đưa xác suất trở thành một lĩnh vực được tôn trọng của giải tích toán học. Khái niệm căn bản nhất trong lý thuyết của Kolmogorov là "*biến cố cơ bản*", kết quả của một phép thử đơn lẻ, như tung một đồng xu. Tất cả các biến cố cơ bản lập thành "*không gian mẫu*", tập hợp của tất cả các kết quả khả dĩ. Chẳng hạn như với các cú sét đánh ở Massachusetts, không gian mẫu sẽ bao gồm tất cả các điểm trong bang mà sét có thể đánh vào. Một biến cố ngẫu nhiên sẽ được định nghĩa là một "*tập đo được*" trong một không gian mẫu, và xác suất của một biến cố ngẫu nhiên là "*độ đo*" của tập đó. Ví dụ xác suất sét đánh trúng Boston sẽ phụ thuộc vào diện tích ("*độ đo*") của thành phố này. Hai biến cố xảy ra đồng thời có thể được biểu diễn bởi giao của các độ đo của chúng, xác suất có điều kiện được biểu diễn bởi thương các độ đo, và xác suất mà một trong hai biến cố không phụ thuộc vào nhau xảy ra được tính bằng cách cộng các độ đo (ví dụ như, xác suất hoặc Boston hoặc Cambridge sẽ bị sét đánh được tính bằng tổng diện tích của chúng).

Nghịch lý Đường tròn lớn là một câu đố toán học quan trọng mà khái niệm xác suất của Kolmogorov cuối cùng đã giải được. Giả sử rằng người ngoài hành tinh hạ cánh ngẫu nhiên trên một hành tinh hình cầu hoàn hảo và xác suất điểm hạ cánh được phân bố đều. Như vậy có phải họ sẽ hạ cánh với xác suất như nhau ở bất kỳ nơi nào dọc theo bất kỳ đường tròn nào chia mặt cầu thành hai bán cầu bằng nhau, hay còn gọi là "*đường tròn lớn*"? Hóa ra xác suất hạ cánh được phân bố đều dọc theo đường xích đạo, nhưng phân bố không đều trên các đường kinh tuyến, với xác suất tăng dần khi tới gần đường xích đạo và giảm ở các cực. Nói cách khác, người ngoài hành tinh có xu hướng hạ cánh ở những vùng có khí hậu nóng hơn. Có thể giải thích kết quả lạ lùng này bằng hình ảnh các đường tròn vĩ tuyến lớn dần khi chúng tiến dần tới xích đạo – nhưng kết quả này nghe có vẻ thật vô lý, bởi vì chúng ta có thể quay đường tròn và biến đường xích đạo thành một đường kinh tuyến. Kolmogorov đã chỉ ra rằng đường tròn lớn có độ đo bằng không, bởi vì nó là một đoạn thẳng và có diện tích bằng không. Điều này lý giải sự mâu thuẫn hiển nhiên trong các xác suất có điều kiện của việc hạ cánh tồn tại bởi không thể tính toán một cách nghiêm túc những xác suất như vậy.

Tưởng có thể gác qua một bên thế giới thực với những thanh trừng theo kiểu Stalin để bước vào thế giới phù du của những xác suất có điều kiện với độ đo-không, nhưng Kolmogorov đã sớm phải quay về với hiện thực. Trong Thế chiến thứ hai, Chính phủ Nga yêu cầu Kolmogorov phát triển các phương pháp giúp tăng tính hiệu quả của pháo binh. Ông đã chỉ ra rằng thay vì cố gắng tối đa xác suất mỗi phát bắn trúng đích, trong một số trường hợp cụ thể sẽ tốt hơn nếu bắn một loạt đạn có độ lệch nhỏ so một phát ngắm chuẩn xác, một chiến thuật được biết đến dưới tên gọi "*phân tán nhân tạo*". Bộ môn Lý thuyết xác suất của Đại học Moskva mà Kolmogorov là tổ trưởng, cũng đã tính toán các bảng đạn đạo cho những pha ném bom tầm thấp, vận tốc nhỏ. Vào năm 1944 và 1945, chính phủ đã trao thưởng cho Kolmogorov hai Huân chương Lenin cho những đóng góp của ông trong thời chiến và sau cuộc chiến ông làm việc với tư cách cố vấn toán học cho chương trình vũ khí nhiệt hạch.

Nhưng những mối quan tâm của Kolmogorov vẫn hướng ông tới những hướng nghiên cứu có tính triết lý hơn. Toán học đã dẫn ông tới niềm tin rằng thế giới được dẫn dắt bởi tính ngẫu nhiên và cơ bản được sắp đặt dựa trên các định luật xác suất. Ông thường chỉ ra vai trò của tính không dự đoán được trong những mối quan hệ của con người. Cuộc gặp gỡ tình cờ của Kolmogorov với nhà toán học cùng thời Pavel Alexandrov trong một buổi chèo thuyền năm 1929 đã khởi đầu cho một tình bạn thân thiết suốt đời. Trong một lá thư dài mà họ thẳng thắn trao đổi, Alexandrov đã phê phán Kolmogorov vì ý thích nói chuyện với người lạ trên tàu, ngụ ý rằng những gặp gỡ như vậy quá hời hợt, không giúp nhận diện tính cách thực của một con người. Kolmogorov phản đối, ông đưa ra quan điểm xác suất rất cấp tiến về những tương tác xã hội trong đó mỗi người hành động như những mẫu thống kê đại diện cho các nhóm lớn hơn. Ông viết hồi âm cho Alexandrov rằng "*một cá nhân sẽ có xu hướng hấp thu tinh thần xung quanh, và thể hiện với bất kỳ ai quanh mình, không chỉ với một người bạn nhất định, về phong cách sống và thế giới quan mà họ hấp thu được*".

Kolmogorov quan tâm sâu sắc tới âm nhạc, văn chương và ông tin rằng mình có thể phân tích chúng dưới khía cạnh xác suất để thu được những hiểu biết sâu sắc về cách tư duy bên trong trí óc con người. Ông là người tin vào tính thứ bậc trong văn học nghệ thuật. Ở đỉnh tháp là các tác phẩm của Goethe, Pushkin, và Thomas Mann cùng với những sáng tác của Bach, Vivaldi, Mozart và Beethoven, những công trình có giá trị trường tồn tương tự như những chân lý toán học vĩnh cửu. Kolmogorov nhấn mạnh rằng mỗi công trình nghệ thuật đích thực là một sáng tạo độc nhất, thứ gì đó không dự đoán được, nằm ngoài địa hạt của những chuẩn mực thống kê đơn giản. "*Liệu có thể xếp một cách hợp lý tác phẩm Chiến tranh và Hòa bình của Tolstoy vào chung trong một tập hợp của 'tất cả những tiểu thuyết có thể sinh ra trên đời', và hơn nữa là thiết lập một phân bố xác suất nào đó cho các phần tử trong tập hợp này hay không?*", ông hỏi đùa trong một bài báo in năm 1965.

Dù vậy, ông vẫn khao khát hiểu bản chất của sáng tạo nghệ thuật. Năm 1960, Kolmogorov tổ chức một nhóm các nhà nghiên cứu với những máy tính cơ điện và giao cho họ nhiệm vụ tính toán cấu trúc nhịp điệu của thơ ca Nga. Kolmogorov đặc biệt quan tâm tới độ lệch của nhịp điệu các bài thơ trong thực tế so với những vần luật cổ điển. Trong thơ ca truyền thống, vần luật kiểu iamb là một nhịp điệu bao gồm một âm tiết không nhấn theo sau một âm tiết nhấn. Nhưng trong thực tế, người ta hiếm khi tuân thủ quy tắc này. Trong tác phẩm Evegnhi Onhegin của Pushkin, bài thơ iamb cổ điển nổi tiếng nhất bằng tiếng Nga, gần như ba phần tư trong 5300 dòng của nó vi phạm quy tắc vần luật iamb, và hơn một phần năm của tất cả những âm tiết chẵn là không nhấn. Kolmogorov tin rằng tần suất sai lệch này cho thấy một "*chân dung thống kê*" khách quan về mỗi nhà thơ. Ông cho rằng, một mẫu hình nhấn trọng âm bất thường là chỉ dấu cho tính sáng tạo và biểu đạt nghệ thuật. Nghiên cứu Pushkin, Pasternak và những nhà thơ Nga khác, Kolmogorov lập luận rằng họ đã biến tấu các vần luật để tạo ra "*sắc thái tổng thể*" cho bài thơ hay đoạn văn của mình.

Để đo giá trị nghệ thuật của văn bản, Kolmogorov còn sử dụng một phương pháp đoán chữ để đánh giá entropy của một ngôn ngữ tự nhiên. Trong lý thuyết thông tin, entropy là một thước đo tính bất định hoặc tính không dự đoán được, tương ứng với nội dung thông tin của một thông điệp: Thông điệp càng không thể dự đoán được thì thông tin mà nó hàm chứa càng nhiều. Kolmogorov đưa entropy thành một thước đo của tính độc đáo trong nghệ thuật. Nhóm của ông đã sắp đặt một chuỗi các phép thử, trong đó các tình nguyện viên được xem một trích đoạn văn xuôi hoặc thơ ca Nga, rồi yêu cầu họ đoán chữ cái tiếp theo, tiếp theo nữa, rồi cứ tiếp tục như vậy. Kolmogorov ngầm nhận xét rằng, từ góc nhìn của lý thuyết thông tin, các tờ báo Xô viết thường ít thông tin hơn thơ ca, bởi vì các bài diễn thuyết chính trị thường sử dụng nhiều những cụm từ có tính khuôn sáo và nội dung của chúng rất dễ đoán trước. Trái lại, các bài thơ của những nhà thơ vĩ đại lại khó đoán hơn rất nhiều, mặc dù chúng phải tuân thủ những quy phạm rất chặt chẽ theo thể thơ. Theo Kolmogorov, đây là một biểu hiện của tính độc đáo. Nghệ thuật đích thực thì không đoán trước được, nhưng phẩm chất đó lại có thể được đo lường bởi một lý thuyết xác suất có chất lượng cao.

Kolmogorov không thể chấp nhận việc coi Chiến tranh và Hòa bình như một phần tử nằm chung trong một tập hợp của tất cả mọi tiểu thuyết – nhưng ông có thể biểu đạt tính không thể dự đoán của nó bằng cách tính toán độ phức tạp của nó. Kolmogorov coi độ phức tạp của một đối tượng chính là độ dài của mô tả ngắn nhất về nó, hoặc là độ dài của thuật toán tạo ra đối tượng. Những đối tượng tất định đều đơn giản theo nghĩa rằng chúng có thể được sinh ra từ những thuật toán ngắn như một chuỗi tuần hoàn các số 0 và 1. Những đối tượng thực sự ngẫu nhiên, không thể dự đoán được thì đều phức tạp, bởi bất kỳ thuật toán nào sinh ra chúng cũng phải dài như chính bản thân chúng vậy. Ví dụ, những số vô tỷ - những con số không thể viết dưới dạng phân số - dãy chữ số đằng sau dấu thập phân xuất hiện ngẫu nhiên và hầu như không hề có một quy luật nào. Bởi vậy, hầu hết các số vô tỷ đều là các đối tượng phức tạp bởi vì chúng chỉ có thể được ghi lại bằng cách viết ra toàn bộ dãy các chữ số. Cách hiểu về độ phức tạp này phù hợp với ý niệm trực quan rằng không có phương pháp hay thuật toán nào có thể dự đoán các đối tượng ngẫu nhiên. Khái niệm này ngày nay rất quan trọng trong vai trò thước đo các tài nguyên tính toán cần có để biểu đạt một đối tượng, đồng thời có nhiều ứng dụng trong định tuyến mạng hiện đại, các thuật toán sắp xếp và nén dữ liệu.

Có thể nói Kolmogorov có một cuộc đời phức tạp, nếu ta căn cứ theo phương thức đo mà bản thân ông tạo ra. Cho tới lúc mất năm 1987 ở tuổi 84, ông đã không chỉ trải qua một cuộc cách mạng, hai lần Thế chiến và Chiến tranh lạnh, mà sự sáng tạo của ông đã chạm tới hầu hết các địa hạt trong toán học, vươn xa khỏi biên giới của khoa học hàn lâm. Dù chúng ta coi những bước đi ngẫu nhiên của ông trong cuộc đời là của người say hay của người nhặt nấm, thì những khúc rẽ và bước ngoặt của chặng đường ấy đều không dự đoán được và cũng không thể dễ dàng mô tả. Thành công của ông trong việc nắm bắt và áp dụng tính không dự đoán được đã làm hồi sinh lý thuyết xác suất, và đã tạo ra một miền đất cho vô hạn các dự án khoa học và kỹ thuật. Nhưng lý thuyết của ông cũng khuếch đại sự căng thẳng, giữa một bên là trực giác của con người về tính không thể dự đoán được, bên kia là sức mạnh hiển nhiên của công cụ toán học để mô tả nó.

Với Kolmogorov, những ý tưởng của ông không loại bỏ tính ngẫu nhiên mà cũng không khẳng định một bản tính bất định căn bản về thế giới của chúng ta, chúng chỉ cung cấp một ngôn ngữ đủ chặt chẽ để nói về những gì không thể biết chắc chắn. Ông từng nói, khái niệm "*ngẫu nhiên* *tuyệt đối*" cũng chẳng hợp lý hơn khái niệm "*tất định tuyệt đối*", và kết luận: "*Chúng ta không thể có những hiểu biết xác thực về sự tồn tại của những gì không thể biết.*" Nhưng, dẫu sao thì nhờ có Kolmogorov, chúng ta có thể giải thích khi nào và tại sao lại có sự không thể đó.

MỞ RỘNG BỔ ĐỀ SAWAYAMA VÀ ĐỊNH LÝ SAWAYAMA-THEBAULT

Đào Thanh Oai

TÓM TẮT

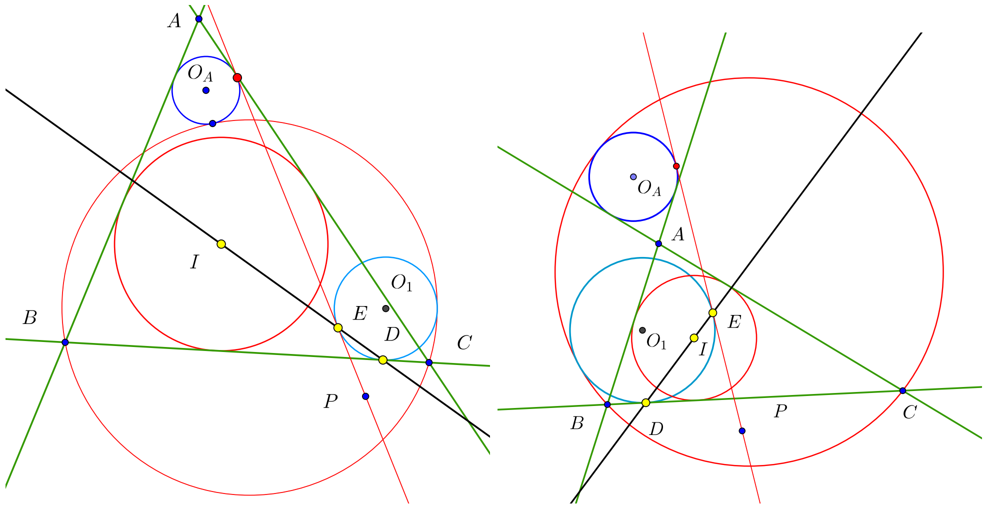
Trong bài viết này, tác giả đề xuất nhưng không chứng minh hai mở rộng của bổ đề Sawayama, và một một mở rộng định lý Sawayama-Thebault. Tác giả cũng đưa ra nhận xét còn có nhiều biến thể và các trường hợp đặc biệt của các mở rộng này được minh họa thông qua vấn đề thứ ba.

1. Mở đầu

Bổ đề Sawayama và định lý Sawayama-Thebault được giới thiệu khá chi tiết trong bài viết của tác giả người Pháp Jean-Louis Ayme [1]. Một số ứng dụng của bổ đề Sawayama và định lý Sawayama-Thebault trong các kỳ thi toán Olympic được đề cập đến trong bài viết của hai tác giả Trần Quang Hùng và Dương Ánh Ngọc [2]. Chính tác giả bài viết cũng đã từng đưa ra một mở rộng khác cho bổ đề Sawayama và định lý Sawayama-Thebault tại [3].
Trong bài viết này, tác giả đề xuất nhưng không chứng minh hai vấn đề chính, vấn đề thứ nhất là mở rộng bổ đề Sawayama, và vấn đề thứ hai là mở rộng định lý Sawayama-Thebault. Ngoài ra tác giả cũng đưa ra nhận xét còn có nhiều biến thể khác của hai vấn đề này, một ví dụ được đưa ra trong vấn đề 3.
Không giống với hầu hết các định lý hình học cổ điển khác việc mở rộng bổ đề Sawayama và định lý Sawayama-Thebault là hết sức khó khăn, tác giả bắt đầu tìm cách mở rộng nó từ giữa năm 2013 đến nay sau khoảng 4 năm tìm kiếm mở rộng bổ đề Sawayama và định lý Sawayama-Thebault thành công, tác giả đem giới thiệu nó đến với bạn đọc.
Trước khi đi vào phần chính của bài viết, tác giả nêu ra đây hai định nghĩa
- Đường tròn (O) được gọi là tiếp xúc trong với hai cạnh AB, AC nếu (O) và B cùng phía với AC, (O) và C cùng phía với AB.
- Đường tròn (O) được gọi là tiếp xúc ngoài với hai cạnh AB, AC nếu (O) và B khác phía với AC, (O) và C khác phía với AB.

2. Mở rộng thứ nhất của bổ đề Sawayama

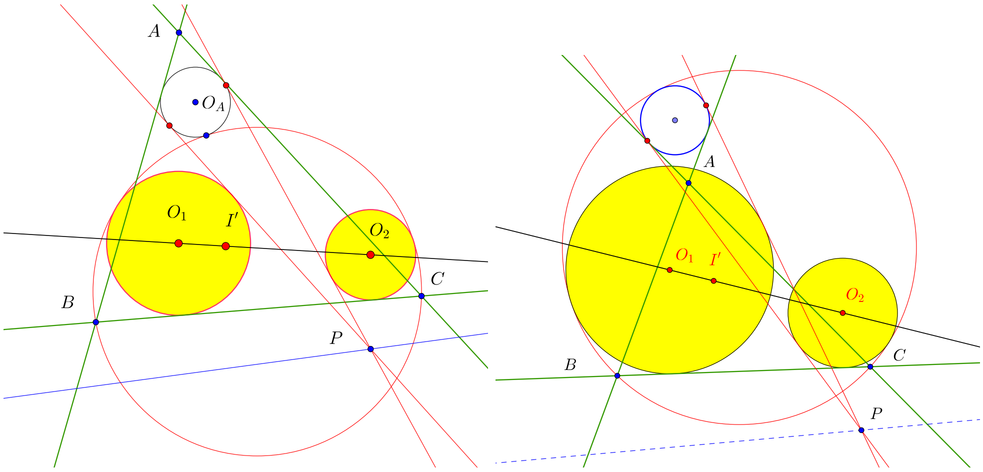
Vấn đề 1. *Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp. (O) là một đường tròn bất kỳ qua B, C. (O_A) là đường tròn tiếp xúc với các cạnh AB, AC và (O), sao cho điểm tiếp xúc của hai đường tròn (O_A), (O) và A cùng thuộc nửa mặt phẳng chia bởi BC. Cho P là điểm trong mặt phẳng nhưng nằm ngoài đường tròn (O_A), qua P kẻ đường thẳng ℓ tiếp xúc với (O_A). Gọi (O_1) là đường tròn tiếp xúc với BC, ℓ và (O_1), sao cho:*
1. Nếu (O_A) tiếp xúc trong với AB, AC và tiếp xúc ngoài với (O) thì đường tròn (O_1) và (O_A) khác phía với ℓ (Hình 1).
2. Nếu (O_A) tiếp xúc ngoài với AB, AC và tiếp xúc trong với (O) thì đường tròn (O_1) và (O_A) cùng phía với ℓ (Hình 2).
Tiếp điểm của (O_1) và BC, ℓ lần lượt là D, E. Chứng minh rằng D, E, I thẳng hàng.



