Epsilon
Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

EPSILON

13 june 2019

“Chúng ta sống trong không gian bao nhiêu chiều?
Tại sao chúng ta thường quan niệm không gian mà chúng ta đang sống lại có ba chiều và thời gian chỉ có một chiều?
Nếu có những chiều còn bị ẩn giấu, làm thế nào để khám phá ra chúng?”

Khám phá các chiều ẩn giấu của không thời gian
Nguyễn Ái Việt

“Toán ứng dụng - đó là khi bạn đi tìm lời giải cho bài toán, còn toán lý thuyết - đó là khi bạn đi tìm bài toán để giải”

Mã và các kỳ thi Olympic Toán – Phần 1
S.B. Gashkov

VÀ CÁC CHUYÊN MỤC KHÁC

Học đếm như thế nào?
Vũ Hồng Sơn

Xung quanh đề thi học sinh giỏi Vương quốc Anh 2019
Cao Hoàng Đức

Một mở rộng của định lý Feuerbach trong trường hợp tam giác vuông
Trần Quang Hùng

EPSILON

Biên tập viên:
Lê Viết Ân
Võ Quốc Bá Cẩn
Trần Quang Hùng
Nguyễn Văn Huyện
Lê Phúc Lữ
Tống Hữu Nhân
Đặng Nguyễn Đức Tiến

Chủ biên:
Trần Nam Dũng

LỜI NGỎ

Là chiếc xe chạy bằng năng lượng "tình nguyện" Epsilon tiếp tục là một sản phẩm tập thể của các tác giả đến từ trong và ngoài nước, thuộc nhiều thế hệ, đại diện cho nhiều ngành nghề.

Được định hướng bằng tinh thần tự do, Epsilon sẽ không có một khuôn khổ chung nào về nội dung lẫn phong cách, ngoại trừ việc chắc chắn các bài viết ở những mức độ khác nhau sẽ liên quan đến toán và những người yêu toán.

Được xây dựng với phương châm “dù là sản phẩm miễn phí nhưng phải thật chuyên nghiệp", Epsilon 15 cũng như các số trước của Epsilon sẽ được biên tập và trình bày rất cẩn thận, chỉn chu.

Epsilon số 15 sẽ lại tiếp nối con đường tình nguyện của 14 số Epsilon đi trước, để rồi sẽ lại có Epsilon 16, Epsilon 17, ... những tác phẩm đem vẻ đẹp toán học đến cho mọi người, nơi những người yêu toán có thể chia sẻ những điều mình tâm đắc.

Và bây giờ, mời các bạn cùng đọc Epsilon 15.

MỤC LỤC

KHÁM PHÁ CÁC CHIỀU ẨN GIẤU CỦA KHÔNG THỜI GIAN

Nguyễn Ái Việt
(Viện Công Nghệ Thông Tin, Đại Học Quốc gia Hà Nội)

GIỚI THIỆU

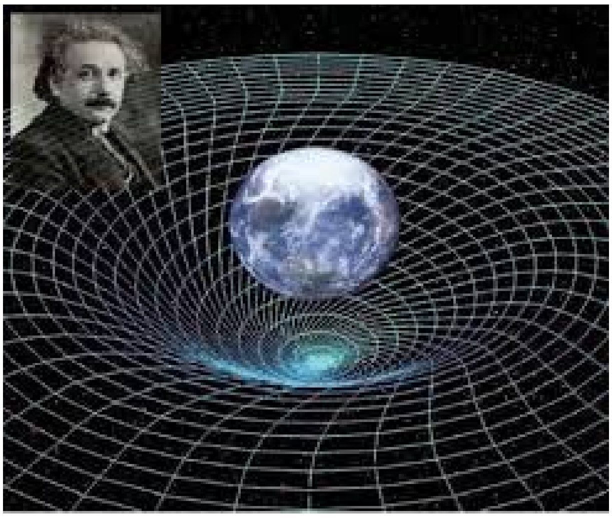
Chúng ta sống trong không gian bao nhiêu chiều? Tại sao chúng ta thường quan niệm không gian mà chúng ta đang sống lại có 3 chiều và thời gian chỉ có 1 chiều? Nếu có những chiều còn bị ẩn giấu, làm thế nào để khám phá ra chúng? Nếu các chiều ẩn giấu là gián đoạn, chúng ta có thể định nghĩa đạo hàm theo các hướng gián đoạn. Hình học Riemann mở rộng sẽ bao gồm tất cả các tương tác vật lý mà chúng ta biết. Cấu trúc toán học được xây dựng một cách thủ công dựa trên trực giác đơn giản như vậy dẫn đến hình học không giao hoán, một trong những cấu trúc hình học tổng quát và hiện đại nhất. Nội dung của bài viết dựa trên bài giảng đại chúng nhân ngày hội Toán học 2017. Qua đó tác giả cũng trao đổi về một cách đào tạo Toán học khác so với luyện thi cho các kỳ thi Toán Quốc tế.