Hình 1

3. Mở rộng định lý Sawayama-Thebault

Vấn đề 2. *Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp. (O) là một đường tròn bất kỳ qua B, C. (O_A) là đường tròn tiếp xúc với các cạnh AB, AC và (O), sao cho điểm tiếp xúc của hai đường tròn (O_A), (O) và điểm A cùng thuộc nửa mặt phẳng chia bởi BC. Cho P là điểm trong mặt phẳng nhưng nằm ngoài (O_A), qua P kẻ hai đường thẳng ℓ_1, ℓ_2 tiếp xúc với (O_A). Gọi (O_1) là đường tròn tiếp xúc với BC, ℓ_1 và (O), gọi (O_2) là đường tròn tiếp xúc với BC, ℓ_2 và (O) sao cho:*
1. Nếu (O_A) tiếp xúc trong với AB, AC và tiếp xúc ngoài với (O) thì (O_1) và (O_A) khác phía với ℓ_1, (O_2) và (O_A) khác phía với ℓ_2.
2. Nếu (O_A) tiếp xúc ngoài với AB, AC và tiếp xúc trong với (O) thì (O_1) và (O_A) cùng phía với ℓ_1, (O_2) và (O_A) cùng phía với ℓ_2.
Chứng minh rằng đường thẳng O_1O_2 sẽ đi qua một điểm cố định khi P di chuyển trên một đường thẳng cho trước (Hình 2)



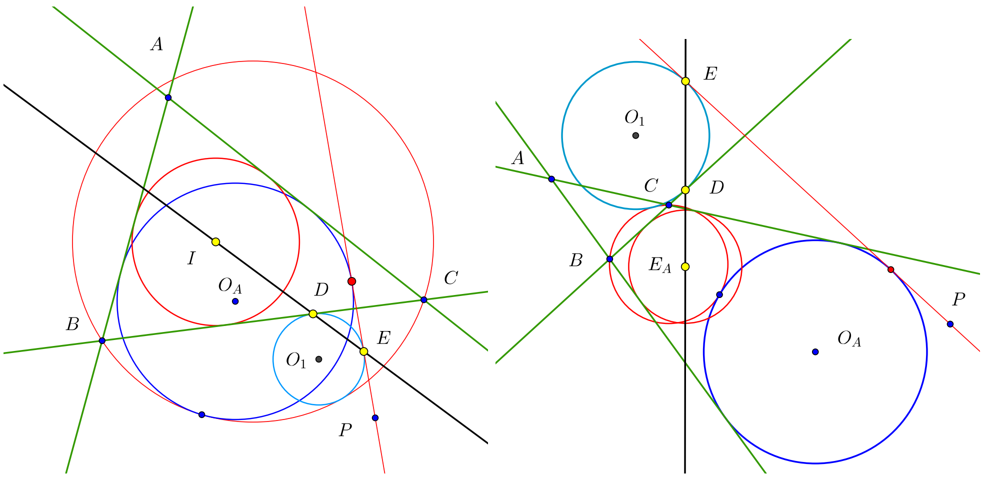
Hình 2

4. Biến thể

Vấn đề 3. *Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp, E_A là tâm đường tròn bàng tiếp góc A. (O) là một đường tròn bất kỳ qua B, C. (O_A) là đường tròn tiếp xúc trong với các cạnh AB, AC và tiếp xúc trong (hoặc ngoài) với (O), sao cho tiếp điểm của (O_A), (O) và điểm A không cùng thuộc nửa mặt phẳng chia bởi BC. Cho P là điểm trong mặt phẳng nhưng nằm ngoài (O_A), qua P kẻ đường thẳng ℓ tiếp xúc với (O_A). (O_1) là đường tròn tiếp xúc với BC, ℓ và (O) sao cho (O_1) và (O_A) cùng phía với ℓ. Tiếp điểm của (O_1) và BC, ℓ lần lượt là D, E. Chứng minh rằng*

1. D, E, I thẳng hàng nếu (O), (O_A) tiếp xúc trong (Hình 3)

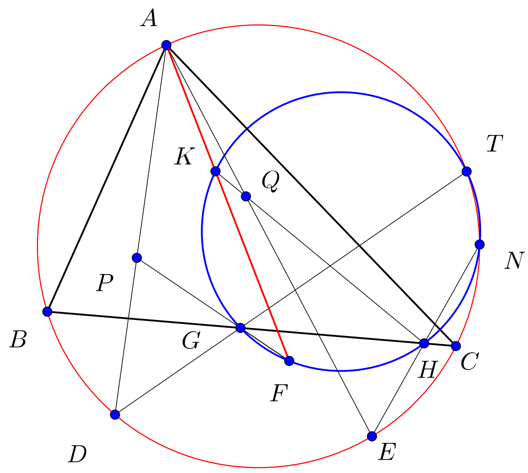
2. D, E, E_A thẳng hàng nếu (O), (O_A) tiếp xúc ngoài (Hình 3)



Hình 3

5. Mở rộng thứ hai của bổ đề Sawayama

P, Q là hai điểm đẳng giác với tam giác ABC. AP, AQ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt tại D, E. Hai đường thẳng bất kỳ qua D, E cắt đường tròn ngoại tiếp lần lượt tại hai điểm T, N và cắt BC tại hai điểm G, H. PG, HQ cắt đường tròn $(GHNT)$ tại K, F. Khi đó K, F, A thẳng hàng.



Hình 4

Tài liệu

[1] Jean-Louis Ayme, *Sawayama and Thébault's Theorem*, Forum Geometricorum, 3 (2003) 225–229.

[2] Trần Quang Hùng, Dương Ánh Ngọc, *Định lý Sawayama và Thébault trong các bài toán hình học thi Olympic*, Tạp chí Epsilon, Số 09, 06/2016

[3] Dao Thanh Oai, *A Generalization of Sawayama and Thébault's Theorem*, International Journal of Computer Discovered Mathematics, Volume 1, Number 3 (September 2016) pp.33-35.

ĐƯỜNG THẲNG STEINER. ĐIỂM ANTI-STEINER

Ngô Quang Dương, ĐHKHTN-ĐHQGHN

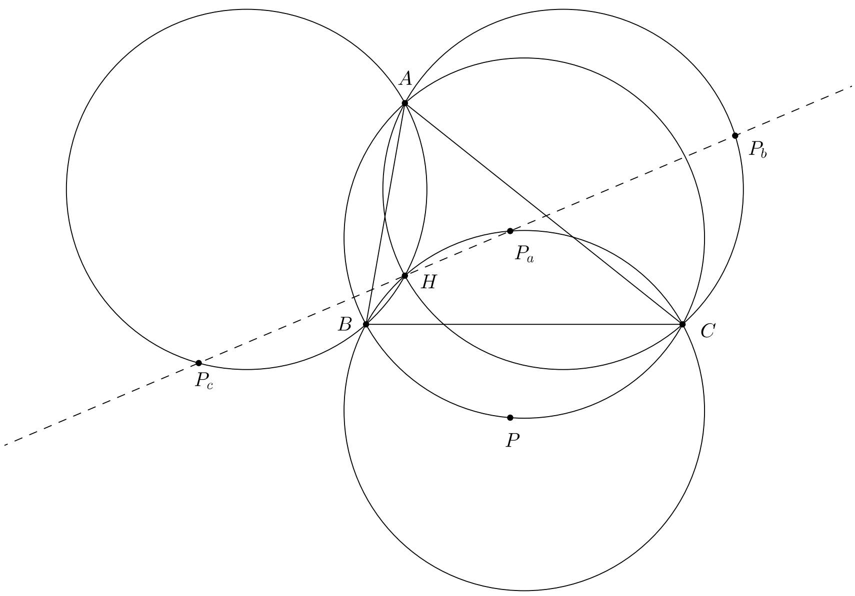
TÓM TẮT

Trong Epsilon số 7, tác giả đã có một bài viết về đường thẳng Simson. Như một sự tiếp nối, xin đem tới bạn đọc bài viết về đường thẳng Steiner và điểm Anti-Steiner.

1. Đường thẳng Steiner

1.1. Đường thẳng Steiner trong tam giác

Định lý 1 (Steiner). *P nằm trên đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ thì đối xứng của P qua ba cạnh tam giác và trực tâm $\triangle ABC$ thẳng hàng.*



Chứng minh. P_a, P_b, P_c là đối xứng của P qua BC, CA, AB, H là trực tâm $\triangle ABC$. Lưu ý

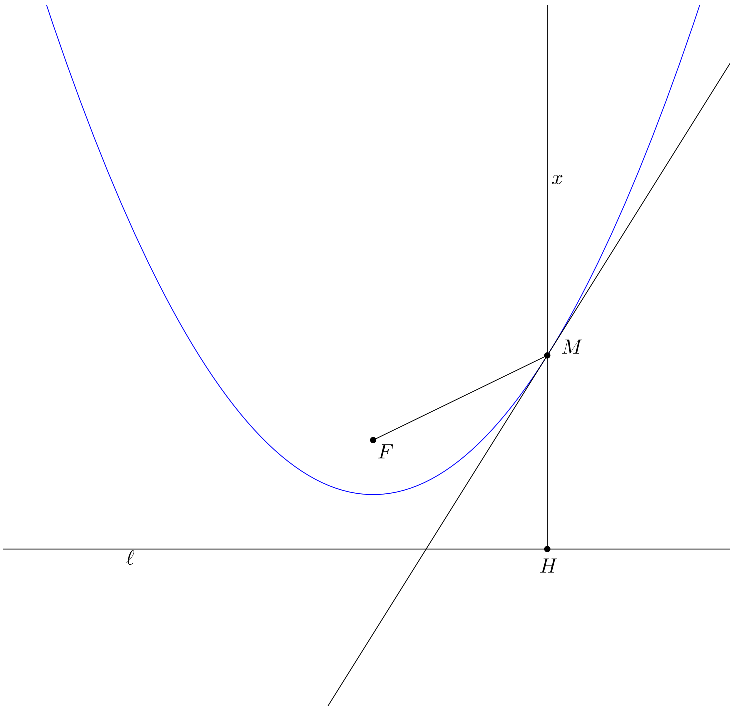
$$(HB, HC) = (AC, AB) \pmod{\pi} \qquad (P_aB, P_aC) = (PC, PB) = (AC, AB) \pmod{\pi}.$$

Từ đó, P_a lần lượt nằm trên (HBC), tương tự, P_b thuộc (HCA) và P_c thuộc (HAB).

$$\begin{aligned}(HP_b, HP_c) &= (HP_b, HA) + (HA, HP_c) \pmod{\pi}\\ &= (BP_b, BA) + (CA, CP_c) \pmod{\pi}\\ &= (BA, BP) + (CP, CA) \pmod{\pi}\\ &= 0 \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

Vậy P_b, P_c, H thẳng hàng. Mà từ đường thẳng Simson, P_a, P_b, P_c thẳng hàng nên H, P_a, P_b, P_c thẳng hàng. □

Định lý 2. *Parabol nhận P làm tiêu điểm và đường thẳng Steiner của P làm đường chuẩn thì tiếp xúc với ba cạnh tam giác.*



Chứng minh. Thực ra, bản chất của tính chất này lại là tính chất quang hình học của parabol: *Cho trước một parabola có tiêu điểm F, đường chuẩn ℓ và điểm M trên parabol. Tiếp tuyến của parabol tại M là phân giác ngoài của góc tạo bởi MF và tia Mx vuông góc với đường chuẩn, không cắt đường chuẩn.*

Ở đây xin đưa ra một chứng minh không sử dụng tọa độ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên đường chuẩn thì F và H đối xứng qua phân giác ngoài của $\widehat{FMx}$. Giả sử đường phân giác ngoài $\widehat{FMx}$ còn một điểm chung M' nữa với parabol thì $M'F = d(M', \ell)$. Mà $M'F = M'H$ nên $M'H = d(M', \ell)$ - điều này chứng tỏ M' trùng M. Vậy phân giác ngoài của $\widehat{FMx}$ tiếp xúc parabol. Ngoài ra ta có thể phát biểu tính chất quang hình học theo cách khác: *H nằm trên đường chuẩn thì trung trực FH tiếp xúc parabol.*

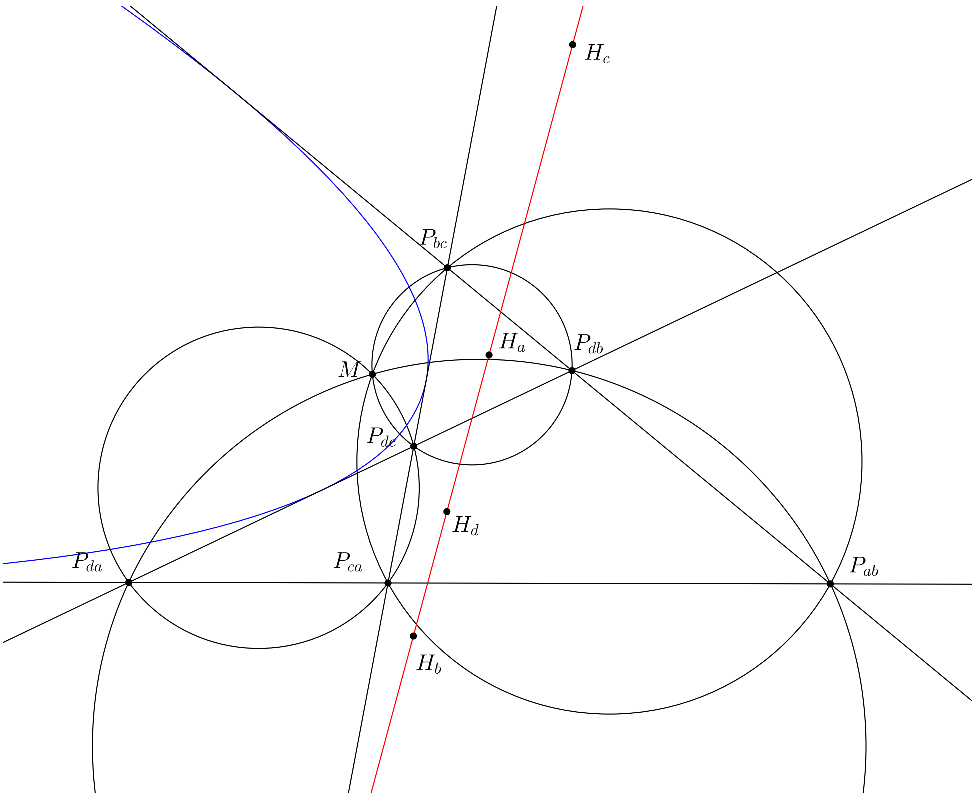
Quay lại với đường thẳng Steiner, theo như cách phát biểu trên thì trung trực PP_a, PP_b, PP_c tiếp xúc parabol. Nói cách khác là parabol tiếp xúc với ba cạnh của $\triangle ABC$. □

1.2. Đường thẳng Steiner, đường thẳng Newton của tứ giác toàn phần

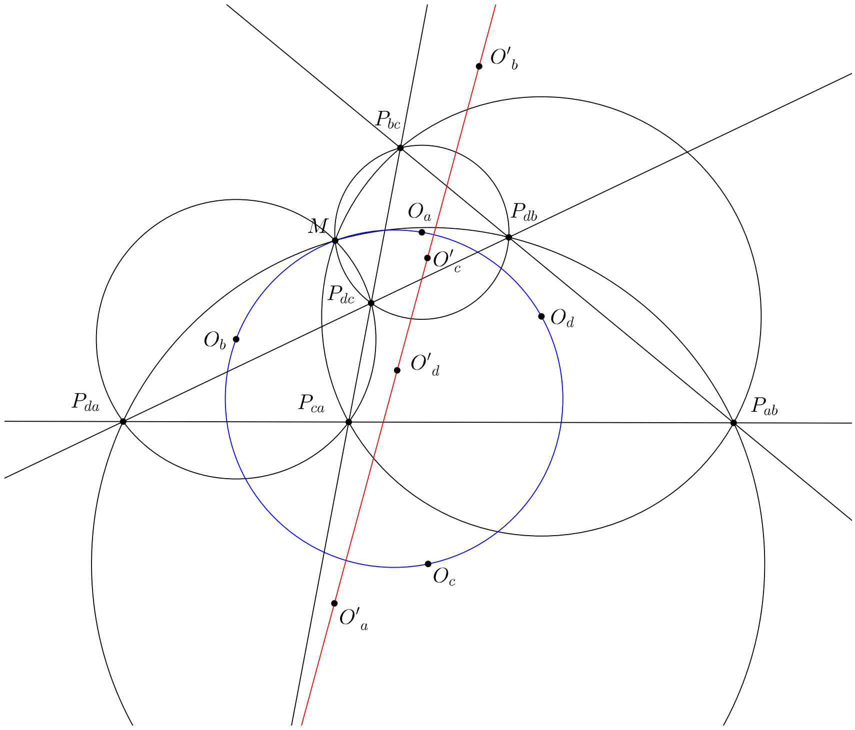
Ta định nghĩa tứ giác toàn phần là một hình phẳng, bao gồm 4 đường thẳng đôi một cắt nhau và các giao điểm của chúng, 3 đường bất kì trong số đó không đồng quy. Tứ giác toàn phần được kí hiệu chuẩn bởi 4 đường thẳng cấu thành nên nó. Trong rất nhiều tài liệu khác lại kí hiệu tứ giác toàn phần bằng 6 đỉnh của chúng - cách kí hiệu như vậy ngắn gọn, song dễ gây nhầm lẫn về thứ tự đỉnh. Trong mục này, ta xét tứ giác toàn phần tạo bởi 4 đường thẳng a, b, c, d và ta kí hiệu tứ giác toàn phần đó là (a, b, c, d).

Định lý 3. *Trực tâm $\triangle bcd$, $\triangle cda$, $\triangle cda$, $\triangle abc$ thẳng hàng. Trong đó $\triangle bcd$ là tam giác tạo bởi 3 đường thẳng b, c, d.*

Chứng minh. Theo định lý Miquel về các đường tròn đồng quy thì ta có được đường tròn ngoại tiếp của 4 tam giác thành phần $\triangle bcd$, $\triangle cda$, $\triangle dab$, $\triangle abc$ đồng quy tại một điểm M(điểm Miquel của tứ giác toàn phần). Từ đây lấy đối xứng M qua 4 cạnh của tứ giác toàn phần, theo định lý 1 ta có điều phải chứng minh. □



Định lý 4 (Đường tròn Miquel)**.** *Điểm Miquel của (a, b, c, d), tâm ngoại tiếp của 4 tam giác thành phần cùng thuộc một đường tròn.*



Dựa theo J.W.Clawson. Ở đây tác giả đưa ra cách chứng minh khá mới mẻ bằng nghịch đảo - để cho thấy mối liên hệ giữa đường tròn này với đường thẳng Steiner. Chỉ đơn giản bằng cộng góc, ta thu được các cặp tam giác sau đồng dạng thuận: $\triangle MP_{db}P_{dc} \sim \triangle MP_{ab}P_{ca}$, $\triangle MP_{dc}P_{bc} \sim \triangle MP_{da}P_{bc}$. Điều này dẫn tới hai hệ quả quan trọng:

$$MP_{bc} \cdot MP_{da} = MP_{ca} \cdot MP_{db} = MP_{ab} \cdot MP_{dc} = k.$$

và các góc $\angle(MP_{bc}, MP_{da})$, $\angle(MP_{ca}, MP_{db})$, $\angle(MP_{ab}, MP_{dc})$ có chung một phân giác ℓ. Xét phép biến hình Ψ là hợp của phép nghịch đảo cực M, phương tích k và phép đối xứng qua ℓ. Gọi MA', MB', MC', MD' là đường kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle bcd$, $\triangle cda$, $\triangle dab$, $\triangle abc$.

$$\Psi : P_{bc}, P_{da}, P_{ca}, P_{db}, P_{ab}, P_{dc} \mapsto P_{da}, P_{bc}, P_{db}, P_{ca}, P_{dc}, P_{ab}.$$

$$\Psi : (P_{db}P_{dc}P_{bc}) \to \overline{P_{ca}, P_{ab}, P_{ad}}.$$

Do đó, $\Psi(A')$ là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng $\overline{P_{ca}, P_{ab}, P_{ad}}$, hay tương đương là qua phép biến hình Ψ, tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle bcd$ thành đối xứng của M qua a. Tương tự, Ψ biến tâm ngoại tiếp của 4 tam giác thành phần thành đối xứng của điểm Miquel qua 4 cạnh của tứ giác toàn phần. Do đó 4 tâm đường tròn ngoại tiếp và điểm Miquel cùng thuộc một đường tròn. □

Chú ý. *(1) Theo định lý 2, có duy nhất một parabol tiếp xúc với 4 cạnh của tứ giác toàn phần và parabol đó có tiêu điểm là điểm Miquel, đường chuẩn là đường thẳng Steiner.*
(2) Phép biến hình Ψ được giới thiệu lần đầu bởi J.W.Clawson trong một bài báo trên AMM vào năm 1919[3] và có nhiều ý nghĩa quan trọng trong việc tìm hiểu các đối tượng của tứ giác toàn phần và trong việc giải quyết nhiều bài toán. Ψ biến a, b, c, d lần lượt thành đường tròn ngoại tiếp $\triangle bcd$, $\triangle cda$, $\triangle dab$, $\triangle abc$. Từ đó ta thu được hệ quả đẹp là tứ giác toàn phần ngoại tiếp một đường tròn khi và chỉ khi tồn tại một đường tròn tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp của 4 tam giác bcd, cda, dab, abc.

Định lý 5 (Đường thẳng Newton và đường thẳng Steiner)**.** *Đường thẳng Steiner vuông góc với đường thẳng đi qua trung điểm của $P_{da}P_{bc}$, $P_{db}P_{ca}$, $P_{dc}P_{ab}$.*

Chứng minh. H_a, H_b, H_c, H_d là trực tâm $\triangle bcd$, $\triangle cda$, $\triangle dab$, $\triangle abc$. Gọi A_d, B_d, C_d là hình chiếu vuông góc của H_a lên các đường thẳng b, c, d. Với trực tâm thì ta luôn có được

$$\overline{H_aP_{bc}} \cdot \overline{H_aA_d} = \overline{H_aP_{dc}} \cdot \overline{H_aB_d} = \overline{H_aP_{db}} \cdot \overline{H_aC_d}.$$

Điều này tương đương với việc H_a có cùng phương tích với các đường tròn đường kính $P_{bc}P_{da}$, $P_{ca}P_{db}$, $P_{ab}P_{dc}$. Tương tự với H_b, H_c, H_d là có được điều phải chứng minh. □

Chú ý. *Nói thêm về lịch sử. Đường thẳng Steiner là trục đẳng phương của ba đường tròn đường kính $P_{bc}P_{da}$, $P_{ca}P_{db}$, $P_{ab}P_{dc}$ chính là nội dung của định lý Gauss-Bodenmiller. Trước Gauss, Newton đã khám phá ra rằng mọi conic tiếp xúc với 4 cạnh của tứ giác toàn phần đều có tâm thuộc một đường thẳng(các bạn học sinh được biết tới và sử dụng trường hợp đặc biệt khi conic là đường tròn tiếp xúc 4 cạnh tứ giác toàn phần). Đường thẳng Newton vì thế còn được gọi là đường thẳng Newton-Gauss hay đường thẳng Gauss.*

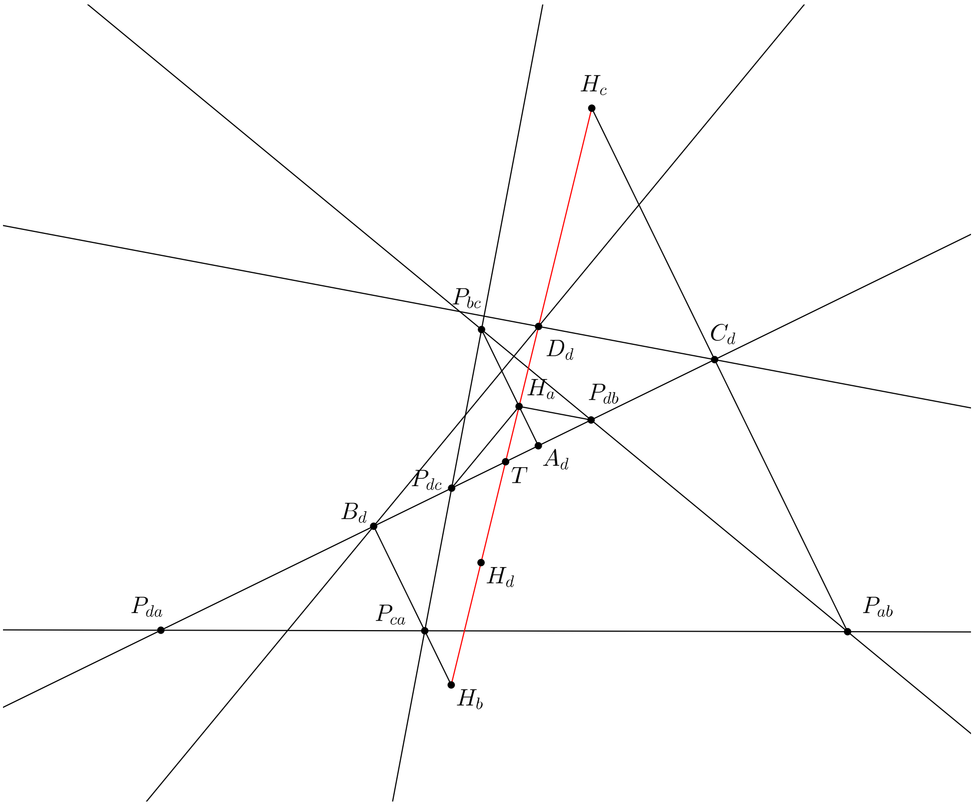
Đường thẳng Steiner còn đi qua một số điểm đặc biệt khác.

Định lý 6. *Một số điểm khác trên đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần.*

1. *(A.Dixit, D.Grinberg) Cực trực giao của a, b, c, d lần lượt với $\triangle bcd$, $\triangle cda$, $\triangle dab$, $\triangle abc$.*

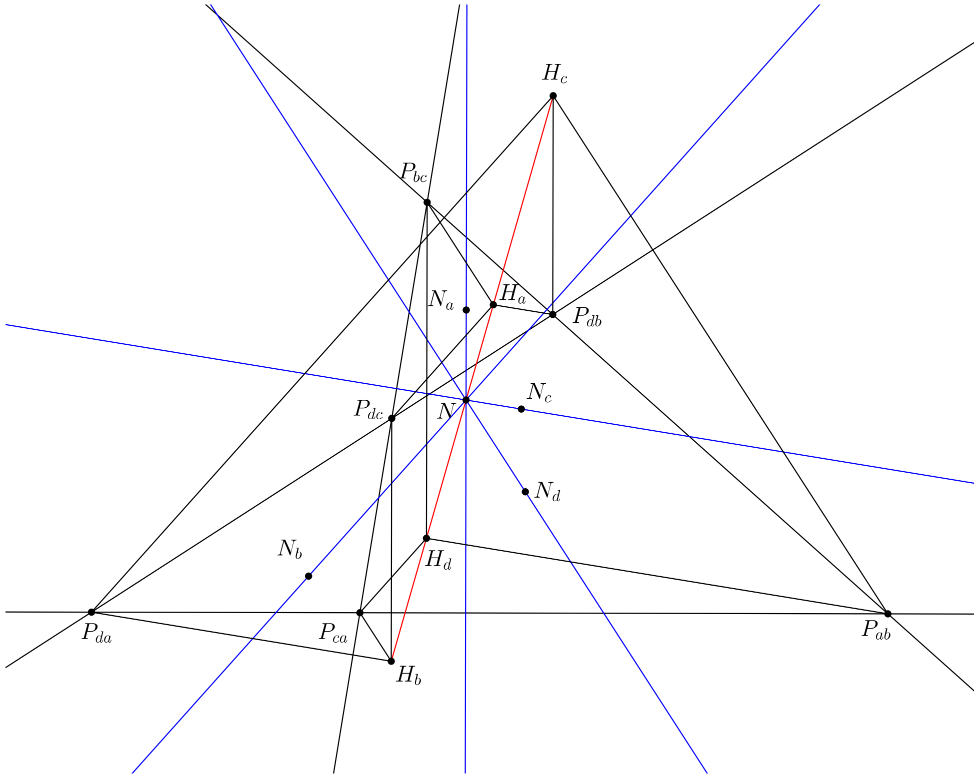
2. *(Điểm Morley) N_a, N_b, N_c, N_d là tâm đường tròn chín điểm của $\triangle bcd$, $\triangle cda$, $\triangle dab$, $\triangle abc$. Đường thẳng đi qua N_a, N_b, N_c, N_d và vuông góc với a, b, c, d đồng quy tại một điểm trên đường thẳng Steiner của (a, b, c, d).*

Chứng minh. Tương tự như trong chứng minh định lý 5, ta định nghĩa các điểm B_c, B_d, B_a, C_d, C_a, C_b, D_a, D_b, D_c.



1. D_d là cực trực giao của d với $\triangle abc$. Khi đó, B_dD_d, C_dD_d vuông góc với b, c. Dễ thấy $\triangle B_dC_dD_d$ và $\triangle P_{dc}P_{db}H_a$ có các cạnh tương ứng song song nên có duy nhất một phép vị tự biến $\triangle B_dC_dD_d$ thành $\triangle P_{dc}P_{db}H_a$, tâm của phép vị tự là T - giao điểm của D_dH_a với d. Theo định lý Thales
$$\frac{\overline{TH_a}}{\overline{TD_d}} = \frac{\overline{TP_{dc}}}{\overline{TB_d}} = \frac{\overline{T_{db}}}{\overline{TC_d}}.$$
do đó $\overline{TP_{dc}} \cdot \overline{TC_d} = \overline{T_{db}} \cdot \overline{TB_d}$ nên T thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính $P_{ab}P_{dc}$ và $P_{ca}P_{db}$. Điều này có nghĩa là D_d cũng thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn này, tức là D_d thuộc đường thẳng Steiner của (a, b, c, d).

2. Các chứng minh khác của định lý này đều phụ thuộc vào hình vẽ, hoặc dùng lượng giác. Đây là một ứng dụng đơn giản của phép chiếu vector. Ở đây ta chỉ ra điểm đồng quy là trọng tâm của 4 điểm H_a, H_b, H_c, H_d. Gọi G_a là trọng tâm $\triangle bcd$.



$$\overrightarrow{N_aP_{bc}} + \overrightarrow{N_aP_{db}} + \overrightarrow{N_aP_{dc}} = 3\overrightarrow{N_aG_a} = -\overrightarrow{N_aH_a}.$$

Vì vậy N_a là trọng tâm của 4 điểm P_{bc}, P_{db}, P_{dc}, H_a. Kí hiệu P_{ja} là phép chiếu theo phương vuông góc với a xuống đường thẳng Steiner thì:

$$P_{ja} : P_{bc}, P_{db}, P_{dc}, H_a, N_a \mapsto H_d, H_c, H_b, H_a, N.$$

Do phép chiếu vector bảo toàn bộ số tâm tỉ cự nên $\overrightarrow{NH_a} + \overrightarrow{NH_b} + \overrightarrow{NH_c} + \overrightarrow{NH_d} = \overrightarrow{0}$. Do vậy N là trọng tâm của H_a, H_b, H_c, H_d. Chứng minh tương tự, đường thẳng qua N_b, N_c, N_d, vuông góc b, c, d đều đi qua N.

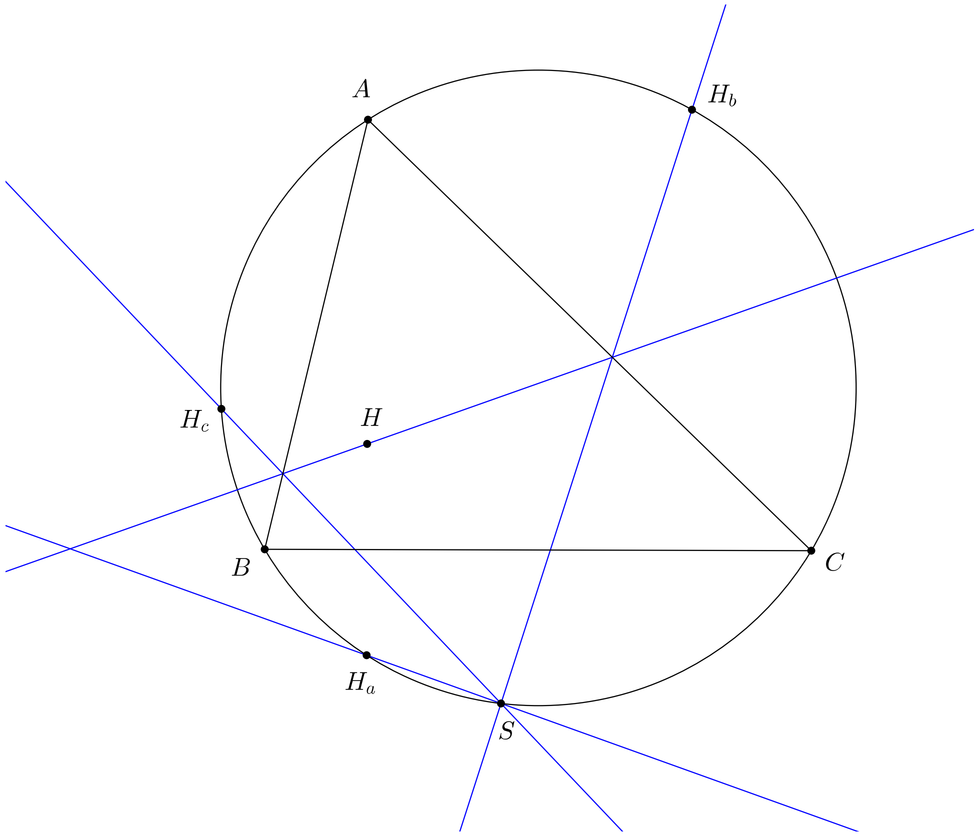
□

Chú ý. *Đối với tất cả các bạn học sinh, định lý 6.2 được biết tới là bài IMO Shortlist 2009 nhưng thực tế đã được phát hiện và đề cập bởi Frank Morley(đây cũng chính là tác giả của định lý tam giác đều từ việc chia ba các góc cực kì nổi tiếng) trong một bài báo [2] vào năm 1903 - sớm hơn tới hơn một thế kỉ.*

2. Điểm Anti-Steiner

Từ một điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác, ta xác định được một đường thẳng Steiner qua trực tâm. Điều ngược lại là một đường thẳng qua trực tâm thì có một điểm trên đường tròn ngoại tiếp nhận đường thẳng ấy làm đường thẳng Steiner.

Định lý 7 (Định lý Collings)**.** *ℓ là một đường thẳng qua trực tâm $\triangle ABC$, đối xứng của ℓ qua ba cạnh của $\triangle ABC$ đồng quy tại một điểm trên (ABC).*



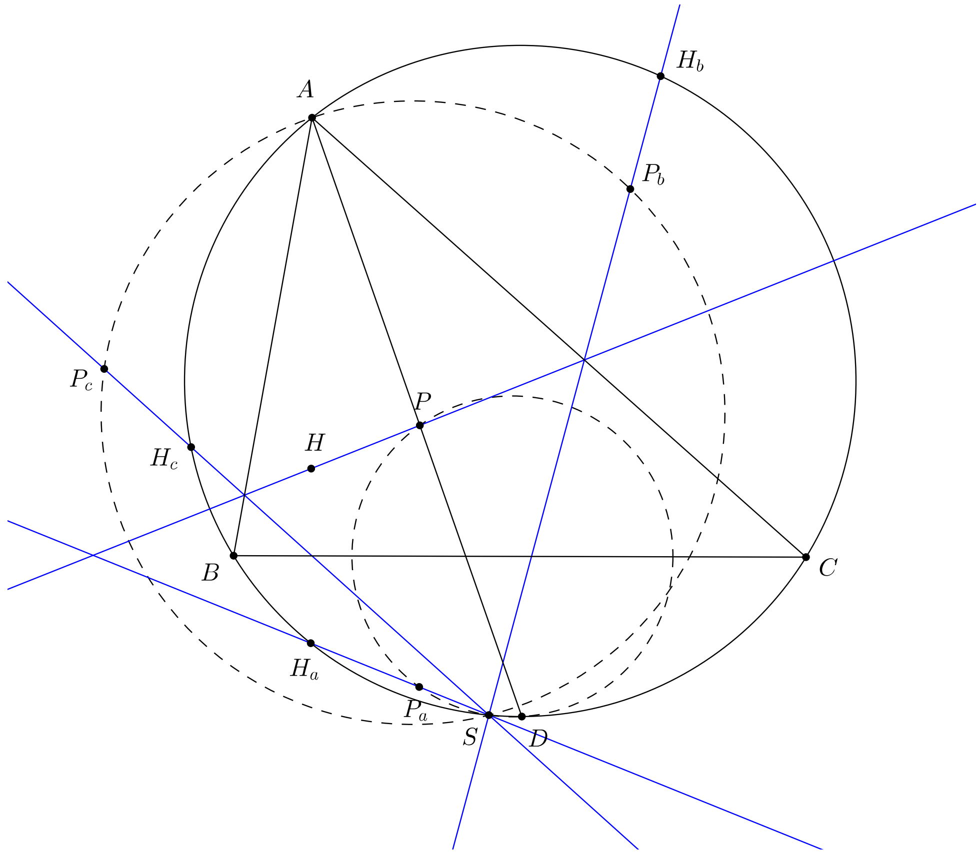
Chứng minh. ℓ cắt BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. H_a, H_b, H_c đối xứng với H qua BC, CA, AB. Do $(HB, HC) = (AC, AB)$, $(HC, HA) = (BA, BC)$, $(HA, HB) = (CB, CA)$ nên H_a, H_b, H_c thuộc (ABC).

$$\begin{aligned}(EH_b, FH_c) &= (EH_b, CA) + (AC, AB) + (AB, FH_c) \pmod \pi \\ &= (CA, \ell) + (AC, AB) + (\ell, AB) \pmod \pi \\ &= 2(AC, AB) \pmod \pi \\ &= (H_aH_b, H_aH_c) \pmod \pi.\end{aligned}$$

Từ điều này dẫn đến giao điểm của EH_b, FH_c thuộc (ABC). Tương tự, giao điểm của FH_c và DH_a thuộc (ABC) nên DH_a, EH_b, FH_c đồng quy trên (ABC). □

Chú ý. *Điểm đồng quy được gọi là điểm Collings hoặc điểm Anti-Steiner của đường thẳng ℓ. Có thể dễ dàng nhận thấy rằng đối xứng của điểm này qua ba cạnh của $\triangle ABC$ đều thuộc ℓ. Ngoài ra, người ta còn gọi điểm Anti-Steiner của đường thẳng HP là điểm Anti-Steiner của P, hay điểm Collings của P.*

Định lý 8. *Cho 4 điểm A, B, C, P. P_a, P_b, P_c đối xứng với P qua BC, CA, AB. PA, PB, PC cắt (ABC) tại D, E, F. Khi đó (AP_bP_c), (BP_cP_a), (CP_aP_b), (PP_aD), (PP_bE), (PP_cF) đi qua điểm Anti-Steiner của P.*



Chứng minh. Lấy H là trực tâm $\triangle ABC$ và H_a, H_b, H_c đối xứng với H qua BC, CA, AB. Theo định lý Collings, P_aH_a, P_bH_b, P_cH_c đồng quy tại một điểm S. Chỉ cần chứng minh (AP_bP_c) và (PP_aD) đi qua S là đủ. Chỉ đơn giản bằng cộng góc

$$\begin{aligned}(SP_b, SP_c) &= (H_bP_b, H_cP_c) \pmod \pi\\ &= (H_bP_b, AC) + (AC, AB) + (AB, H_cP_c) \pmod \pi\\ &= (AC, HP) + (AC, AB) + (HP, AB) \pmod \pi\\ &= 2(AC, AB) \pmod \pi\\ &= (AP_b, AP_c) \pmod \pi.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(SD, SP_a) &= (SD, SH_a) \pmod \pi\\ &= (AD, AH_a) \pmod \pi\\ &= (PD, PP_a) \pmod \pi \; (AH_a \text{ song song } PP_a).\end{aligned}$$

Từ đó kết luận (AP_bP_c), (PP_aD) và tương tự, các đường tròn còn lại đi qua S. □

Điểm Anti-Steiner còn xuất hiện trong chứng minh của các định lý Fontene.

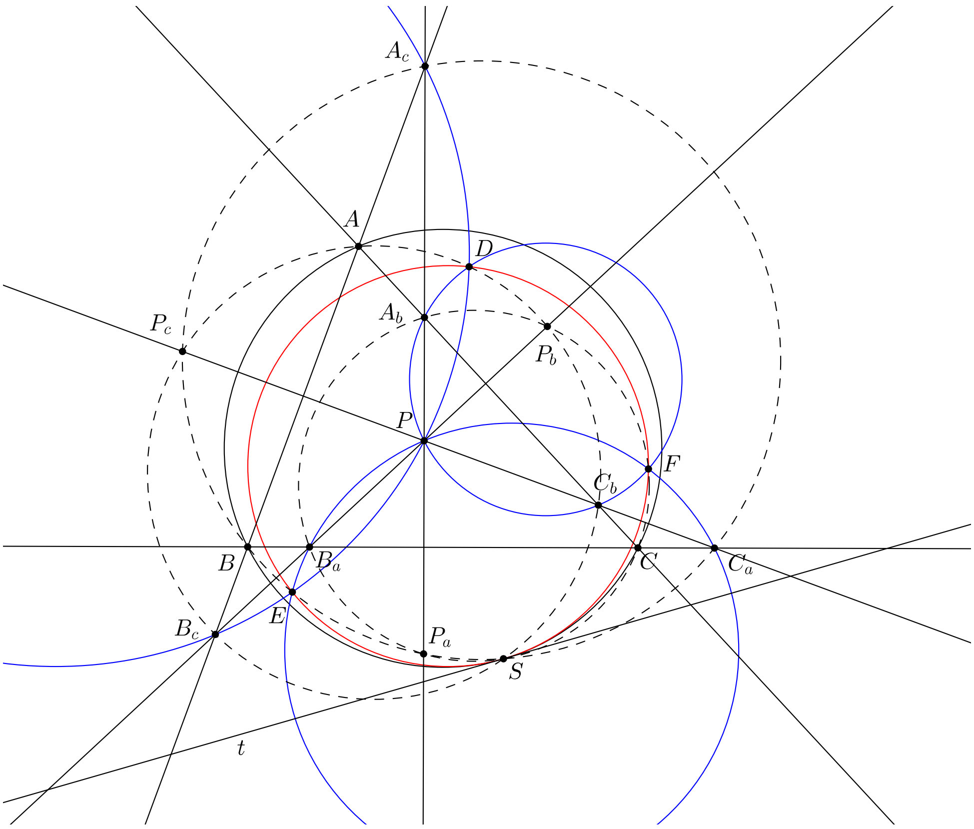
Định lý 9 (Định lý Fontene)**.** *$\triangle ABC$ có tâm ngoại tiếp O. P là điểm bất kì. D, E, F là hình chiếu vuông góc của P lên BC, CA, AB. EF, FD, DE lần lượt cắt đường trung bình ứng với A, B, C của $\triangle ABC$ tại X, Y, Z.*

1. *DX, EY, FZ đồng quy tại giao điểm của (DEF) và đường tròn chín điểm của $\triangle ABC$.*

2. *Khi P chạy trên đường thẳng đi qua O thì (DEF) luôn đi qua một điểm cố định.*

Trong định lý 9, điểm đồng quy chính là điểm Anti-Steiner của P với tam giác có các đỉnh là trung điểm BC, CA, AB. Định lý 9, cùng với một số cấu hình khác có xuất hiện điểm Anti-Steiner, bạn đọc có thể tham khảo bài viết của tác giả tại [4].
Một điều đáng nói là điểm Anti-Steiner còn có mặt trong một số bài toán tiếp xúc. Ở đây giới thiệu một phát hiện đẹp của kĩ sư Đào Thanh Oai.

Định lý 10. *[5]Cho $\triangle ABC$ và điểm P bất kì.*
Đường thẳng qua P và vuông góc BC cắt AB, AC tại A_c, A_b.
Đường thẳng qua P và vuông góc CA cắt BC, BA tại B_a, B_c.
Đường thẳng qua P và vuông góc AB cắt CA, CB tại C_b, C_a.
(PC_bA_b) cắt (PA_cB_c) tại D khác P.
(PA_cB_c) cắt (PB_aC_a) tại E khác P.
(PC_bA_b) cắt (PA_cB_c) tại F khác P.
Khi đó (DEF) tiếp xúc (ABC) tại điểm Collings của P.



Chứng minh. Trước khi có thể chỉ ra hai đường tròn tiếp xúc, ta phải chỉ ra được (DEF) đi qua điểm Collings S. Ở đây, để tạo ra các liên kết hình học có liên quan tới điểm S, ta lấy P_a, P_b, P_c là các điểm đối xứng với P lần lượt qua BC, CA, AB. Các bộ điểm sau đồng viên

$$(S, A, P_b, P_c, C_b, B_c, D) \quad (S, B, P_c, P_a, C_a, A_c, E) \quad (S, C, P_a, P_b, A_b, B_a, E).$$

Có thể giải thích điều này một cách đơn giản. Đầu tiên là theo định lý 8, cùng với việc P là trực tâm của $\triangle AB_cC_b$ mà P_b, P_c đối xứng với P qua AC_b, AB_c nên P_b, P_c thuộc (AB_cC_b).

$$\begin{aligned}(DB_c, DC_b) &= (DB_c, DP) + (DP, DC_b) \pmod \pi\\ &= (A_cB_c, A_cP) + (A_bP, A_bC_b) \pmod \pi\\ &= (AB, AC) \pmod \pi\\ &= (AB_c, AC_b) \pmod \pi.\end{aligned}$$

Do vậy D thuộc (AB_cC_b).
Sử dụng các bộ điểm đồng viên trên, cùng với định lý 8 là đủ để sử dụng góc định hướng. Ta sẽ chỉ ra $(DE, DF) = (SE, SF) \pmod \pi$.

$$\begin{aligned}(DE, DF) &= (DE, DP) + (DP, DF) \pmod \pi\\ &= (A_cE, A_cP) + (A_bP, A_bF) \pmod \pi\\ &= (A_cE, A_bF) \pmod \pi\\ &= (A_cE, A_cB) + (A_cB, A_bC) + (A_bC, A_bF) \pmod \pi\\ &= (SE, SB) + (AB, AC) + (SC, SF) \pmod \pi\\ &= (SE, SB) + (SB, SC) + (SC, SF) \pmod \pi\\ &= (SE, SF) \pmod \pi.\end{aligned}$$

Như vậy S, D, E, F đồng viên. St là tiếp tuyến tại S của (DEF), chỉ cần chứng minh St cũng là tiếp tuyến của (ABC) là đủ.

$$\begin{aligned}(St, SA) &= (St, SD) + (SD, SA) \pmod \pi\\ &= (ES, DE) + (C_bD, C_bA) \pmod \pi\\ &= (ES, EA_c) + (EA_c, ED) + (C_bD, C_bA_b) \pmod \pi\\ &= (BS, BA_c) + (PA_c, PD) + (PD, PA_b) \pmod \pi\\ &= (BS, BA) \pmod \pi.\end{aligned}$$

Do đó ta kết luận St là tiếp tuyến của (ABC), vì thế (ABC) và (DEF) tiếp xúc nhau tại S. $\square$

Kết thúc bài viết. tác giả đưa ra một số bài toán đề nghị.