Sóng hấp dẫn và hình học Riemann

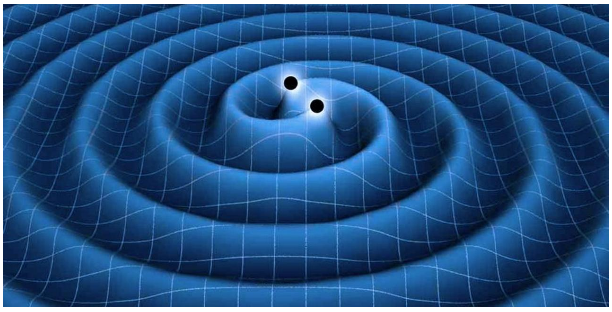
Giải thưởng Nobel năm 2017 được trao cho R.Weiss, B.Barish và K.Thorn về việc quan sát được sóng hấp dẫn tại LIGO vào ngày 14 tháng Chín năm 2015. Đây là chứng minh thực nghiệm cuối cùng của hình học Riemann 4 chiều, trong đó 3 chiều không gian và 1 chiều thời gian, do A.Einstein và D.HIlbert xây dựng năm 1915. Dựa trên lý thuyết này A.Einstein đã tiên đoán sự tồn tại của sóng hấp dẫn vào năm 1916.

Hình học Riemann là hình học của không gian Euclide 4 chiều bị cong đi. Để dễ tưởng tượng, chúng ta sẽ xét một không gian 2 chiều bị cong đi như trong Hình 1. Một cách trực giác, chúng ta sẽ tưởng tượng có một mặt phẳng đàn hồi, làm bằng cao su chẳng hạn. Nếu chúng ta đặt một vật nặng lên mặt cao su đó, vật nặng sẽ tạo nên một chỗ lõm và mặt cao su trở nên cong đi xung quanh vật nặng đó. Nếu chúng ta thả một viên bi lên mặt cong, viên bi sẽ bị "hút" về phía vật nặng.

Einstein cũng quan niệm như vậy trong không thời gian 4 chiều, các vật có khối lượng sẽ làm cong không thời gian xung quanh chúng và hút các vật có khối lượng khác. Như vậy, tương tác hấp dẫn có bản chất hình học, mô tả độ cong của không thời gian.



Hình 1: *Không gian 2 chiều cong và vật nặng*



Hình 2: *Sáp nhập hai lỗ đen tạo ra sóng hấp dẫn*

Khi chúng ta xem xét các chiều không gian bình đẳng với chiều thời gian, các đại lượng hình học không còn cố định nữa, các khái niệm độ cong, độ dài, góc đều thay đổi theo thời gian. Chính sự dao động, nhảy nhót và truyền tín hiệu này là sóng hấp dẫn. Tín hiệu sóng hấp dẫn quan sát được tại LIGO là từ một sự kiện xảy ra cách đây 1.3 tỷ năm, hai lỗ đen sáp nhập vào nhau, tạo thành một chấn động khủng khiếp làm biến dạng vũ trụ (Hình 2). Dao động này truyền với vận tốc ánh sáng về đến với chúng ta sau 1.3 tỷ năm.

Thí nghiệm tại LIGO được thiết lập tại hai địa điểm cách nhau hơn 3 nghìn km trên nước Mỹ, và cùng bắt được tín hiệu giống hệt nhau, đo được dao động thay đổi bất thường về độ đo chiều dài với độ chính xác vô cùng cao với các công nghệ hiện đại nhất.

Như vậy, sau 100 năm, chúng ta đã chứng minh được quan điểm không thời gian cong của Einstein-Hilbert là đúng đắn. Câu hỏi còn lại là không thời gian chúng ta đang sống có thực chỉ có 4 chiều hay không?

Chúng ta sống trong không thời gian bao nhiêu chiều ?

Từ khi toán học mới ra đời, chúng ta đã thường nghĩ rằng không gian có 3 chiều. Chúng ta coi điều đó là hiển nhiên. Có lẽ điều đó xuất phát từ quan sát trực giác góc phòng của chúng ta.

Hình 3: *Góc phòng và không gian 3 chiều*

Mọi vị trí, đồ vật đều có thể mô tả bởi độ cao, bề rộng và bề dài, tương ứng với khoảng cách tới tường nhà (Hình 3).

Quan niệm thời gian về thời gian 1 chiều gắn liền việc đo thời gian bằng đồng hồ quả lắc (Hình 4), cho dù hiện nay, người ta đo thời gian bằng rất nhiều công cụ tinh vi hơn.

Như vậy, chúng ta mô tả mọi sự kiện bởi 4 số thực (x, y, z, t), trong đó x, y và z là các tọa độ không gian, còn t là thời gian. Theo quan niệm này, sự kiện hoặc vị trí của đối tượng vật chất tồn tại được xác định bằng địa điểm và thời điểm.

Trong vật lý cổ điển điều đó tuyệt đối đúng. Tại một thời điểm cho trước, chỉ có thể có một sự kiện xảy ra tại một địa điểm. Ở nhà hát, trong một buổi diễn, một ghế chỉ giành cho một người. Trên máy bay và các phương tiện giao thông cũng vậy.