Bài 1. *Cho $\triangle ABC$ và một điểm P không nằm trên (ABC). PA, PB, PC cắt (ABC) tại D, E, F khác A, B, C. Chứng minh rằng tam giác tạo bởi trung trực PD, PE, PF thấu xạ với $\triangle ABC$ tại một điểm T trên (ABC) và PT đi qua điểm Anti-Steiner của P với $\triangle ABC$.*

Bài 2. *Cũng với kí hiệu như bài 1, chứng minh rằng trục thấu xạ của $\triangle ABC$ và tam giác tạo bởi trung trực của PD, PE, PF là trung trực của SP.*

Tài liệu

[1] Ngô Quang Dương, *Đường thẳng Simson*, Epsilon 7, tháng 2 năm 2016

[2] F. Morley, *Orthocentric properties of the plane n-Line*, Trans Amer Math Soc, 4 (1903) 1-12
http://www.ams.org/journals/tran/1903-004-01/S0002-9947-1903-1500618-2/S0002-9947-1903-1500618-2.pdf

[3] J.W.Clawson, *The complete quadrilateral*, American Mathematics Monthly, volume 20, 1919, pages 232-262
http://www.jstor.org/stable/1967118

[4] Quang Duong's blog, *Nine-point circle, pedal circle and cevian circle*
https://blogcuaquangduong.blogspot.com/2015/08/nine-point-circle-pedal-circle-cevian.html

[5] Dao Thanh Oai, Advanced Plane Geometry
https://mg.mail.yahoo.com/neo/launch?.rand=fdtrlcbalj39j#8858149413

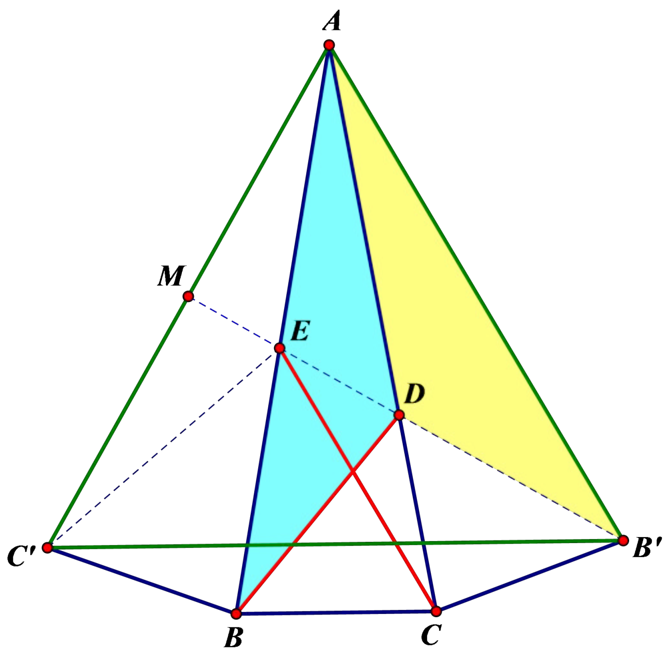
VỀ BÀI TOÁN TAM GIÁC 80-80-20 (TIẾP THEO)

Lê Phúc Lữ
(Thành phố Hồ Chí Minh)

GIỚI THIỆU

Tiếp theo Epsilon số 9, trong bài viết này, chúng ta sẽ xem xét tiếp 5 lời giải nữa cho bài toán tam giác $80-80-20$. Qua 10 lời giải cho bài toán thú vị này, ta thấy rằng hầu hết các cách tiếp cận đều tìm cách dựng tam giác đều và khai thác tính chất đặc biệt của mô hình. Bên cạnh đó, sẽ đi đến việc mở rộng trong một số giả thiết tương tự khác.

Cách 6. (của Alexander Kornienko)



Gọi B' là điểm đối xứng với B qua AC và C' là điểm đối xứng với C qua AB. Khi đó, dễ thấy rằng $AB' = AB = AC = AC'$ nên tam giác $AB'C'$ cân.

Ngoài ra, $\angle B'AC' = 20^\circ + 20^\circ + 20^\circ = 60^\circ$ nên tam giác $AB'C'$ đều. Vì $\angle AB'D = \angle ABD = 30^\circ$ nên $B'D$ là phân giác của $\angle AB'C'$ hay $B'D$ là trung trực của AC'.

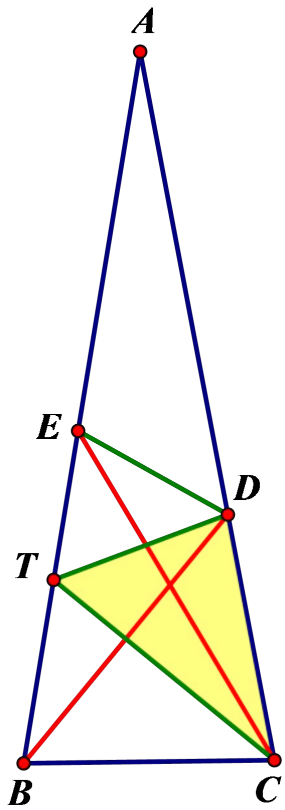
Ta thấy $EC = EA$ (vì $\angle ECA = \angle EAC = 20^\circ$) nên $EC' = EC = EA$ hay E cách đều A, C'.

Do đó, $E \in DB'$ hay E, D, B', M thẳng hàng với M là trung điểm của AC'.

Vậy ta có

$$\angle CED = 180^\circ - (\angle C'EM + \angle C'EB + \angle BEC) = 180^\circ - (70^\circ + 40^\circ + 40^\circ) = 30^\circ.$$

Cách 7. (của Sergey Saprikin)



Gọi T là giao điểm phân giác $\angle ACB$ với AB. Ta có:

$$\angle BTC = 180^\circ - (\angle TBC + \angle TCB) = 180^\circ - (80^\circ + 40^\circ) = 60^\circ.$$

Ngoài ra, dễ thấy $\Delta BTC = \Delta DTC(c.g.c)$ nên $\angle DTC = 60^\circ$.

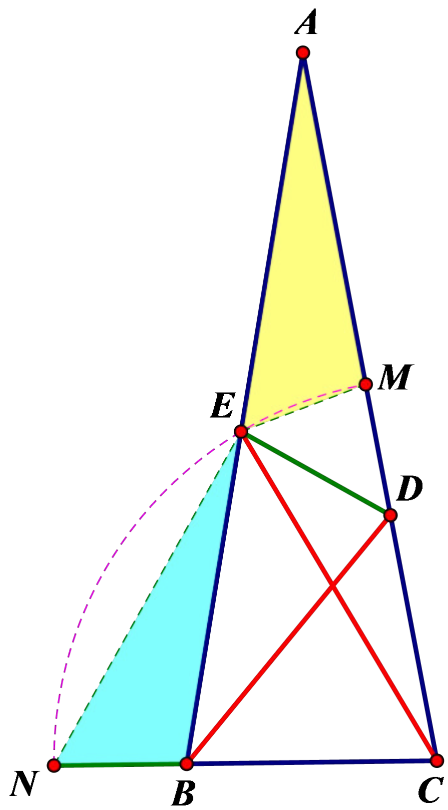
Do đó, TE là phân giác ngoài của góc $\angle DTC$. Xét tam giác DTC có E là giao điểm của phân giác ngoài của $\angle DTC$ và phân giác trong của $\angle DCT$ nên E là tâm đường tròn bàng tiếp góc C. Do đó $\angle EDT = \angle EDA$.

Cũng trong tam giác DTC, ta có $\angle DTC = 60^\circ$, $\angle DCT = 40^\circ$ nên $\angle CDT = 80^\circ$. Do đó

$$\angle EDT = \angle EDA = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$$

nên
$$\angle EDC = 50^\circ + 80^\circ = 130^\circ.$$
Vậy ta có
$$\angle CED = 180^\circ - (130^\circ + 20^\circ) = 30^\circ.$$

Cách 8. (bởi Luke Rapley)



Đường tròn tâm C, bán kính CE cắt CA, CB lần lượt tại M, N.

Tam giác CEN cân tại C, có $\angle ECB = 60^\circ$ nên tam giác này đều. Suy ra $EN = EC$. Hơn nữa, tam giác EAC cân tại E nên $EA = EC = EN$.

Ngoài ra, $\angle BEN = 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ = \angle EAM$.

Xét hai tam giác BEN và MAE có: $\angle BEN = \angle EAM$, $EN = AE$ và
$$BE = AB - AE = AC - EC = AC - CM = AM.$$

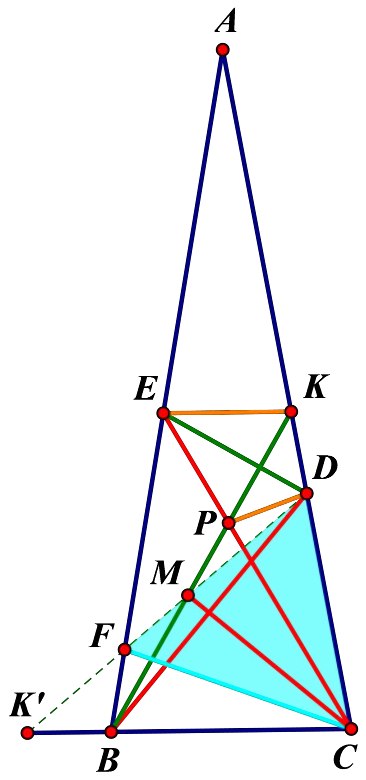
Do đó, hai tam giác này bằng nhau, suy ra $BN = EM$. Mặt khác $MD = CM - CD = CN - CB = BN$ nên $ME = MD$ hay tam giác MED cân tại M.

Chú ý rằng
$$\angle DME = \angle 180^\circ - \angle AME = 180^\circ - \angle EBN = 80^\circ.$$

Ta tính được $\angle MED = \angle MDE = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$.

Do đó $\angle CED = \angle CEM - \angle DEM = 30^\circ$.

Cách 9. (bởi Mariano Perez)



Trên AB lấy điểm F sao cho $CF = CB$. Khi đó, ta có $CD = CB = CF$ nên tam giác CDF cân. Hơn nữa, $\angle FCB = 180^\circ - 2 \cdot 80^\circ = 20^\circ$ nên $\angle FCD = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$. Suy ra tam giác CDF đều.

Xét $K \in AC$ sao cho $\angle CBK = 60^\circ$ và đặt P giao điểm của CE, BK.

Khi đó, ta cũng có CBP đều nên tồn tại phép quay tâm C biến CBP thành CFD. Do đó, gọi M là giao điểm của DF, BP thì CM là phân giác của $\angle ACB$.

Xét phép đối xứng qua trục CM, ta có: P biến thành F, D biến thành B. Giả sử K biến thành K' thì $K' \in BC$.

Ta có:

$$\angle FCK' = \angle PCK = 20^\circ, \angle CFK' = \angle CPK = 120^\circ.$$

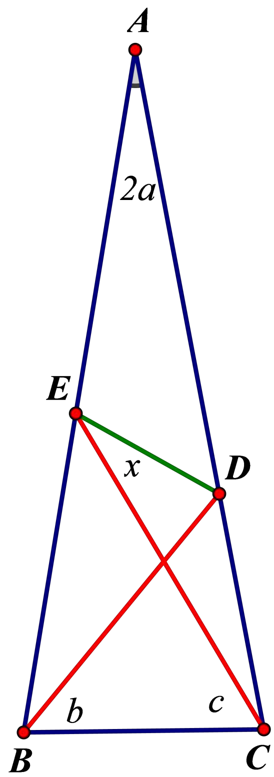
Do đó $\angle CK'F = 40^\circ$ mà $\angle FBK' = 100^\circ$ nên $\angle BFK' = 40^\circ$. Suy ra $\angle DPK = \angle BFK' = 40^\circ$ và $DP = DK$.

Chú ý rằng tam giác CPK là đều và $EK = EP, DK = DP$ nên ED là trung trực của PK. Vì thế nên ED cũng là phân giác của $\angle PEK$.

Vậy ta có

$$\angle CED = \angle PED = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Cách 10. Ta sẽ giải bài toán tổng quát. Đặt $\angle A = 2a, \angle DBC = b, \angle ECB = c, \angle CED = x$.



Theo định lý sin, ta có

$$\frac{CD}{\sin x} = \frac{CE}{\sin(90^\circ + a + c - x)},$$
$$\frac{CE}{\sin(90^\circ - a)} = \frac{CB}{\sin(90^\circ - a - c)},$$
$$\frac{CD}{\sin b} = \frac{BC}{\sin(90^\circ + a - b)}$$

Từ đó, ta suy ra đẳng thức

$$\frac{\cos(a + c - x)}{\sin x} = \frac{\cos(a - b)\cos a}{\cos(a - c)\sin b}.$$

Mặt khác $\cos(a+c-x) = \cos(a+c)\cos x + \sin(a+c)\sin x$ nên

$$\begin{aligned}
&\cos(a+c)\cot x + \sin(a+c) = \frac{\cos(a-b)\cos a}{\cos(a-c)\sin b}\\
\Leftrightarrow\ &\cos(a+c)\cot x + \sin(a+c) = \frac{\cos(a-b)\cos a}{\cos(a-c)\sin b}\\
\Leftrightarrow\ &\cot x = \frac{\cos(a-b)\cos a}{\cos(a+c)\cos(a-c)\sin b} - \tan(a+c)
\end{aligned}$$

Với $a = 10^\circ, b = 50^\circ, c = 60^\circ$, ta có

$$\begin{aligned}
\cot x &= \frac{\cos 40^\circ \cos 10^\circ}{\cos 70^\circ \cos 50^\circ \sin 50^\circ} - \tan 70^\circ = \frac{\cos 10^\circ}{\cos 70^\circ \cos 50^\circ} - \tan 70^\circ\\
&= \frac{\sin 100^\circ - \sin 70^\circ \cos 50^\circ}{\cos 70^\circ \cos 50^\circ} = \frac{2\sin 50^\circ - \sin 70^\circ}{\cos 70^\circ} = \frac{2\sin 130^\circ - \sin 70^\circ}{\cos 70^\circ}\\
&= \frac{2\sin 60^\circ \cos 70^\circ + \cos 60^\circ \sin 70^\circ - \sin 70^\circ}{\cos 70^\circ} = \frac{\sqrt{3}\cos 70^\circ}{\cos 70^\circ} = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Do đó $x = 30^\circ$.

Nhận xét. Từ đẳng thức ở trên, ta còn xây dựng được một số trường hợp cho ra góc x đẹp cho tam giác $80-80-20$ này:

STT	Góc b	Góc c	Góc x
1	20	50	10
2	40	50	30
3	30	60	10
4	50	60	30
5	25	65	5
6	60	65	40
7	50	70	10
8	60	70	20

Chúng tôi sẽ giới thiệu lời giải cho một số trường hợp trong đó vào số tiếp theo.

Các thông tin này được tham khảo từ trang web:
http://www.qbyte.org/puzzles/p022s.html và
http://www.qbyte.org/puzzles/p022ss.html

GIỚI THIỆU VỀ KỲ THI HỌC BỔNG DU HỌC NGA

Lê Phúc Lữ
(Thành phố Hồ Chí Minh)

GIỚI THIỆU

Chuỗi các cuộc thi Olympic "Đã đến lúc du học Nga" là dự án của nhóm các trường Đại học Liên bang Nga (LB Nga), cơ quan hợp tác LB Nga và Bộ giáo dục & Khoa học LB Nga tổ chức từ năm 2013 đến nay.

Mục đích của cuộc thi Olympic này nhằm tăng cường thu hút người quan tâm và lựa chọn LB Nga để du học. Ban tổ chức sẽ chọn ra những thí sinh xuất sắc tốt nghiệp THPT và ĐH để cấp học bổng du học tại các trường đại học LB Nga.

Dành chiến thắng trong cuộc thi Olympic, các thí sinh sẽ được cấp học bổng của Chính phủ LB Nga theo học các ngành kỹ thuật theo các trường sẽ đề cập ở mục 3.

Các cuộc thi tuyển sinh viên cho năm học 2016-2017 được diễn ra tại các nước: Abkhazia, Angola, Armenia, Việt Nam, Ấn Độ, Kazakhstan, Trung Quốc, Moldova, Ethiopia, Zambia, Kenya, Namibia.

Tại Việt Nam, năm 2015 có tổ chức cho 600 thí sinh tại 3 địa điểm là Hà Nội, Đà Nẵng và TP. Hồ Chí Minh, tuyển chọn được 50 thí sinh. Năm 2016 sẽ tổ chức tại 3 địa điểm là Hà Nội, Đà Nẵng và Hòa Bình.

1. Giới thiệu về đề thi mẫu và các đề tham khảo tương tự

1.1. Đề thi mẫu

1. Преобразуйте (результат впишите в рамку) $\left(1+\sqrt{10}\right)^3-\left(1-\sqrt{10}\right)^3$.

2. Найдите сумму наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного чисел 20 и 31 (результат впишите в рамку).

3. Одна из сторон прямоугольника имеет длину 2, диагональ имеет длину $\sqrt{11}$. Найдите периметр прямоугольника (результат впишите в рамку).

4. Найдите число различных корней уравнения $x^6+6x^4+10x^2=0$ (результат впишите в рамку).

5. Найдите наименьшее натуральное число N , удовлетворяющее следующим условиям:

1) остаток от деления N на 8 равен 2;

2) остаток от деления N на 10 равен 0 (результат впишите в рамку).

6. Вычислите $\dfrac{1+3+3^2+\ldots+3^{60}}{3^{61}-1}$ (результат впишите в рамку).

7. Правильный треугольник имеет площадь $3\sqrt{3}$. Найдите площадь круга, вписанного в треугольник.

8. Известно, что $5\pi < \alpha < \dfrac{13\pi}{2}$, $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$. Найдите $\sin 2\alpha$. (результат впишите в рамку).

9. Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $2^{x^2} < \sqrt{2}$.

10. В прямоугольной трапеции острый угол равен $\arctan 2$, основания имеет длины 4 и 6. Найдите площадь трапеции (результат впишите в рамку).

11. Найдите точку (x_0, y_0) пересечения прямых $4x+3y=2$ и $x+y=-5$ (результат впишите в рамку, сначала укажите x_0, затем y_0).

12. Найдите площадь многоугольника $|x-2|+|y+3| \le 2$ (результат впишите в рамку).

13. Найдите наименьший корень уравнения(результат впишите в рамку).

$$\lg x + \lg(x^2) + \lg(x^3) + \ldots + \lg(x^{19}) = 380.$$

14. Найдите наименьшее целое число x, удовлетворяющее неравенству $\lg^2 x + \log_x{}^2 10 \ge 2$ (результат впишите в рамку).

15. Найдите такое значение x_0 переменной x, при котором функция $f(x) = x^2 + x + 5 + \sin(\pi x)$ принимает наименьшее значение(результат впишите в рамку).

16. Радиус основания цилиндра в 2 раза меньше его высоты. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если его объем равен 2π (результат впишите в рамку).

17. Найдите все значения параметра a, при которых функция $f(x) = log_{1-a}(x)$ является монотонно возрастающей (результат впишите в рамку).

18. Найдите наименьший целый корень уравнения $4^x - 12\cdot 6^x + 11\cdot 9^x = 0$ (результат впишите в рамку).

19. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение (результат впишите в рамку).

$\tan^2(x-3\pi)\cdot\cot^2(x) = 1+a$ имеет решение (результат впишите в рамку).

20. Найдите наименьший положительный период функции $f(x) = \sin 2x - \cos^2 x$ (результат впишите в рамку).

1.2. Đề tham khảo số 1

Bài 1 *Tính* $(1+\sqrt{5})^3 + (1-\sqrt{5})^3$.

Bài 2 *Tìm tổng các ước số chung lớn nhất và bội số chung nhỏ nhất của các số* 84 *và* 36.

Bài 3 *Một cạnh của hình chữ nhật có chiều dài là* 4 *, đường chéo có chiều dài là* $\sqrt{41}$. *Tính chu vi của hình chữ nhật.*

Bài 4 *Tìm số các nghiệm phân biệt của phương trình* $x^6 - 5x^4 + 4x^2 = 0$.

Bài 5 *Tìm số tự nhiên* N *biết rằng:*

1. *Số* N *chia cho* 7 *dư* 4.
2. *Số* N *chia hết cho* 11.

Bài 6 *Tính tổng* $\dfrac{4+4^2+4^3+4^4+\cdots+4^{50}}{4^{50}-1}$.

Bài 7 *Một tam giác đều có diện tích là* $16\sqrt{3}$. *Tính diện tích của hình tròn nội tiếp tam giác.*

Bài 8 *Biết rằng* $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ *và* $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, *tìm* $\sin 2\alpha$.

Bài 9 *Tìm số nguyên lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức* $5^{\sqrt{x}} < 25$.

Bài 10 *Một hình thang vuông có góc nhọn bằng* $\arctan 5$, *độ dài hai đáy là* 8 *và* 6. *Tìm diện tích của hình thang.*

Bài 11 *Tìm giao điểm* (x_0, y_0) *các các đường thẳng* $x - 3y = -2$ *và* $4x + 5y = 9$.

Bài 12 *Tìm diện tích của đa giác trên mặt phẳng tọa độ* Oxy *thỏa mãn bất đẳng thức* $|x+6| + |y-3| \leq 2$.

Bài 13 *Tìm nghiệm của phương trình* $\log_3 x + \log_3 x^2 + \log_3 x^3 + \cdots + \log_3 x^{15} = 60$.

Bài 14 *Tìm số nguyên* x *nhỏ nhất thỏa mãn bất đẳng thức* $\lg^2(x-4) + \lg^2_{x-4} 10 \geq 2$.

Bài 15 *Tìm giá trị* x_0 *của biến* x *của hàm số* $f(x) = x^2 - 4x + 3\cos\dfrac{\pi x}{4}$ *có giá trị nhỏ nhất.*

Bài 16 *Bán kính đáy của một hình trụ gấp đôi chiều cao của nó. Tìm diện tích xung quanh của hình trụ, nếu biết rằng thể tích của hình trụ bằng* 32π.

Bài 17 *Tìm tất cả các giá trị của tham số* a, *sao cho hàm số* $f(x) = \log_{7-2a} x$ *đồng biến.*

Bài 18 *Tìm nghiệm nguyên nhỏ nhất của phương trình* $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$.

Bài 19 *Tìm tất cả các giá trị của tham số* a, *sao cho phương trình* $\tan^2 x \cdot \cot^2(x - 3\pi) = 2 + a$ *có nghiệm.*

Bài 20 *Tìm chu kỳ nhỏ nhất của hàm số* $f(x) = \sin 3x - 2\cos x$.

1.3. Đề tham khảo số 2

Bài 1 *Tính* $\left(1 - 2\sqrt{3}\right)^3 + \left(2\sqrt{3} + 1\right)^3$.

Bài 2 *Tìm tổng các ước số chung lớn nhất và bội số chung nhỏ nhất của các số* 96 *và* 28.

Bài 3 *Một cạnh của hình chữ nhật có chiều dài là* 7 , *đường chéo có chiều dài là* $\sqrt{65}$. *Tính chu vi của hình chữ nhật.*

Bài 4 *Tìm số các nghiệm phân biệt của phương trình* $x^6 - 6x^4 + 11x^2 - 6 = 0$.

Bài 5 *Tìm số tự nhiên* N *nhỏ nhất biết rằng:*

1. *Số* N *chia cho* 10 *dư* 4.
2. *Số* N *chia hết cho* 13.

Bài 6 *Tính tổng* $\dfrac{3 - 3^2 + 3^3 - 3^4 + \cdots - 3^{100}}{3^{100} - 1}$.

Bài 7 *Một tam giác đều có diện tích là* $\sqrt{3}$. *Tính diện tích của hình tròn nội tiếp tam giác.*

Bài 8 *Biết rằng* $0 < \alpha < \pi$ *và* $\cos\alpha = \dfrac{7}{25}$, *tìm* $\sin 2\alpha$.

Bài 9 *Tìm số nguyên lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức* $5^x < \dfrac{1}{25}$.

Bài 10 *Một hình thang vuông có góc nhọn bằng* $\arctan(1/3)$, *độ dài hai đáy là* 10 *và* 4. *Tìm diện tích của hình thang.*

Bài 11 *Tìm giao điểm* (x_0, y_0) *các các đường thẳng* $4x - y = 4$ *và* $x + 5y = 1$.

Bài 12 *Tìm diện tích của đa giác trên mặt phẳng tọa độ* Oxy *thỏa mãn bất đẳng thức* $|3x + 9| + |2y| \leq 5$.

Bài 13 *Tìm nghiệm của phương trình* $\log_5 x^2 + \log_5 x^4 + \log_5 x^6 + \cdots + \log_5 x^{20} = 440$.

Bài 14 *Tìm số nguyên* x *nhỏ nhất thỏa mãn bất đẳng thức* $\log_2^2(3x-8) + \log_{3x-8}^2 2 \geq 2$.

Bài 15 *Tìm giá trị* x_0 *của biến* x *của hàm số* $f(x) = x^3 - 3x + 3\sin\dfrac{\pi x}{2}$ *có giá trị nhỏ nhất.*

Bài 16 *Bán kính đáy của một hình trụ bằng* $1/8$ *chiều cao của nó. Tìm diện tích xung quanh của hình trụ, nếu biết rằng thể tích của hình trụ bằng* π.

Bài 17 *Tìm tất cả các giá trị của tham số* a, *sao cho hàm số* $f(x) = \log_{7-3a^2} x$ *đồng biến.*

Bài 18 *Tìm nghiệm nguyên nhỏ nhất của phương trình* $4^x - 5 \cdot 6^x + 4 \cdot 9^x = 0$.

Bài 19 *Tìm tất cả các giá trị của tham số a, sao cho phương trình* $\tan^2(x-\pi) \cdot \cot^2(x+3\pi) = 5 - a^2$ *có nghiệm.*

Bài 20 *Tìm chu kỳ nhỏ nhất của hàm số* $f(x) = \sin 4x - 2\cos^2 x$.

1.4. Đề tham khảo số 3

Bài 1 *Tính* $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{99\cdot 100}$.

Bài 2 *Biết rằng hai số tự nhiên có ước chung lớn nhất là* 7 *và bội chung nhỏ nhất là* 56. *Gọi* S *là tổng hai số đó. Tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của* S.

Bài 3 *Một cạnh của hình chữ nhật có chu vi là* 34 *và diện tích là* 60. *Tính độ dài đường chéo của hình chữ nhật này.*

Bài 4 *Tính tổng bình phương các nghiệm của phương trình* $3x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

Bài 5 *Tìm số tự nhiên* N *biết rằng:*

1. *Số* N *không chia hết cho* 30*, không chia hết cho* 45 *và không chia hết cho* 75.
2. *Số* N *chia hết cho* 15.

Bài 6 *Tính tổng* $\dfrac{3+7+11+15+\cdots+2015}{4+7+10+13+\cdots+2017}$.

Bài 7 *Một tam giác đều có chu vi của đường tròn nội tiếp là* 2π*. Tính diện tích của hình tròn ngoại tiếp tam giác.*

Bài 8 *Biết rằng* $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ *và* $\tan\alpha = 3$*, tìm* $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha$.

Bài 9 *Tìm số nguyên lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức* $5^x + 2^x < 133$.

Bài 10 *Một hình thang vuông có góc tù bằng* $\arccos(-0.6)$*, độ dài hai đáy là* 13 *và* 7*. Tìm chu vi của hình thang.*

Bài 11 *Tìm giao điểm* (x_0, y_0) *các các đồ thị* $y = 2x^2$ *và* $y = x^3 + x$.

Bài 12 *Tìm diện tích của đa giác trên mặt phẳng* Oxy *thỏa mãn* $y \geq |x|$ *và* $y \leq 3 - 2|x|$.

Bài 13 *Tìm nghiệm của phương trình* $2^x + 4^x + 8^x + 16^x + 32^x = \dfrac{62}{2^x - 1}$.

Bài 14 *Tìm số nguyên* x *nhỏ nhất thỏa mãn bất đẳng thức* $\log_2^2(3x - 8) \leq 25$.

Bài 15 *Tìm giá trị* x_0 *của* x *để* $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x + 4\sin\dfrac{\pi x}{2} + \dfrac{1}{3}\cos 6\pi x$ *có GTNN.*

Bài 16 *Bán kính đáy của một hình nón bằng* $1/2$ *độ dài đường sinh của nó. Tìm diện tích xung quanh của hình nón, nếu biết rằng thể tích của nó bằng* $\pi\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

Bài 17 *Tìm tất cả các giá trị của tham số* a*, sao cho hàm số* $f(x) = \log_{2a^2 - a} x$ *nghịch biến.*

Bài 18 *Tìm nghiệm nguyên nhỏ nhất của* $\log_3^2(2x - 3) - 4\log_3(2x - 3) + 3 = 0$.

Bài 19 *Tìm tất cả các giá trị của tham số* a*, sao cho phương trình* $\tan^2(x - \pi) + \cot^2(x) = a^2 + a$ *có nghiệm.*

Bài 20 *Tìm chu kỳ nhỏ nhất của hàm số* $f(x) = 3\sin 3x + 2\cos^2 x$.

1.5. Đề tham khảo số 4

Bài 1 *Tính* $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{97\cdot 100}$.

Bài 2 *Biết rằng hai số tự nhiên có ước chung lớn nhất là* 6 *và bội chung nhỏ nhất là* 96. *Gọi* S *là tổng hai số đó. Tìm giá trị lớn nhất có thể có của* S.

Bài 3 *Một cạnh của hình chữ nhật có đường chéo là* 41 *và chu vi là* 98. *Tính diện tích của hình chữ nhật này.*

Bài 4 *Tính tổng bình phương các nghiệm của phương trình* $2x^4-3x^2-1=0$.

Bài 5 *Tìm số tự nhiên* N *biết rằng:*

1. *Số* N *không chia hết cho* 26 *và không chia hết cho*39.
2. *Số* N *lớn hơn* 100 *và chia hết cho* 13.

Bài 6 *Tính tổng* $\frac{2+5+8+11+\cdots+2018}{3+5+7+9+\cdots+2017}$.

Bài 7 *Một tam giác đều có chu vi là* 3π. *Tính tổng diện tích của hình tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác.*

Bài 8 *Cho góc* α *thỏa mãn* $\cot\alpha=2$, *tìm* $\sin^2\alpha-4\cos^2\alpha$.

Bài 9 *Tìm số nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất đẳng thức* $4^x-3^x>100$.

Bài 10 *Một hình con diều có độ dài các cạnh là* $5,10,10,5$. *Biết rằng đường chéo dài bằng* $5\sqrt{5}$. *Tính diện tích của hình này.*

Bài 11 *Tìm giao điểm* (x_0,y_0) *các các đồ thị* $y=x^4+x^2$ *và* $y=x^3+x$.

Bài 12 *Tìm diện tích của đa giác trên mặt phẳng* Oxy *thỏa mãn* $y\leq 1+|x|$ *và* $y\geq 3-|x|$.

Bài 13 *Tìm nghiệm của phương trình* $3^x-9^x+27^x-81^x=\frac{-240}{3^x+1}$.

Bài 14 *Tìm số nguyên* x *nhỏ nhất thỏa mãn bất đẳng thức* $\log_2^2(3x-7)\leq 36$.

Bài 15 *Tìm giá trị x_0 của x để* $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3} + 5\sin\dfrac{\pi x}{6} + \cos 6\pi x$ *có GTNN.*

Bài 16 *Bán kính đáy của một hình nón bằng chiều cao của nó. Tìm thể tích của hình nón, biết rằng diện tích xung quanh của nó là $\pi\sqrt{2}$.*

Bài 17 *Tìm tất cả các giá trị của tham số a, sao cho hàm số $f(x) = (a^2-1)^x$ nghịch biến.*

Bài 18 *Tìm nghiệm nguyên nhỏ nhất của phương trình $4^x + 6^x = 2\cdot 5^x$.*

Bài 19 *Tìm tất cả các giá trị của tham số a, sao cho phương trình $\tan^2(x-\pi) + 4\cot^2(x) = 5a - a^2$ có nghiệm.*

Bài 20 *Tìm chu kỳ nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sin 2x + 2\cos 5x$.*

1.6. Đề tham khảo số 5

Bài 1 *Tính* $14(1+\sqrt{2})^3 + (3-2\sqrt{2})^3$.

Bài 2 *Tìm tổng các ước số chung lớn nhất và bội số chung nhỏ nhất của các số 100 và 84.*

Bài 3 *Một cạnh của hình chữ nhật có chiều dài là 6 , đường chéo có chiều dài là $\sqrt{40}$. Tính chu vi của hình chữ nhật.*

Bài 4 *Tìm số các nghiệm khác nhau của phương trình $x^6 - x^2 = 0$.*

Bài 5 *Tìm số tự nhiên N nhỏ nhất biết rằng:*

1. *Số N chia cho 17 dư 1.*
2. *Số N chia hết cho 10.*

Bài 6 *Tính tổng* $\dfrac{3+3^3+3^5+\cdots+3^{41}}{3^{42}-1}$.

Bài 7 *Một tam giác đều có diện tích là $\sqrt{300}$. Tính diện tích của hình tròn nội tiếp tam giác.*

Bài 8 *Biết rằng $2 < \alpha < 3$ và $\sin\alpha = \dfrac{7}{10}$, tìm $\sin 2\alpha$.*

Bài 9 *Tìm số nguyên lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức* $5^{x\sqrt{x}} < 3125$.

Bài 10 *Một hình thang vuông có góc nhọn bằng* $\arctan 3$*, độ dài hai đáy là* 18 *và* 16*. Tìm diện tích của hình thang.*

Bài 11 *Tìm giao điểm* (x_0, y_0) *các các đường thẳng* $x + y = 10$ *và* $3x - 2y = 5$.

Bài 12 *Tìm diện tích của đa giác trên mặt phẳng tọa độ* Oxy *thỏa mãn bất đẳng thức* $|2x + 5| + |2y - 5| \leq 2$.

Bài 13 *Tìm nghiệm của phương trình* $\log_5 x^5 + \log_5 x^6 + \cdots + \log_5 x^{20} = 100$.

Bài 14 *Tìm số nguyên* x *nhỏ nhất thỏa mãn bất đẳng thức* $\lg^2(x - 1) + log^2_{x-1}10 \geq 2$.

Bài 15 *Tìm giá trị* x_0 *của biến* x *của hàm số* $f(x) = x^2 - 2x + \sin\dfrac{\pi x}{2}$ *có giá trị nhỏ nhất.*

Bài 16 *Bán kính đáy của một hình trụ nhỏ hơn 5 lần chiều cao của nó. Tìm diện tích xung quanh của hình trụ nếu thể tích của hình trụ bằng* 80π.

Bài 17 *Tìm tất cả các giá trị của tham số* a*, sao cho hàm số* $f(x) = \log_{4-3a} x$ *là hàm số tăng.*

Bài 18 *Tìm nghiệm nguyên nhỏ nhất của phương trình* $8 \cdot 9^x - 10 \cdot 6^x - 3 \cdot 4^x = 0$.

Bài 19 *Tìm tất cả các giá trị của tham số* a*, sao cho phương trình*

$$\tan^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cot^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = 2 + a$$

có nghiệm.

Bài 20 *Tìm chu kỳ nhỏ nhất của hàm số* $f(x) = \sin 3x - 2\cos^3 x$.

1.7. Đề tham khảo số 6

Bài 1 *Tính* $13\left(\sqrt{3}-1\right)^3-\left(2\sqrt{3}-3\right)^3$.

Bài 2 *Tìm tổng các ước số chung lớn nhất và bội số chung nhỏ nhất của các số* 80 *và* 128.

Bài 3 *Một cạnh của hình chữ nhật có chiều dài là* 60, *đường chéo có chiều dài là* 61. *Tính chu vi của hình chữ nhật.*

Bài 4 *Tìm số các nghiệm khác nhau của phương trình* $x^6-6x^4+9x^2=0$.

Bài 5 *Tìm số tự nhiên* N *nhỏ nhất biết rằng:*

1. *Số* N *chia cho* 21 *dư* 20.
2. *Số* N *chia hết cho* 25.

Bài 6 *Tính tổng* $\dfrac{5^3-5^5+5^7-5^9\cdots+5^{99}-5^{101}}{5^{103}-1}$.

Bài 7 *Một tam giác đều có diện tích là* $\sqrt{243}$. *Tính diện tích của hình tròn nội tiếp tam giác.*

Bài 8 *Biết rằng* $-3<\alpha<0$ *và* $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$, *tìm* $\sin 2\alpha$.

Bài 9 *Tìm số nguyên lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức* $2^{x+2\sqrt{x}}<2048$.

Bài 10 *Một hình thang vuông có góc nhọn bằng* $\arctan(0.1)$, *độ dài hai đáy là* 30 *và* 20. *Tìm diện tích của hình thang.*

Bài 11 *Tìm giao điểm* (x_0, y_0) *các các đường thẳng* $x+3y=0$ *và* $3x-y=10$.

Bài 12 *Tìm diện tích của đa giác trên mặt phẳng tọa độ* Oxy *thỏa mãn bất đẳng thức* $|x-4|+|4x-6|\leq 3$.

Bài 13 *Tìm nghiệm của phương trình*

$$\log_4\frac{1}{x^2}+\log_4\frac{1}{x}+\log_4 x+\log_4 x^2+\cdots+\log_4 x^{22}=125.$$

Bài 14 *Tìm số nguyên* x *nhỏ nhất thỏa mãn bất đẳng thức* $\lg^2(3x-5)+log^2_{3x-5}10\geq 2$.

Bài 15 *Tìm giá trị x_0 của biến x để hàm số $f(x) = 3x^2 - x + \sin 9\pi$ có giá trị nhỏ nhất.*

Bài 16 *Bán kính đáy của một hình trụ nhỏ hơn $\sqrt{3}$ lần chiều cao của nó. Tìm diện tích xung quanh của hình trụ nếu thể tích của hình trụ bằng 72π.*

Bài 17 *Tìm tất cả các giá trị của tham số a, sao cho hàm số $f(x) = \log_{1+5a} x$ là hàm số tăng.*

Bài 18 *Tìm nghiệm nguyên lớn nhất của phương trình $3 \cdot 2^x - 5(\sqrt{6})^x + 2 \cdot 3^x = 0$.*

Bài 19 *Tìm tất cả các giá trị của tham số a, sao cho phương trình*

$$\tan^2\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cot^2\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) = 2a - 1$$

có nghiệm.

Bài 20 *Tìm chu kỳ nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sin 4x - 2\cos^3 2x$.*

1.8. Đề tham khảo số 7

Bài 1 *Rút gọn* $\dfrac{1}{1+2} + \dfrac{1}{1+2+3} + \dfrac{1}{1+2+3+4} + \cdots + \dfrac{1}{1+2+3+\cdots+100}$.

Bài 2 *Hai số có ước số chung lớn nhất là a và bội số chung nhỏ nhất là b. Biết rằng $b - a = 20$. Tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của tổng hai số ban đầu.*

Bài 3 *Một hình hộp chữ nhật có đường chéo bằng $\sqrt{38}$ và diện tích toàn phần bằng 62. Tính thể tích của hình hộp này.*

Bài 4 *Tính tổng nghịch đảo các nghiệm của phương trình $x^3 - 3x - 1 = 0$.*

Bài 5 *Tìm số tự nhiên N nhỏ nhất biết rằng:*

1. *Số N chia 2 dư 1, chia 3 dư 2, chia 4 dư 1.*
2. *Số N có tận cùng là 1.*

Bài 6 *Tính tổng* $\dfrac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 7 \cdot 8 + \cdots + 10002000}{1 \cdot 3 + 3 \cdot 6 + 6 \cdot 9 + 9 \cdot 12 + \cdots + 1000 \cdot 3000}$.

Bài 7 *Một đa giác đều có số đường chéo là 35. Hỏi đa giác này có bao nhiêu cạnh?*

Bài 8 *Cho góc* α *thỏa mãn* $10 < \alpha < 13$ *và* $\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha = 2$.

Bài 9 *Tìm số nguyên* x *nhỏ nhất thỏa mãn bất đẳng thức* $6^x > (1 + 2^x + 3^x + 4^x + 5^x)^2$.

Bài 10 *Một hình con diều có độ dài các cạnh là* $5, 10, 10, 5$. *Biết rằng đường chéo dài bằng* $5\sqrt{5}$. *Tính diện tích của hình này.*

Bài 11 *Có mấy giao điểm NGUYÊN* (x_0, y_0) *các các đồ thị* $y = x^2 - 6$ *và* $x = y^2 - 6$*?*

Bài 12 *Tìm diện tích của đa giác trên mặt phẳng* Oxy *bị giới hạn bởi* $x = 1, x = 3, y = 2, y = 5$.

Bài 13 *Tìm nghiệm của phương trình* $\log_2 2x + \log_2 4x + \log_2 8x + \log_2 16x = 14$.

Bài 14 *Tìm số nguyên âm* x *lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức* $\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) < 1$.

Bài 15 *Tìm giá trị* x_0 *để hàm số* $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3x + 3} + \sqrt{2x^2 + 5x + 5}$ *có GTNN.*

Bài 16 *Đường kính đáy của một hình trụ bằng 6 lần chiều cao của nó. Tìm thể tích của hình trụ biết rằng diện tích toàn phần của nó là* 48π.

Bài 17 *Tìm giá trị* a *nhỏ nhất, sao cho hàm số* $f(x) = \left(\dfrac{\pi}{a}\right)^x$ *nghịch biến.*

Bài 18 *Tìm nghiệm thực nhỏ nhất của phương trình* $4^x = x + 1$.

Bài 19 *Tìm tất cả các giá trị của tham số* a*, sao cho phương trình* $\sin^2 x + 3\cos^2 x = a^2 + a + 1$ *có nghiệm.*

Bài 20 *Tìm chu kỳ nhỏ nhất của hàm số* $f(x) = \tan 4x + 2\cot 5x$.

1.9. Đề tham khảo số 8

Bài 1 *Rút gọn* $\dfrac{1}{1-2}+\dfrac{1}{1+2-3}+\dfrac{1}{1+2+3-4}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+39-40}$.

Bài 2 *Hai số có ước số chung lớn nhất là* a *và bội số chung nhỏ nhất là* b. *Biết rằng* $b-a=39$. *Tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của tổng hai số ban đầu.*

Bài 3 *Một hình hộp chữ nhật tổng độ dài của tất cả các cạnh là* 44, *diện tích toàn phần là* 576. *Tính độ dài đường chéo dài nhất của hình hộp.*

Bài 4 *Tính tổng bình phương các nghiệm của phương trình* $x^3-7x^2+11x-3=0$

Bài 5 *Tìm số tự nhiên* N *nhỏ nhất biết rằng:*

1. *Số* N *chia 3 dư 1, chia 4 dư 2, chia 7 dư 1.*
2. *Số* N *có tận cùng là 1.*

Bài 6 *Tính tổng* $\dfrac{1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 4\cdot 6+\cdots+1000\cdot 2000\cdot 3000}{1\cdot 3\cdot 5+2\cdot 6\cdot 10+\cdots+1000\cdot 3000\cdot 5000}$.

Bài 7 *Hỏi số đường chéo của một đa giác có 15 đỉnh hơn đa giác khác có 10 đỉnh bao nhiêu?*

Bài 8 *Tìm góc* α *thỏa mãn* $4<\alpha<7$ *và* $\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha=-2$.

Bài 9 *Tìm số nguyên* x *lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức* $(\sqrt{7})^x>3^x+4^x$.

Bài 10 *Một hình con diều có độ dài các cạnh là* $10, 17, 17, 10$. *Biết rằng đường chéo ngắn bằng* 16. *Tính diện tích của hình này.*

Bài 11 *Có mấy giao điểm NGUYÊN* (x_0, y_0) *các các đồ thị* $y=2x^2-3$ *và* $x=2y^2-3$*?*

Bài 12 *Tìm diện tích của đa giác trên mặt phẳng* Oxy *bị giới hạn bởi các đồ thị của hàm số*$y=x, y=-x+2, y=x+2, y=-x-2$.

Bài 13 *Tìm nghiệm của phương trình* $\log_{120}\dfrac{x}{2}+\log_{120}\dfrac{x}{3}+\log_{120}\dfrac{x}{4}+\log_{120}\dfrac{x}{5}=4$.

Bài 14 *Tìm số nguyên dương* x *lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức* $\tan^2\left(\dfrac{x}{10}\right)<100$.

Bài 15 *Tìm các giá trị* x_0 *để hàm số*

$$f(x) = \sqrt{3x-1} - \sqrt{x+5}$$

có GTNN.

Bài 16 *Một hộp sữa hình trụ có thể tích bằng* 12π *và diện tích xung quanh cũng bằng* 12π*. Tính chiều cao của hộp sữa.*

Bài 17 *Tìm giá trị* a *nhỏ nhất, sao cho hàm số* $f(x) = \left(\frac{a}{e^2}\right)^x$ *đồng biến.*

Bài 18 *Tìm nghiệm thực nhỏ nhất của phương trình* $\ln(x^2+x+1)+x^4+x=0$*.*

Bài 19 *Tìm tất cả các giá trị của tham số* a*, sao cho phương trình* $6\sin^2 x - \cos^2 x = a^2 + a$ *có nghiệm.*

Bài 20 *Tìm chu kỳ nhỏ nhất của hàm số* $f(x) = \tan 10x + 2\cot 4x$*.*

1.10. Đề tham khảo số 9

Bài 21 *Rút gọn* $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{98\cdot 99\cdot 100}$.

Bài 22 *Trong phòng thí nghiệm, có 2 ống nghiệm có dung tích là* $42ml$ *và* $77ml$*. Hỏi với hai ống này, người ta có thể đong được dung tích nước chính xác nhỏ nhất là bao nhiêu?*

Bài 23 *Trên mảnh đất hình chữ nhật* $20m \times 30m$*, người ta làm một đường đi xung quanh có bề rộng là* $2m$ *(đường đi xây vào phần đất bên trong). Tính diện tích của đường đi.*

Bài 24 *Tính tổng giá trị tuyệt đối của các nghiệm của phương trình* $x^3+3=x^2+11$*.*

Bài 25 *Tìm số tự nhiên* N *nhỏ nhất biết rằng:*

1. *Số* N *là số nguyên tố.*
2. *Số* N *chia* 13 *dư* 2*.*

Bài 26 *Tính tổng* $1^2+2^2+3^2+\cdots+50^2$.

Bài 27 *Một hình đa giác đều có số đo mỗi góc trong bằng* 140° *. Hỏi đa giác này có tất cả bao nhiêu cạnh?*

Bài 28 *Tìm góc* α *thỏa mãn* $\tan\alpha = 3$*, tính giá trị của* $\tan 2\alpha$.

Bài 29 *Hỏi có bao nhiêu số nguyên* x *thỏa mãn điều kiện* $10^{50} < 3^x < 10^{60}$*?*

Bài 30 *Một hình thang cân có độ dài các cạnh là* $3, 2, 3, 10$*. Tính diện tích của hình này.*

Bài 31 *Có mấy giao điểm* (x_0, y_0) *các các đồ thị* $x^2 + y^2 = 6$ *và* $y = x^2$*?*

Bài 32 *Hỏi diện tích của đa giác trên mặt phẳng* Oxy *bị giới hạn bởi các điều kiện sau là bao nhiêu:* $y \geq 0, y \leq x, y \leq 4 - x$*?*

Bài 33 *Tìm nghiệm của phương trình* $\log_2 x \cdot \log_4 x \cdot \log_8 x = 36$.

Bài 34 *Tìm số nguyên dương* x *lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức* $2^x < 10x + 20$.

Bài 35 *Tìm cực trị* x_0 *nhỏ nhất của* $f(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)^3 + \left(\sqrt{x+9}\right)^3 - \left(\sqrt{2x+4}\right)^3$.

Bài 36 *Một quả bóng hình cầu có thể tích là* 27π*. Hỏi diện tích bề mặt của quả bóng bằng bao nhiêu?*

Bài 37 *Tìm giá trị nguyên* a *nhỏ nhất, sao cho hàm số* $f(x) = (\pi + e + a)^x$ *đồng biến.*

Bài 38 *Hỏi có bao nhiêu giá trị* x *thỏa mãn* $3^x + 5^x < 4^x$*?*

Bài 39 *Tìm tất cả các giá trị của tham số* a*, sao cho phương trình* $\tan^2 x + \cos^2 x = a$ *có nghiệm.*

Bài 40 *Tìm chu kỳ nhỏ nhất của hàm số* $f(x) = \sin^3(4x + 5)$

2. Một số thông tin tuyển sinh của các trường ở Liên bang Nga 2016.

Các thông tin ở đây tham khảo từ tài liệu của Trung tâm Khoa học và Văn hóa Nga ở Hà Nội trong đợt tuyển sinh 2016.

Thành phố Moskva:

1. Đại học Năng lượng Moskva (MPEI).

Địa chỉ: 111250 Matxcơva, E-250, phố Rasnakazarmennaia, số 14.
Email: study@mpei.ru.
Website: mpei.ru.

2. Đại học Tổng hợp Công nghệ và Nghiên cứu quốc gia (MISIS).

Địa chỉ: LB Nga, 119049, TP Moskva, Leninskiy prospect, nhà số 4.
Website: http://en.misis.ru/vn/ - bằng tiếng Việt và www.misis.ru.

3. Đại học Hữu nghị các dân tộc (RUDN).

Địa chỉ: 117198, TP. Moskva, phố Miklukho - Maklaia, số nhà 6.
Website: www.rudn.ru.

4. Đại học Xây dựng quốc gia Moskva (MGSU).

Địa chỉ: 129337, LB Nga, Moskva, Jaroslavskoye Soxxe, số nhà 26.
Website: www.mgsu.ru hoặc www.vk.com/mgsu. hoặc www.facebook.com/misí921mgsu.

5. Đại học Công nghệ Moskva (MIREA).

Địa chỉ: đại số Vernadski, số nhà 78, Moskva, 119454, LB Nga.
Website: www.mirea.ru.

6. Đại học kỹ thuật vật lý Moskva (MIPT).

Địa chỉ: 141700, LB Nga, tỉnh Moskva, TP. Dolgoprudni, Ngõ Instituski, số nhà 9.
Website: www.mipt.ru.

7. Đại học kỹ thuật Quốc gia Moskva (MTU).

Địa chỉ: 105005, LB Nga, Moskva, Baumanxkaya thứ 2, số nhà 5, tòa 1.
Website: http://www.bmstu.ru hoặc http://www.bmstu.ru/en/

8. Đại học giao thông đường sắt Moskva (MIIT).

Địa chỉ: phố Obrazxova, nhà 9, tòa 9, Moskva, 127994.
MIIT, tòa nhà 1, phòng 1301, Phòng hợp tác đào tạo quốc tế.
Website: www.miit.ru.

9. Đại học công nghệ Moskva (WTU).

Địa chỉ: 119334 LB Nga, Moskva, Leninskiy Prospect, số nhà 38A.
Website: www.mti.edu.ru.

Thành phố Zelenograd.

10. Đại học Nghiên cứu Quốc gia (MIET)

Địa chỉ: 124498, Moskva, Zelenograd, đường 4806, số 5.
Website: eng.miet.ru.

Thành phố Saint Petersburg

11. Đại học Bách khoa Saint – Perterburg.

Địa chỉ: LB Nga, thành phố Saint Petersburg, đường Polychekhnhitreskaia, số 29.
Website: www.spbstu.ru.

12. Đại học Kiến trúc – Xây dựng Saint – Pertersburg.

Địa chỉ: phòng hợp tác và đào tạo quốc tế, 190005, St.Petersburg, phố Krasnoarmeiskaia số 2, số nhà 4.
Website: www.spbgasu.ru.

Thành phố Novisibirsk

13. Đại học Y Quốc gia Novisibirsk (NGMU).

Địa chỉ: 630091, LB Nga, thành phố Novosibirsk, đường Craxnưi proxpect, số 52.
Email: interNSMU@gmail.com.

14. Đại học Quốc gia kiến trúc – Xây dựng Quốc gia Novosibirsk.

Địa chỉ: LB Nga, 630008, thành phố Novosibirsk, phố Leningradskaia, số nhà 113.
Website: www.sibstrin.ru.

Thành phố Tomsk

15. Trường Đại học nghiên cứu quốc gia – Đại học Bách khoa Tomsk (TPU).

Địa chỉ: Văn phòng tuyển sinh SV quốc tế, LB Nga, phố Usova 4A, văn phòng 420.
Website: www.iie.tpu.ru.

Thành phố Novocherhask

16. Đại học Bách khoa miền Nam liên bang Nga (NPI).

Địa chỉ: phố Prosvesenia, số nhà 132, thành phố Novocherkass, tỉnh Rostov, LB Nga.
Website: www.npi-tu.ru.

Thành phố Krasnoyarsk

17. Đại học liên bang Sibiri (SFU)

Địa chỉ: đại lộ Svobodni, số nhà 82A, phòng 448, TP. Krasnoyarsk, 660041, LB Nga.
Website: www.sfu-kras.ru.

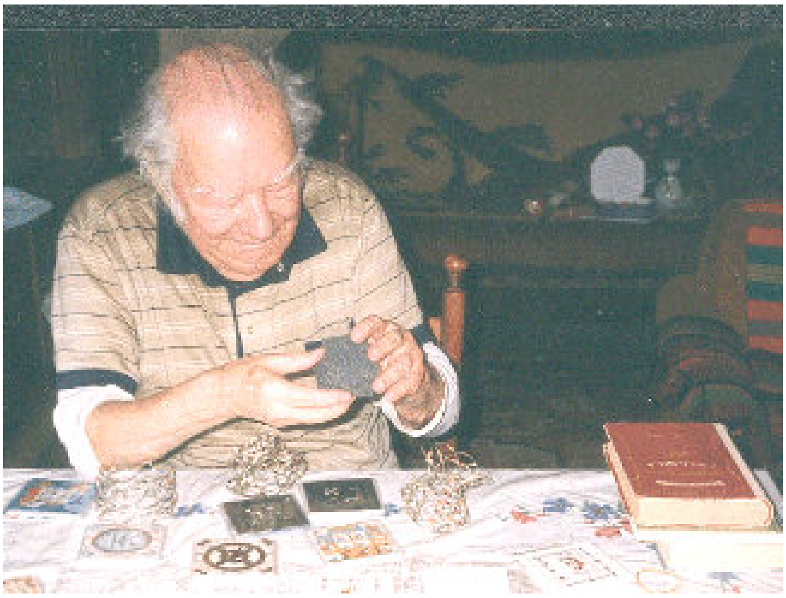
Các bạn có nhu cầu liên hệ để nắm thêm thông tin có thể theo địa chỉ: số 501, đường Kim Mã, quận Ba Đình, Hà Nội.
Điện thoại: (04) 37719937.
Website: www.vnm.ru.gov.ru.

NHỮNG CÂU ĐỐ MÁT - XCƠ - VA

Nguyễn Quốc Khánh
(*Hà Nội*)

Bố mẹ tôi rất yêu thích việc đọc sách. Thuở nhỏ, trong nhà tôi có một tủ sách gia đình rất xinh. Đó là tủ sách mà bố tôi tự tay đóng tặng mẹ tôi, trong đó xếp đủ thứ sách của cả hai người. Tôi đã lớn lên với những sách ấy. Tới bây giờ nhìn lại, tôi thấy mình thật may mắn khi mà "*Thời thơ ấu*" của mình đã được bao bọc bởi những tác phẩm Nga thật đẹp đẽ, giàu triết lý nhưng vẫn khoáng đạt và đặc biệt là đầy nhân hậu. Giữa những "*Truyện núi đồi và thảo nguyên*", với những "*Giamilya*", những "*Cây phong non trùm khăn đỏ*", những "*Bài ca chim báo bão*", những "*Trường đại học của tôi*", giữa những "*Bông hồng vàng và bình minh mưa*", giữa những "*Anh béo và anh gầy*", giữa những "*Con kỳ nhông*", những "*Người trong bao*", giữa những "*Đêm trước cha và con*", tôi đã lớn lên một cách đầy hạnh phúc.

Thời ấy hình như ai cũng yêu thích việc học toán. Và có vẻ thời bấy giờ, và cả ngày nay nữa, không đứa trẻ nào lại không bắt đầu cuộc hành trình vạn dặm của mình với toán học bằng những bài toán đố, với hàng giờ đồng hồ loay hoay với những que tính, với những kéo và giấy, với những vòng chun, với những viên bi, với thước thẳng và ê kê, thậm chí với cả những dụng cụ cơ học quái đản để vẽ ra những hình thù đẹp đẽ lạ lùng. Tôi không thể nhớ chính xác rằng mình đã biết tới những câu đố logic với ba vị thần là Thần nói thật luôn nói thật, Thần nói dối luôn nói dối, và Thần hay đùa lúc nói thật lúc nói dối từ bao giờ, tôi chỉ biết là chẳng có đứa trẻ con nào thời đó lại không biết tới những câu đố như vậy, và ngay cả cho tới bây giờ, dường như với rất rất nhiều người, toán logic cũng vẫn tức là môn câu đố về ba vị thần. Thật là một sự rung động không thể cưỡng lại được của các câu đố vui như vậy.



Boris Kordemsky đang giải một câu đố. Ảnh: ageofpuzzles.com

Nói về toán đố, bắt đầu từ "*Ông tổ*" của các trò chơi Sam Loyd người Mỹ, tới "*Nhà sáng chế*" Henry Dudeney người Anh, tới "Người khổng lồ" Andrey Kolmogorov [1] và "*Thầy giáo làng*" Boris Kordemsky người Nga, tới "*Nhà ảo thuật*" Martin Gardner người Mỹ, toán học giải trí (recreational mathematics) đã dần dần trở nên giàu có và trù phú hơn bao giờ hết. Nếu như người ta có thể thấy ở những câu đố của Sam Loyd một sự trêu đùa trí óc trong những ngôn ngữ huyền ảo như một đêm Ả-rập, thấy ở những câu đố của Dudeney những tình huống nghe qua thì dễ dàng mà thực sự tinh xảo và chính xác cao độ khiến cho tất cả đều phải đau đầu một cách thích thú, và cho dù đâu đó người ta thấy lại những câu đố của hai tác giả này ở Kordemsky, thì "*Những câu đố Mát-xcơ-va*" mà các bạn đang cầm trên tay bản dịch tiếng Việt sau 50 năm bản gốc ra đời, vẫn là một thảo nguyên rộng khắp chứa đựng vô vàn những ý tưởng đẹp đẽ đến bất ngờ. Và mặc dù cả hai đều là những kho tàng khổng lồ, nhưng vẫn có một sự khác biệt không nhỏ giữa phong cách toán đố của Kordemsky và Gardner. Tôi nghĩ điều đó đến từ cái được gọi là "*Tâm hồn Nga*", cái mà có thể cảm thụ như là một sự hòa hợp tuyệt đẹp giữa con người, thiên nhiên đẹp đẽ, các ý niệm và hiểu biết sâu sắc về thế giới, cùng với nhân sinh quan rộng mở, điều

[1] Nhà toán học vĩ đại người Nga là Kolmogorov thuở nhỏ đã bắt đầu sáng tạo ra các câu đố để đố bạn bè, một trong số đó là câu đố nổi tiếng về số cách xâu chuỗi vòng cổ bằng những chiếc cúc thuộc về 4 màu.

mà rất dễ nhận ra nhưng không dễ định nghĩa cho thật rõ ràng, đặc biệt là đặt trong sự khác biệt so với tư duy chính xác hóa quá mức của phương Tây ở đây là Anh và Mỹ, thì vẻ đẹp ấy lại càng trở nên rõ ràng hơn nữa.

Người ta nói rằng toán đố là trò tiêu khiển để giết thời gian và luyện trí não, nhưng có lẽ không chỉ như thế, và nếu có là như thế đi chăng nữa, thì trò tiêu khiển này chắc chắn chưa bao giờ trở nên nhàm chán, và vẫn có những giá trị mà hiếm người có thể từ chối được. Một trong số những tín đồ cuồng nhiệt của toán đố có lẽ không thể không nhắc tới nhà toán học John Conway, cha đẻ của "*Trò chơi cuộc sống*" nổi tiếng, đó là một mô phỏng của Conway đối với sự vận động của các tế bào thông qua một mô hình toán đố đơn giản. Conway là Giáo sư toán học ở Đại học Princeton, nơi mà ban đầu ông có một văn phòng làm việc riêng, nhưng ông không bao giờ ngồi trong đó, ngược lại, suốt ngày ông chỉ ngồi ở sảnh chung, và "*tóm cổ*" tất cả những ai lơ đễnh đứng trong sảnh chung đó mà không đang nói chuyện với ai, để ông đố họ những câu đố ban đầu thì có vẻ hấp dẫn, nhưng càng về sau thì người ta càng thấy buồn cười vì tính trẻ con và sự háo hức đó của ông. Dần dần mọi người đều trốn sạch vì các câu đố của Conway ban đầu nghe thì dễ mà giải thì quá khó, họ sợ bẽ mặt, còn trường Princeton thì cuối cùng cũng đành phải thu hồi văn phòng của Conway để dành cho người khác. Về sau Conway đã xuất bản một bộ 4 tập sách dày tới mấy nghìn trang chỉ để diễn giải về các trò chơi mà ông tưởng tượng ra, những câu đố "*hại não*", nhưng bằng cách nào đó lại có những ứng dụng đáng ngạc nhiên trong tự nhiên cuộc sống.

Không phải ngẫu nhiên mà hầu như ai cũng bị các câu đố cuốn hút, đặc biệt là các nhà toán học nói riêng và các nhà khoa học nói chung. Cứ sểnh ra là họ đố nhau, đố nhau trong giờ ăn trưa, trong lúc đi dạo, trong giờ uống cà phê, trong tiệc trà, bên hành lang hội nghị sự kiện. Dần dần, tôi hiểu ra một điều là, các câu đố chính là thứ tạo nên cảm hứng cho trí tưởng tượng và sự tò mò của tất cả mọi người, đặc biệt là cho trẻ em trong lứa tuổi mà các em đó bắt đầu sự phát triển về trí lực của mình. Nhưng mọi chuyện không hiển nhiên như tôi vừa mới nói ra. Tôi còn nhớ thuở bé chính mình đã từng rất bực mình với những câu hỏi ngớ ngẩn khủng khiếp về việc một chú mèo nằm giữa những chú chuột hỏi rằng chú ta sẽ chén chú chuột nào trước, hay là câu hỏi về việc bốn người đạp xe trên một mạng đường hình bông hoa thì ai sẽ về đích trước, thật là ngớ ngẩn, thật là buồn cười, thật là phi logic, nhưng cũng thật thú vị, ngôn từ và hình ảnh có thể sống động đến như thế là cùng. Và dù cho tất nhiên là ai chẳng muốn biết được câu trả lời, hơn nữa còn muốn mình tự tìm ra câu trả lời như một sự khám phá, một phát hiện tự thân đầy sung sướng, nhưng còn sự ngớ ngẩn trong cách đặt đầu bài thì sao, nó cứ hiển hiện trước mặt, không loại bỏ đi được, mà để đấy thì lại bứt rứt không yên? Hóa ra, kỳ thực chính những sự ngớ ngẩn kia, lại "*tình cờ*" là điều giúp nuôi dưỡng được trí tưởng tượng trẻ thơ, mà trí tưởng tượng thì vốn dĩ là tài sản lớn nhất của những đứa trẻ. Albert Einstein từng nói rằng nếu như tính logic dắt ta đi được một đoạn đường đủ dài khả dĩ đáp ứng được hầu hết các mong muốn cơ bản, thì chính trí tưởng tượng mới có thể lại đưa ta đi được đến bất kỳ đâu ta mơ ước tới, cũng giống như việc Peter Pan chỉ có thể bay được khi anh ta có thể tưởng tượng ra (và tất nhiên là phải có niềm tin vào) việc mình đang bay vậy. Tiếc thay, dường như đây lại đúng là điều mà nhịp sống hối hả của cuộc sống hiện đại đã khiến cho chúng không còn đất sống.

Một người bạn mà tôi tình cờ biết tới là anh Sonny Xuân Vũ, người mà trong vòng chưa tới 5 năm đã gây dựng được một doanh nghiệp chuyên về sản xuất các thiết bị di động có tính thời trang (Misfit Wearables) trị giá nhiều trăm triệu đô la, trong một bài giảng về cách thức mà anh ta xây dựng doanh nghiệp của mình, thì chỉ có duy nhất một bài học, đó là về sự tò mò muốn tìm tới tận cùng câu trả lời giống y như khi ta đối diện với các bài toán đố, mà đúng hơn, đối với anh ấy thì câu đố số 24 trong cuốn sách này, câu đố về việc vẽ một đường gấp khúc 4 đoạn liền nét cắt qua 9 điểm, chính là bài học lớn nhất từ thuở nhỏ không bao giờ quên. Tôi nghĩ, những ví dụ như thế này không có gì đáng ngạc nhiên, nhưng khi nói ra, thì có thể ta sẽ hiểu rõ hơn về một số điều hiển nhiên. Chẳng hạn ở đây là ta đang suy nghĩ cho thấu đáo về giá trị của toán đố với sự phát triển trí tưởng tượng và sự tò mò, đặc biệt là đặt trong bối cảnh mà "*toán bổ củi*" đang ngày một trở nên "*lạm phát*", thì có lẽ không thể không nhắc lại với nhau rằng toán đố ngoài việc là một công cụ, một cách thức tốt để khiến học sinh yêu thích toán hơn, nghĩ về toán mọi lúc mọi nơi, thì còn là cách để bố mẹ, anh chị em cùng nhau học toán.

Cảm ơn Nhà sách Nhã Nam và nhóm biên dịch đã đem trở lại những giá trị truyền thống của toán học và giáo dục toán học, đặc biệt hơn nữa là những bạn đọc thủy chung lại một lần nữa có cơ hội tận hưởng lại một làn gió thảo nguyên Xô Viết và những làn điệu dân ca Nga dung dị mà vô cùng sâu sắc chứa đựng trong từng câu chữ, từng hình ảnh gần gũi, mộc mạc, mà rất có hồn, ngay giữa những ngày **Hội sách tháng** 9 giữa mùa thu vàng Hà Nội, ngay **Mùa tựu trường** 2016.

Bài Toán Hay Lời Giải Đẹp

Ban biên tập

Giới thiệu

Chuyên mục này được lấy cảm hứng từ bài viết của thầy Nguyễn Duy Liên ở số báo trước về bài toán số 6 trong kỳ thi IMO 2001 với 5 cách giải khác nhau. Mục này sẽ để dành viết về những bài toán hay, lời giải đẹp và những câu chuyện thú vị xung quanh những bài toán và lời giải đó.

Tên của chuyên mục được mượn từ tên của một nhóm những người yêu toán trên Facebook do anh Nguyễn Văn Lợi sáng lập "*Bài toán hay – Lời giải đẹp – Đam mê toán học*". Chuyên mục ghi nhận các đề cử của bạn đọc và sẽ chọn đăng mỗi kỳ 1, 2 bài toán.

Số này chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc về bài toán số 3 trong đề thi toán quốc tế năm 2005 cùng với những lời giải rất độc đáo.

Bài toán. *Cho ba số thực dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn điều kiện $xyz \geqslant 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geqslant 0.$$

Lời giải 1. (Phạm Kim Hùng [1]) Sử dụng giả thiết $xyz \geqslant 1$ và bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} \geqslant \frac{x^5-x^2\cdot xyz}{x^5+(y^2+z^2)\cdot xyz} = \frac{x^4-x^2yz}{x^4+yz(y^2+z^2)} \geqslant \frac{2x^4-x^2(y^2+z^2)}{2x^4+(y^2+z^2)^2}.$$

Đặt $a=x^2,\ b=y^2,\ c=z^2$ ta cần chứng minh

$$\sum \frac{2c^2-a(b+c)}{2a^2+(b+c)^2} \geqslant 0,$$

hay là

$$\sum (a-b)\left[\frac{a}{2a^2+(b+c)^2}-\frac{b}{2b^2+(c+a)^2}\right] \geqslant 0,$$

hoặc

$$\sum (a-b)^2\cdot\frac{c^2+2c(a+b)+a^2-ab+b^2}{[2a^2+(b+c)^2]\,[2b^2+(c+a)^2]} \geqslant 0.$$

Hiển nhiên đúng, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$. □

[1] Thành viên đội tuyển IMO Việt Nam 2 năm liên tiếp 2004 (giành HCV) và 2005 (giành HCB).

Lời giải 2. (Đáp án của BTC) Chú ý rằng $1-\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}$, nên bất đẳng thức trên tương đương với

$$\sum \frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} \leqslant 3.$$

Sử dụng giả thiết $xyz \geqslant 1$ và bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$(x^2+y^2+z^2)^2 \leqslant \left(\sqrt{x^5yz}+y^2+z^2\right)^2 \leqslant (x^5+y^2+z^2)(yz+y^2+z^2),$$

do đó

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} \leqslant \frac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Suy ra

$$\sum \frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} \leqslant 2+\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} \leqslant 3.$$

Bài toán được chứng minh. □

Lời giải 3. (Iurie Boreico [2]) Ta có

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}-\frac{x^5-x^2}{x^5+x^3(y^2+z^2)}=\frac{(x^3-1)^2(y^2+z^2)}{x(x^2+y^2+z^2)(x^5+y^2+z^2)} \geqslant 0,$$

kết hợp với giả thiết $yz \geqslant \frac{1}{x}$, ta được

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} \geqslant \frac{x^5-x^2}{x^5+x^3(y^2+z^2)}=\frac{x^2-\frac{1}{x}}{x^2+y^2+z^2} \geqslant \frac{x^2-yz}{x^2+y^2+z^2}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geqslant 1-\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} \geqslant 0.$$

Vậy bài toán được chứng minh. □

Bình luận 1. Bài toán này có 3 điểm khó, đó là:

1. Bất đẳng thức không thuần nhất bậc cao.
2. Bất đẳng thức dạng phân thức.
3. Điều kiện dạng bất đẳng thức.

Thông thường với các bất đẳng thức không thuần nhất có điều kiện đẳng thức, ta có thể dùng điều kiện đó để thực hiện bước chuẩn hóa, ở điều kiện bất đẳng thức sẽ khó hơn vì ta sẽ phải biết thay thế đúng chỗ (để sự thay thế đó là hợp lệ và không dẫn đến một bất đẳng thức sai).

[2] Iurie Boreico là thành viên đội tuyển IMO của Moldova 5 năm liên tiếp từ 2003 đến 2007. Anh giành HCV với số điểm tuyệt đối (42/42) ở các năm 2005 và 2006.

Ba lời giải đã trình bày ở trên đã xử lý khéo léo 3 khó khăn mà bài toán đặt ra theo các trình tự khác nhau.

Lời giải của Phạm Kim Hùng xử lý vấn đề thuần nhất trước (thay 1 bằng xyz ở trên và ở dưới). Bước này là khá tinh tế và không hiển nhiên như thoạt nhìn (giảm tử số và tăng mẫu số lên) vì tử số có thể âm, do đó phải nhân chéo mới chứng minh được đánh giá đầu tiên. Tuy nhiên bước đánh giá đó là khá tự nhiên. Tiếp theo là bước đặt biến phụ để giảm bậc và cuối cùng là bước biến đổi về dạng SOS (một trong những sáng tạo của chính Phạm Kim Hùng).

Trong cách giải của đáp án, bước đầu tiên sử dụng mối liên hệ giữa tử số và mẫu số của các phân số để tạo ra 3 phân số mới có chung tử số. Tiếp theo là một áp dụng khá nghệ thuật của bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, đồng thời sử dụng $xyz \geqslant 1$ để nâng bậc

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant x^{\frac{5}{2}}(yz)^{\frac{1}{2}} + y^2 + z^2,$$

từ đó tạo ra bất đẳng thức đã được đồng bậc hóa (và lại có mẫu số chung, giải quyết được khó khăn thứ 2

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} \leqslant \frac{yz + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Chú ý là ý thứ nhất của cách giải này cũng chứng minh được là chỉ cần chứng minh bất đẳng thức đề bài đúng cho trường hợp $xyz = 1$.

Trong cách giải của Iurie Boreico, việc thuần nhất hóa được chia thành 2 bước. Đầu tiên là thuần nhất hóa mẫu số. Bước này khá tự nhiên vì nếu $x > 1$ thì tử số dương và phân số sẽ nhỏ đi nếu ta tăng mẫu số lên (thay $y^2 + z^2$ bằng $x^3(y^2 + z^2)$) còn nếu $x < 1$ thì tử số âm và phân số cũng nhỏ đi nếu ta giảm mẫu số xuống (thay $y^2 + z^2$ bằng $x^3(y^2 + z^2)$). Cách viết trong lời giải chỉ là tường minh điều đó bằng công thức. Sau khi đã thuần nhất hóa được mẫu số rồi mới chuyển sang thuần nhất hóa tử số bằng cách thay $\frac{1}{x}$ bằng yz.

Với lời giải của mình, Iurie Boreico, đã được nhận giải thưởng đặc biệt của IMO dành cho lời giải độc đáo. Đáng chú ý đây là giải đặc biệt duy nhất trong suốt 21 năm: Từ năm 1996 đến 2016. Trước Iuri Boreico có Nikolay Nikolov được giải đặc biệt ở IMO 1995.

Có một điều thú vị là chính Nikolay Nikolov, học sinh đạt giải đặc biệt năm 1995, lấy cảm hứng từ bài toán IMO 2005 và lời giải của Iurie Boreico đã chứng minh được một mở rộng của bất đẳng thức này, cụ thể là

Cho $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ là các số thực dương thỏa mãn $x_1 x_2 \cdots x_n \geqslant 1$ và $\alpha \geqslant 1$. Khi đó ta có bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^\alpha - x_i}{S + x_i^\alpha - x_i} \geqslant 0,$$

trong đó $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

CÁC VẤN ĐỀ CỔ ĐIỂN VÀ HIỆN ĐẠI

Ban biên tập

GIỚI THIỆU

Chuyên mục này dành cho các vấn đề cổ điển và hiện đại được trình bày dưới dạng các bài toán xâu chuỗi. Đó có thể là chuỗi các bài để giải bài toán đẳng chu, chứng minh đẳng thức Euler kỳ diệu $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$, một chuỗi bài toán vận trù ... Cách trình bày xuất phát từ những vấn đề đơn giản, dễ hiểu, những khái niệm mới sẽ được định nghĩa luôn trong bài để có thể đọc tương đối độc lập. Và mỗi một chuỗi bài sẽ nêu ra những vấn đề nhất định, có thể là giải quyết một bài toán kinh điển hay nêu ra những giả thuyết mới, những vấn đề mới. Lời giải và thảo luận về các bài toán sẽ được đăng ở số $N + 3$.

BÀI DỰ THI VÒNG CHUNG KẾT “ENTROPY – KHAI PHÁ DỮ LIỆU” (tiếp theo kỳ trước)

Bài dự thi của Lê Tạ Đăng Khoa (Bảng A).

Phần I. Phân tích dữ liệu phi cấu trúc

A. Giới thiệu vấn đề

Tóm tắt: *Cho* 28.000 *bài báo thiếu chủ đề, hãy nhóm các bài báo có nội dung tương tự lại, rồi đặt tên chủ đề phù hợp nhất cho từng nhóm.*

Phát biểu lại bài Toán:

Yêu cầu 1. Do các bài viết đều thiếu chủ đề (không có nhãn): Áp dụng Unsupervised Learning để nhóm 28.000 file text theo nội dung:

1. Biểu diễn file text thành các features (feature extraction).
2. Sử dụng một thuật Toán để nhóm các file text theo nội dung (clustering).
3. Tối ưu hóa hai bước trên (optimization).

Yêu cầu 2. Sau khi có các nhóm, đặt tên chủ đề phù hợp nhất cho từng nhóm đó. Sau đó xuất một file.csv gồm tên bài báo và chủ đề tương ứng.

B. Giải quyết vấn đề

Ý tưởng: Ta dựa trên những từ được sử dụng trong mỗi bài báo để định lượng sự liên quan về mặt nội dung giữa chúng.

Yêu cầu 1.1: Feature extraction

- Bước 1. Ta sẽ clean các file text để đảm bảo nội dung chỉ còn các từ thuần túy (lowercased, no punctuation).

  Lý do: Vì "**Tôi**" và "**tôi**", "**học**" và "**học!**" hay "**ngồi**" và "**ngồi,**" là như nhau. Việc có nhiều biến thể của cùng một từ sẽ sinh ra nhiều features hơn cần thiết, làm chương trình chạy chậm hơn. Kết quả cũng có thể không chính xác.

- Bước 2. Sử dụng mô hình **Tf - Idf** để biểu diễn các file text.

  Lý do: Mô hình **Tf - Idf** định lượng một cách hiệu quả độ liên quan của một từ đến nội dung của bài báo chứa nó. Biểu diễn này kết hợp Term Frequency ($\sim$ số lần xuất hiện trong bài) và Document Frequency ($\sim$ số bài viết chứa từ đó).

  1. Term Frequency: Xuất hiện càng nhiều thì độ liên quan càng cao.
  2. Document Frequency: Xuất hiện trong càng nhiều bài báo thì từ này càng thông dụng, nên độ liên quan đến nội dung càng thấp.

  Inverse, tức nghịch đảo lại, ta được một chỉ số tỉ lệ thuận với độ liên quan.

  Kết quả: Gọi S là tập hợp tất cả n từ được dùng trong 28.000 bài báo. Một bài báo A sẽ được biểu diễn dưới dạng $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, trong đó i_k là chỉ số **Tf - Idf** thể hiện độ liên quan của từ vựng thứ k trong S đến nội dung của A.

- Code để clean các file text

```
def parse_out_text(f):
    f.seek(0)

    # decode utf-8, lowercase and strip, then encode
    content = f.read().decode('utf-8').lower().strip()
    content = content.encode('utf-8')

    ### remove punctuation
    text = content.translate(string.maketrans("", ""), string.punctuation)
    return text
```

- Code để áp dụng biểu diễn Tf-Idf cho các file text

```
# 1. Apply tf-idf model to all texts
from sklearn.feature_extraction.text import TfidfVectorizer
vectorizer = TfidfVectorizer(sublinear_tf = True, max_df = 0.5)
tfidf_model = vectorizer.fit_transform(all_texts)
```

  Chú thích 1. Tham số sublinear_tf = True.

  Một từ xuất hiện 10 lần, so với chỉ xuất hiện 1 lần, không có nghĩa là độ liên quan giữa nó và nội dung mạnh hơn 10 lần, đây là vấn đề của Term Frequency.

  Ở đây, ta áp dụng "Sublinear Tf Scaling" để giải quyết nó.

  Chú thích 2. Tham số max_df = 0.5.

  Sau bước 2, ta có một lượng features rất lớn, chương trình chắc chắn sẽ chậm.

  Mặt khác, ta chỉ cần quan tâm đến những từ thật sự liên quan đến nội dung, mà những từ quá phổ biến thường không như vậy. Bằng cách loại bỏ những từ đó, số lượng features sẽ giảm đi đáng kể, chương trình cũng sẽ chạy nhanh hơn.

  Ở đây, từ nào xuất hiện trên 50% số bài báo ($\sim$ 14.000) là quá phổ biến để được xem xét.

Yêu cầu 1.2: Clustering

Ta sử dụng thuật Toán K-Means Clustering để nhóm các bài báo này thành K nhóm.

Lý do: Thuật Toán này khá nhanh.

Tóm tắt hướng đi: Sau yêu cầu 1.1, một bài báo A sẽ được biểu diễn bởi một vector thể hiện sự liên quan của từng từ vựng đến nội dung của A. Có thể khẳng định, các vector càng gần nhau thì nội dung của các bài báo tương ứng càng liên quan đến nhau.

Thuật Toán K-Means Clustering sẽ nhóm 28.000 vector này thành K nhóm theo khoảng cách. Khi đó, các vector gần nhau, tức các bài báo có nội dung liên quan đến nhau, sẽ nằm trong cùng một nhóm.

- Bước 1. Xác định K (số lượng nhóm).

  Bằng lấy mẫu ngẫu nhiên, ta thấy các bài báo nhiều khả năng thuộc trang VNExpress (18 chuyên mục). Ngoài ra, các trang báo nổi tiếng khác có số chuyên mục dao động từ 12 đến 20 chuyên mục. Để chắc chắn, ta dự đoán K có thể nhận các giá trị từ 10 đến 24.

  Phương pháp: Ta sử dụng phương pháp elbow.

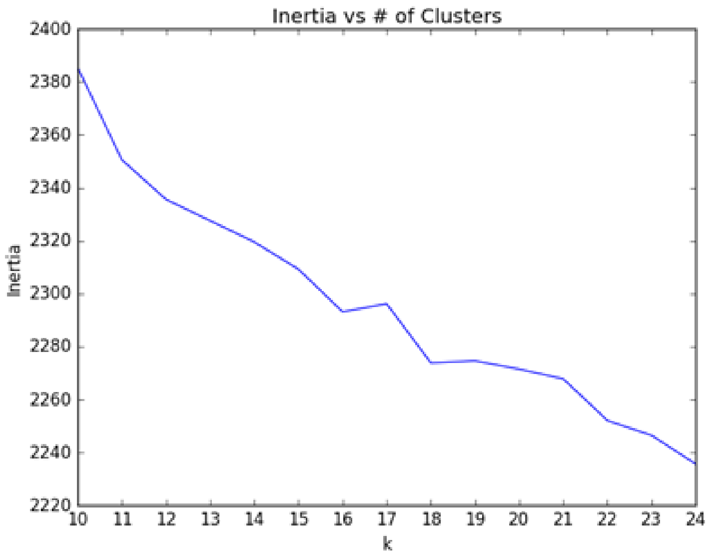
  Với mỗi giá trị của K, áp dụng K - Means Clustering rồi ghi lại chỉ số lỗi (inertia). Vẽ đồ thị rồi xác định vị trí "thoải" nhất của nó, tức giá trị của K mà tăng K lên thì inertia giảm chậm hơn trước. Đây rất có thể là số nhóm thật sự, vì inertia giảm chậm đồng nghĩa với các vector đã đủ gần để tạo thành 1 nhóm.

  Tuy nhiên, việc chạy thuật Toán nhiều lần trên 28.000 bài viết là rất chậm. Ta giải quyết vấn đề này bằng cách lấy ngẫu nhiên 3.000($\sim$ 10%) bài viết, sau đó thực hiện thuật Toán trên mẫu này

```
# 1B. Take a random sample
random.seed(107)
random_texts = random.sample(all_texts, 3000)
```

Về lý thuyết thì xác suất mà mẫu mang tính đại diện là rất cao, nên giá trị tìm ra cho K có thể chấp nhận được.

Kết quả: Ta có đồ thị sau



Vị trí "thoải" nhất của đồ thị là: $K = 18$. Ta dự đoán đây là số nhóm thật sự của 28.000 bài báo.

- Bước 2. Áp dụng thuật Toán $K-$ Means Clustering với $K = 18$.

```
# ====================================
# 2. Fit the tf-idf model to the final K-Means Model
from sklearn.cluster import KMeans

km_model_final = KMeans(n_clusters = 18, max_iter = 300, n_init = 5)
km_model_final.fit(tfidf_model)

# ==================================
# 3. Using dict to represent clusters
import collections

clustering = collections.defaultdict(list)
for text_id, label in enumerate(km_model_final.labels_):
    clustering[label].append(text_id)
```

Chú thích. Tham số max_iter $= 300$ và n_init $= 5$.

Về lý thuyết, K-Means clustering lấy ngẫu nhiên 18 điểm là tâm của 18 nhóm, sau đó điều chỉnh vị trí của 18 điểm này cho đến khi phù hợp (không thay đổi nữa).

Do việc lấy ngẫu nhiên mà quá trình này có thể không dừng lại, cũng như dừng lại không đúng vị trí, vì vậy mà ta dùng 2 tham số trên.

Ở đây, chúng ta chọn vị trí ngẫu nhiên 5 lần. Ở mỗi lần, ta không cập nhật vị trí tâm quá 300 lần. Sau đó lấy kết quả của lần có inertia tốt nhất.

Yêu cầu 1.3: Optimization.

Trong bài Toán này, tốc độ chạy của chương trình phụ thuộc vào số lượng features ta dùng để biểu diễn từng bài báo. Và ta đã giải quyết vấn đề này trong yêu cầu 1.1 bằng cách chỉnh lại tham số max_df.

Ta thử xem xét 2 phương pháp thường dùng khác để giảm số features trong Text Analysis:

- Stemming: Trong tiếng Anh, ta thường dùng phương pháp này để giảm số biến thể của cùng một từ, ví dụ như "*reserve*" và "*reservation*" được xem là có cùng một root.

  Tuy nhiên, theo hiểu biết của tôi thì tiếng Việt không có các kiểu biến thể như vậy.

- Bỏ các stopwords: Stopwords là các từ thường dùng nhưng không liên quan đến nội dung, ví dụ như "*sẽ*", "*đã*", "*à*", .v.v. Chúng ta có thể dùng thư viện JVnTextPro [1] để liệt kê và loại bỏ những từ này ngay từ đầu.

  Tuy nhiên, do stopwords là những từ thường dùng, nên phần lớn có thể đã bị ta loại bỏ từ việc tùy chỉnh tham số max_df.

Yêu cầu 2: Đặt tên nhóm

Sau yêu cầu 1, ta có một dictionary bao gồm label (tên nhóm) và các text_id (thứ tự bài báo) của từng nhóm đó. Ta thực hiện việc đặt tên nhóm như sau:

1. Lấy ngẫu nhiên 10 bài báo ở mỗi nhóm.
2. Google tiêu đề của từng bài báo để xác định chủ đề của nó.
3. Chọn chủ đề được lặp lại nhiều nhất.

Về lý thuyết thì việc lấy ngẫu nhiên này tuy nhỏ nhưng vẫn có thể mang tính đại diện vì chúng cùng thuộc 1 nhóm nên nội dung khá giống nhau.

```
import random

random_ids = random.sample(clustering[3], 10)
for doc_id in random_ids:
    print all_texts[doc_id]
    print "----------\n\n"
```

Output của đoạn code trên có thể được tham khảo tại file tmp.txt nằm trong link source code ở phần kết luận của báo cáo ([2]).

Sau khi có tên của tất cả các nhóm, ta có thể dễ dàng xuất ra file.csv như yêu cầu của bài Toán.

C. Kết luận

Trong báo cáo này, chúng ta đã phân và đặt tên nhóm cho 28.000 bài báo như sau:

1. Clean các bài báo để đưa về những từ thuần túy.
2. Áp dụng mô hình Tf-Idf để biểu diễn các bài báo.
3. Tối ưu hóa chương trình qua việc giảm số features.
4. Kết hợp thực tế bài Toán với phương pháp elbow để chọn ra giá trị K phù hợp cho thuật Toán $K-$ Means Clustering.
5. Áp dụng thuật Toán K-Means Clustering với tham số phù hợp để phân nhóm 28.000 bài báo.
6. Lấy mẫu ngẫu nhiên ở từng nhóm để đặt tên cho nó.

Báo cáo đã sử dụng:

1. Ngôn ngữ lập trình Python.
2. Thư viện scikit-learn.
3. Thư viện matplotlib.

Phần II. Phân tích dữ liệu có cấu trúc

A. Giới thiệu vấn đề

Tóm tắt: Dựa trên dữ liệu doanh số và chi phí thịt trộn trong vòng 24 quý của công ty QK, hãy:

- Xây dựng một mô hình hồi quy tuyến tính để dự đoán doanh số.
- Quyết định nên đầu tư vào quảng cáo hay khuyến mãi.
- Xác định thị trường thịt trộn có tính chất phản chu kỳ hay không.
- Xác định doanh số có tính chất mùa vụ hay không.

Phát biểu lại bài Toán:

Yêu cầu 1. Xác định các biến độc lập có liên quan (explanatory variables) để đề xuất một mô hình hồi quy tuyến tính có khả năng dự đoán doanh số.

Yêu cầu 2. Định lượng tác động ngắn hạn và dài hạn đến doanh số trong trường hợp \$1000 quảng cáo, và trường hợp \$1000 khuyến mãi.

Yêu cầu 3. Định lượng quan hệ giữa chỉ số kinh tế và doanh thu.

Yêu cầu 4. Định lượng quan hệ giữa các quý và doanh thu.

B. Giải quyết vấn đề

Báo cáo sẽ xây dựng một mô hình hồi quy tuyến tính duy nhất để giải quyết cả 4 yêu cầu trên. Ta lần lượt thực hiện 3 bước sau:

1. Xác định những biến độc lập có liên quan (explanatory variables).
2. Xác định hệ số cho từng biến và ước lượng tính chính xác của nó.
3. Dựa trên các hệ số và ước lượng tính chính xác, ta có thể định lượng mối quan hệ giữa các biến và doanh số, từ đó trả lời các câu hỏi được yêu cầu.

Do đề bài yêu cầu một mô hình hồi quy tuyến tính, ta có thể giả định các quan hệ cần khảo sát là tuyến tính. (ta có thể vẽ đồ thị để khẳng định điều này).

Bước 1. Xác định các biến liên quan.

Quảng cáo và Khuyến mãi: Để khẳng định quảng cáo và khuyến mãi có tác động dài hạn đến doanh số hay không, cũng như định lượng các quan hệ này, ta:

- Sử dụng 4 biến:
  1. **adv**: Chi phí quảng cáo trong quý.
  2. **pre_adv**: Chi phí quảng cáo của quý trước.
  3. **prom**: Chi phí khuyến mãi trong quý.
  4. **pre_prom**: Chi phí khuyến mãi của quý trước.
- Cần giải quyết 2 vấn đề sau:
  1. Hệ số của 2 biến pre_adv và pre_prom có significance hay không?
  2. Để tránh lỗi multi-collinearity, ta cần tính correlation giữa (adv, pre_adv), cũng như (prom, pre_prom).

Chỉ số Kinh tế: Để khẳng định thị trường thịt trộn có tính phản chu kỳ hay không, ta:

- Sử dụng biến diff_index là hiệu giữa chỉ số kinh tế của quý này, và chỉ số kinh tế của quý trước.

  Lý do: Chỉ số kinh tế tự thân nó không nói lên được điều gì. "Index = 100" chỉ có ý nghĩa khi ta đem so sánh nó với index của một giai đoạn khác. Vì vậy, muốn xác định tình hình kinh tế của một quý là tốt hơn hay tệ đi, ta cần so sánh với index của quý trước.
- Cần trả lời 2 câu sau:
  1. Hệ số của diff_index có significance hay không?
  2. Hệ số đó là âm hay dương?

Tính Mùa vụ: Để khẳng định doanh số có tính mùa vụ hay không, ta:

- Sử dụng biến cold_quarter bằng 1 nếu đó là mùa lạnh (quý 1 và quý 4), bằng 0 nếu đó là mùa nóng (quý 2 và quý 3).
- Cần trả lời: Hệ số của cold_quarter có significance hay không?

Bước 2. Xây dựng mô hình hồi quy.

Dựa trên 6 biến đã xác định, ta có bảng dữ liệu sau:

sales	prom	pre_prom	adv	pre_adv	diff_index	cold_quarter
504.72	15.6		30			1
406.59	22.2	15.6	36	30	2	0
398.55	0	22.2	45	36	2	0
587.76	0	0	57	45	0	1
598.92	0	0	39	57	0	1
703.62	31.8	0	21	39	-4	0
387.24	21.3	31.8	12	21	-2	0
365.67	3.9	21.3	6	12	-2	1
388.71	0	3.9	6	6	2	1
372.96	8.4	0	30	6	5	0
603.3	45.3	8.4	30	30	2	0
614.73	50.1	45.3	33	30	2	1
484.38	39.6	50.1	6	33	0	1
227.76	4.2	39.6	33	6	0	0
329.13	0	4.2	6	33	1	0
308.25	0	0	3	6	-3	1
433.86	0	0	45	3	-2	1
514.98	13.8	0	48	45	5	0
404.7	17.7	13.8	0	48	2	0
245.43	0	17.7	15	0	2	1
433.2	17.4	0	9	15	1	1
627.24	37.8	17.4	54	9	-1	0
647.61	42.3	37.8	36	54	1	0
342.81	11.4	42.3	39	36	1	1

Dựa trên bảng dữ liệu này, ta có các số liệu sau:

Regression Statistics	
Multiple R	0.95
R Square	0.91
Adjusted R Square	0.88
Standard Error	47.00
Observations	23

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%
Intercept	255.32	27.58	9.26	7.92801E-08	196.87	313.78
prom	6.21	0.71	8.74	1.73325E-07	4.70	7.71
pre_prom	-3.72	0.67	-5.58	4.16909E-05	-5.14	-2.31
adv	2.53	0.59	4.30	0.000550791	1.28	3.77
pre_adv	2.88	0.61	4.69	0.000243632	1.58	4.18
diff_index	-12.62	4.65	-2.71	0.015361754	-22.49	-2.76
cold_quarter	51.72	21.49	2.41	0.028558628	6.16	97.28

Bước 3. Trả lời câu hỏi.

Dựa trên những số liệu ở bước 2, ta có:

Nhận xét. Mô hình tốt vì có chỉ số R^2 cao. Các biến đều có quan hệ đến doanh số vì p-value bé hơn 5% (tức hệ số có significance).

Yêu cầu 1. Phương trình hồi quy tuyến tính là:

$$\text{sales} = 255.32 + 6.21 \cdot \text{prom} - 3.72 \cdot \text{pre\_prom} + 2.53 \cdot \text{adv} + 2.88 \cdot \text{pre\_adv} - 12.62 \cdot \text{diff\_index} + 51.72 \cdot \text{cold\_quarter}.$$

Yêu cầu 2: *Nên đầu tư vào quảng cáo hay khuyến mãi?*

Correlation của (adv, pre_adv) là 0.25, không đáng kể. Correlation của (prom, pre_prom) là 0.46, tuy không nhỏ nhưng không đáng kể so với mức giảm của chỉ số R^2 khi chỉ chọn 1 trong 2 biến. Do đó, ta có thể bỏ qua lỗi multi-collinearity.

Ảnh hưởng của quảng cáo lên doanh thu: $2.53 + 2.88 = 5.41$.

Ảnh hưởng của khuyến mãi lên doanh thu: $6.21 - 3.72 = 2.49$.

Suy ra đầu tư vào quảng cáo cho kết quả dài hạn tốt hơn đầu tư vào khuyến mãi. Tuy nhiên, đầu tư vào khuyến mãi cho kết quả tốt hơn trong ngắn hạn (hệ số dương lớn), nhưng tệ đi trong tương lai (hệ số âm).

Yêu cầu 3: *Thị trường thịt trộn có tính chất phản chu kỳ hay không?*

Có. Do hệ số của diff_index âm (-12.62), và significance.

Yêu cầu 4: *Doanh số có tính chất mùa vụ hay không?*

Có. Do hệ số của cold_quater là significance. Cụ thể hơn, hệ số của cold_quarter là dương, chứng tỏ doanh số tốt hơn vào mùa lạnh.

C. Kết luận

Trong báo cáo này, chúng ta đã chọn ra 6 biến để xây dựng mô hình hồi quy:

1. adv: Chi phí quảng cáo trong quý.
2. pre_adv: Chi phí quảng cáo của quý trước.
3. prom: Chi phí khuyến mãi trong quý.
4. pre_prom: Chi phí khuyến mãi của quý trước.
5. diff_index là hiệu giữa chỉ số kinh tế của quý này, và chỉ số kinh tế của quý trước.
6. cold_quarter bằng 1 nếu đó là mùa lạnh (quý 1 và quý 4), bằng 0 nếu đó là mùa nóng (quý 2 và quý 3).

Mô hình hồi quy đó là:

$$\begin{aligned}\text{sales} = 255.32 + 6.21 \cdot \text{prom} - 3.72 \cdot \text{pre\_prom} + 2.53 \cdot \text{adv} + 2.88 \cdot \text{pre\_adv} - 12.62 \cdot \text{diff\_index} \\ + 51.72 \cdot \text{cold\_quarter}.\end{aligned}$$

Dựa trên mô hình này, ta cũng đi đến các kết luận:

1. Nên đầu tư vào quảng cáo vì nó tăng doanh số nhiều hơn trong dài hạn.
2. Thị trường thịt trộn có tính phản chu kỳ.
3. Doanh số có tính chất mùa vụ, cụ thể là tăng vào mùa lạnh (quý 1 và quý 4).

Báo cáo đã sử dụng phần mềm Microsoft Excel để xây dựng mô hình hồi quy và ước lượng độ chính xác của các hệ số.

Tài liệu

[1] Thư viện JVnTextPro: http://jvntextpro.sourceforge.net/

[2] Source Code: https://github.com/blackjack94/clustering_news

Bài dự thi của Lê Vũ Hoàng (Bảng B).

Phần I. Phân tích dữ liệu phi cấu trúc

Câu hỏi. *Với số lượng bài viết lớn như vậy (hơn 28.000 bài viết), bạn hãy tìm cách nào đó để nhóm các bài viết theo những chủ đề khác nhau. Bạn hãy đề xuất một phương pháp để có thể đặt tên cho từng chủ đề một cách hợp lý nhất.*

Bước 1 : Tách từ tiếng Việt.

Vì các bài viết đều ở dạng tiếng Việt, yêu cầu đầu tiên là phải nhóm các từ tiếng Việt lại với nhau. Điều này giúp phân tích chủ đề và ngữ nghĩa trong tiếng Việt đúng hơn.

Phương pháp tách từ: Conditional Random Fields là một mô hình Markov (Lafferty et al., 2001) với xác suất của state space

$$p_\theta(s|o) = \frac{1}{Z(o)}\exp\left[\sum_{t=1}^{T} F(s,o,t)\right],$$

$$F(s,o,t) = \sum_i \lambda_i f_i(s_{t-1},s_t) + \sum_j \lambda_j g_j(o,s_t).$$

Ta sử dụng Viterbi algorithm để huấn luyện tập Train gồm các câu Tiếng Việt bằng Maximum Likelihood

$$L = \sum_{j=1}^{N} \log\left[p_\theta(s^{(j)}|o^{(j)})\right] - \sum_k \frac{\lambda_k^2}{2\sigma^2}.$$

Ví dụ File data gốc: $00014E4D9B4AD4F48B770F1AB5285494$.

Nội dung:

```
Nên mua Pentax K50 hay Pentax K S2?

Mình định dấn thân vào con đường "hao tiền tốn của" này với
một máy "entry level" để tập chụp. Do thích "hàng độc" so vo
với tụi bạn nên mình quyết định mua một máy Pentax. Mình ở
tỉnh lẻ nên không có điều kiện thử máy trực tiếp. Bạn nào
từng chụp qua rồi cho mình nhận xét về hai máy này nhé. Mình
chỉ mua máy Pentax thôi nên không quan tâm nhiều đến Nikon,
Canon,... trong cùng phân khúc giá.
Tin Khác. Đời sống số

Vòng đeo tay thông minh từ các thương hiệu nổi tiếng thường
có giá cao nên người Việt đang chuyển sang dùng hàng Trung
Quốc với nhiều mẫu mã, tính năng và giá bán thấp hơn.
Những chiếc máy nghe nhạc của Apple dù đã ngừng sản xuất
```

```
vẫn được chào bán trên eBay với giá cao gấp vài lần giá

Lợi thế về khẩu độ mở giúp di động của Samsung chụp trong tối
tốt hơn và khả năng xóa phông nền mạnh hơn với các bức chụp
cận cảnh.

Trang chủ
```

Kết quả word segmentation

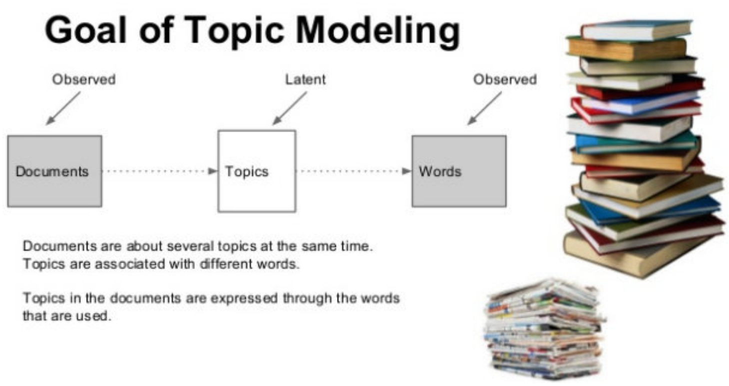
```
Mình định dấn_thân vào con_đường \" hao tiền tốn của \" này
với một máy \" entry level \" để tập chụp .. Do_thích \" hàng_độc
\" so vo với tụi bạn nên mình quyết_định mua một máy Pentax. Mình
ở tỉnh_lẻ nên không có điều_kiện thử_máy trực tiếp. Bạn nào từng
chụp qua rồi cho mình nhận_xét về hai máy này nhé. Mình chỉ mua
máy Pentax thôi nên không quan_tâm nhiều đến Nikon , Canon ...
trong cùng phân_khúc giá .. Tin Khác. Đời_sống số. Vòng đeo tay
thông_minh từ các thương_hiệu nổi_tiếng thường có giá cao
nên_người Việt đang chuyển sang dùng hàng Trung_Quốc với nhiều
mẫu_mã , tính_năng và giá_bán thấp hơn .. Những chiếc máy_nghe
nhạc của Apple dù đã ngừng sản_xuất vẫn được chào_bán trên eBay
với giá cao gấp và
```

Từ được ghép: sản xuất → sản_xuất và chào bán → chào_bán

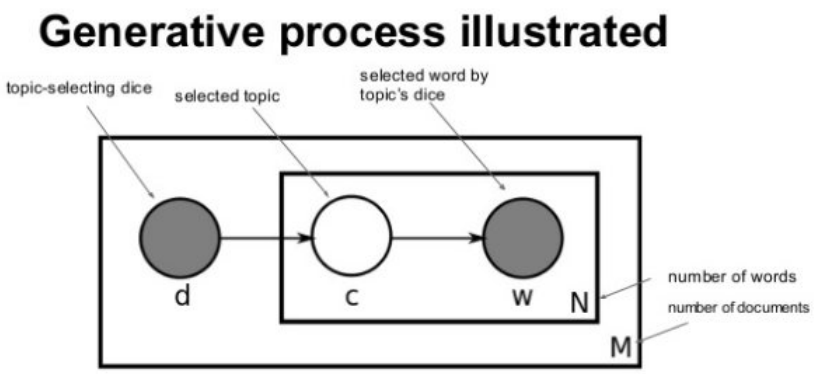
Bước 2: Lọc các đoạn vô nghĩa.

Chỉ lấy nội dung của bài viết, các bài viết không có nội dung được bỏ, các bài viết mang tính câu hỏi sẽ được liệt vào topic "Khách hỏi".

Bước 3: Topic modeling – chia các article giống nhau vào cùng một chủ đề

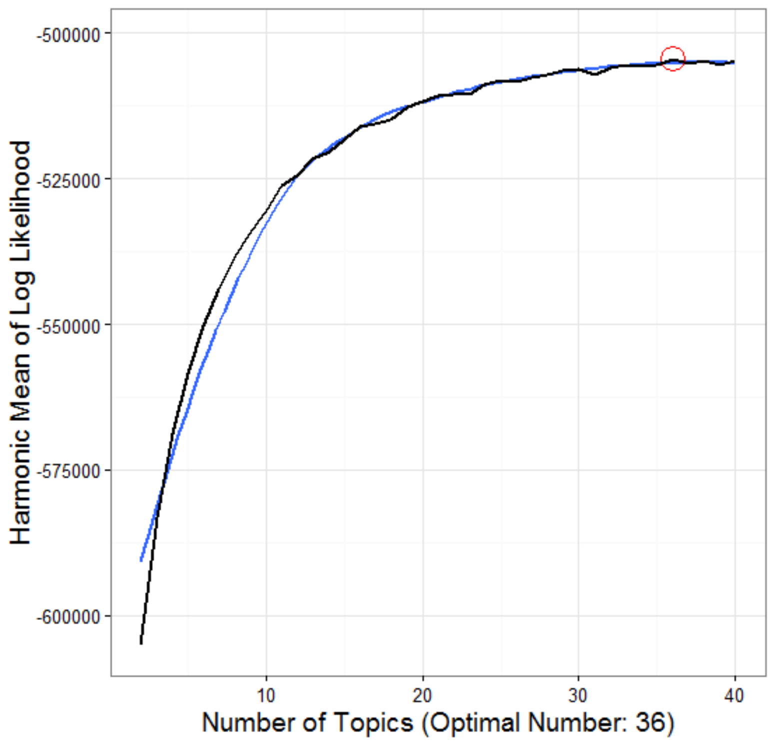


Phương pháp chia topic: Latent Dirichlet allocation



LDA là phương pháp mở rộng của LSA và pLSA với phân phối Dirichlet trong dự đoán Bayes. LDA được chọn vì tính flexible và thường cho kết quả tốt hơn LSA.

Để tính số topic, tính harmonic mean của hàm likelihood



Như vậy, số topic cần là 36.

Phần II. Phân tích dữ liệu có cấu trúc

Phần câu hỏi

1. *Đề xuất một mô hình hồi quy tuyến tính (linear regression) để dự đoán doanh số bán thịt trộn cho QK.*

Khi xây dựng mô hình tuyến tính, ta có chỉ số R-squared để có hiệu số fit của mô hình và data. Tuy nhiên R-square không nói lên được mô hình có thích hợp với data mới hay không, nên chọn lựa theo R-squared sẽ bị nguy cơ overfit (điều sẽ xảy ra với data này).

Để tránh trường hợp trên, ta chia data 24 quý thành 2 tập training và test để chọn lựa mô hình tốt nhất dựa trên thang đo MSE (Mean square error – out - of sample test) và R-squared (in - sample test).

- Mô hình 1 : Lấy tất cả các biến đã cho (training all = 24 quý).

```
Call:
lm(formula = Sales ~ ., data = train)

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    883.525    389.121   2.271 0.034377 *
Prom             5.215      1.133   4.604 0.000172 ***
Adv.             3.112      1.070   2.909 0.008677 **
Index           -5.629      3.746  -1.502 0.148618

Residual standard error: 88.74 on 20 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.6059,    Adjusted R-squared:  0.5467
```

Mô hình trên có p-value < 0.05 cho thấy mô hình tuyến tính khá tốt cho việc dự đoán doanh số sales. Tuy nhiên để ra quyết định thì hệ số mô hình là rất quan trọng. Việc cải thiện mô hình cần lấy từ các gợi ý của kinh doanh.

- Mô hình 2 : Thêm chi phí khuyến mãi mùa trước.

  Gợi ý: "*Một số người khác lại cảm thấy rằng việc khuyến mãi có tác động làm giảm doanh số bán hàng trong tương lai. Nghĩa là, họ cảm thấy các đại lý và quản lý cửa hàng mua rất nhiều trong thời gian khuyến mãi và sau đó không đặt hàng ở các giai đoạn tiếp theo cho đến khi họ cần.*"

  Suy ra thêm biến Prom_bf = Promotion season before, bỏ Index.

```
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  1801.2820   530.5412   3.395 0.003444 **
Prom            5.7390     0.7741   7.414 1.01e-06 ***
Adv.            2.4240     0.6663   3.638 0.002033 **
Prom_bf        -3.5060     0.7491  -4.680 0.000215 ***
Ad_bf           2.6951     0.6916   3.897 0.001160 **
eco         -1508.4553   530.9226  -2.841 0.011282 *

Residual standard error: 53.39 on 17 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8779,   Adjusted R-squared:  0.842
```

Ta có Adjusted R - squared tăng ($0.68 \rightarrow 0.84$). Test out - of - sample cho thấy mô hình 3 luôn có MSE thấp hơn 1 & 2.

Suy ra *ngược với nhận định, quảng cáo, khuyến mãi và nền kinh tế có ảnh hưởng đến doanh số.*

Ta chọn mô hình 3 để dự đoán doanh số.

Doanh số = $1801.2820 + 5.739 *$ Chi phí khuyến mãi quý này $-3.506 *$ Chi phí khuyến mãi quý trước $+2.424 *$ Chi phí quảng cáo quý này $+2.6951 *$ Chi phí quảng cáo quý trước $-1508.4553 *$ Index kinh tế quý này / Index kinh tế quý trước.

2. *Nếu bạn có* \$1.000 *để dành cho một trong hai việc quảng cáo và khuyến mãi, thì bạn nên chọn cái nào và tại sao? Có những tác động như thế nào đến việc sử dụng* \$1.000 *trong mỗi việc quảng cáo hoặc khuyến mãi?*

Dựa trên mô hình tuyến tính ta thấy nếu dành \$1.000 cho khuyến mãi sẽ làm doanh số quý này tăng \$5.739 nhưng sẽ giảm doanh số quý tới \$3.506 suy ra tổng tăng = \$2.233.

Ngược lại, \$1.000 đầu tư cho quảng cáo sẽ làm tăng doanh số quý này \$2.424 và quý tới \$2.695 suy ra tổng tăng = \$5.119.

Vậy ta nên chọn quảng cáo.

3. *Bạn có đồng ý với ý kiến của chuyên viên phòng tài chính rằng thị trường thịt trộn có tính chất "phản chu kỳ" (counter-cyclical) so với chỉ số kinh tế? Tại sao?*

Đồng ý thị trường thịt trộn có tính phản chu kì vì chỉ số eco = Index kinh tế quý này / Index kinh tế quý trước có hệ số $-1057.4553 < 0$ suy ra Index tăng so với kì trước thì doanh thu giảm và ngược lại.

4. *Bạn có nghĩ rằng có tính chất mùa vụ trong doanh số bán hàng hay không? Tại sao?*

- Test 1 : Kiểm định Independent test với 2 biến Sales và Season.

H_0 : Sales và Season độc lập.

H_1 : Sales và Season không độc lập.

Contingency Table

	Mùa lạnh	Mùa nóng
$\leqslant 400$	5	5
$401 \rightarrow 500$	3	2
> 500	4	5

Test statistic: Chi - square

$$\chi^2 = \sum_{i,j} \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}.$$

X - squared = 0.31111, $df = 2$, p - value = 0.8559.

Suy ra "*Can not reject Ho*" do đó doanh thu có thể độc lập với mùa vụ.

- Test 2 : Correlation 2 biến Sales và Season $= 0.1018$ suy ra gần như không có tương quan tuyến tính.
- Kết luận: Tính chất mùa vụ trong doanh số là rất yếu.