Quan niệm về không gian và thời gian của Einstein hoàn toàn dựa trên việc mô tả sự kiện bằng 4 số thực như trên. Liệu trong thực tế điều đó có phải là tuyệt đối?

Chúng ta sẽ chỉ ra một số trường hợp mà chúng ta đã vi phạm quan niệm không gian sự kiện 4 chiều nói trên trong thực tế.

Trước hết, trong tư duy phán đoán chúng ta cho rằng tại một thời điểm, một vị trí có nhiều khả năng xảy ra các sự kiện khác nhau. Khi phán đoán, chúng ta phải xem xét các sự kiện đồng thời và bình đẳng. Nếu sử dụng công cụ hình học cho việc phán đoán như thế, không gian sự kiện 4 chiều không đủ. Chỉ có một chìa khóa trong chùm chìa khóa mở được một lỗ khóa trong thực tế. Nhưng trong phán đoán, các chìa khóa đều bình đẳng (Hình 5)

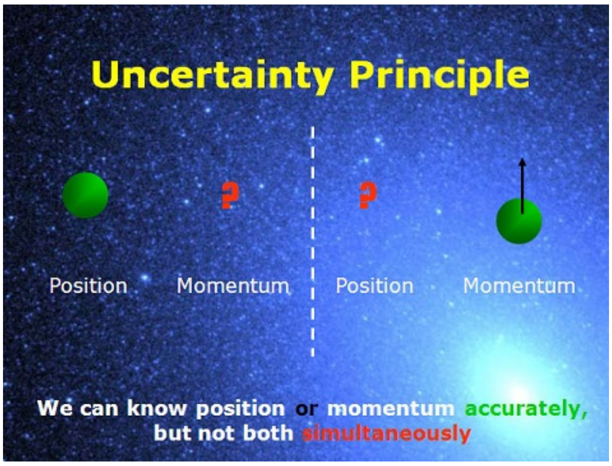
Tương tự, các cô gái cần chọn một người trong số nhiều chàng trai để tới đám cưới chỉ có một chú rể được lựa chọn. Ai sẽ là người chồng cần chọn? Trong các khả năng, nhiều tham số như tuổi tác, sức khỏe, tính nết, đạo đức, tiền bạc,... đã phải tính đến. Điều đó cho thấy khi chọn lựa, các cô gái đã phải làm việc trong một không gian không chỉ mô tả bởi 4 chiều. Sự kiện đám cưới 4 chiều, chỉ có một chú rể phải thỏa mãn các tham số ẩn giấu khác (Hình 6).

Trong thế giới lượng tử của đối tượng vi mô từ nguyên tử trở xuống, mọi khả năng đều có thể đồng thời xảy ra. Hệ thức bất định nổi tiếng của W.Heisenberg cho rằng mọi sự kiện trong thế giới vi mô đều có sự bất định về tọa độ, thời gian, xung lượng và năng lượng. Một hạt điện tử

Hình 4: *Đồng hồ quả lắc đo thời gian 1 chiều*

Hình 5: *Các khả năng*

Hình 6: *Chú rể được chọn nhờ các tham số ẩn giấu nào?*



Hình 7: *Hệ thức bất định Heisenberg*

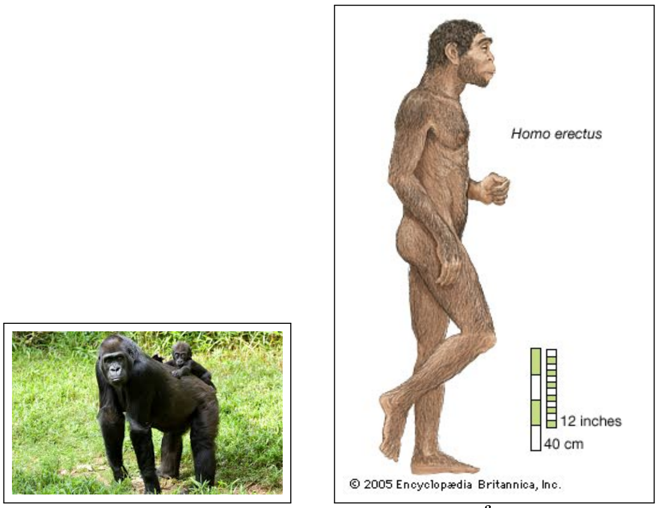
có thể đồng thời tồn tại ở nhiều nơi trong cùng một lúc. Vì vậy tại một địa điểm, một thời điểm cũng có thể có nhiều khả năng khác nhau có thể xảy ra.

Trong thế giới lượng tử, chúng ta không thể trông cậy vào trực giác chỉ dựa trên quan sát bằng mắt thường. Mọi khả năng đều phải tính đến. Tại tọa độ không thời gian (x, y, z, t) có thể có nhiều sự kiện khả dĩ và đều "xảy ra" theo quan điểm lượng tử. Trong thực tế, ngoài các chiều vật lý, còn có các chiều xã hội, tâm lý, ý thức còn phức tạp và trừu tượng hơn, gây ra những bất định còn cao hơn.

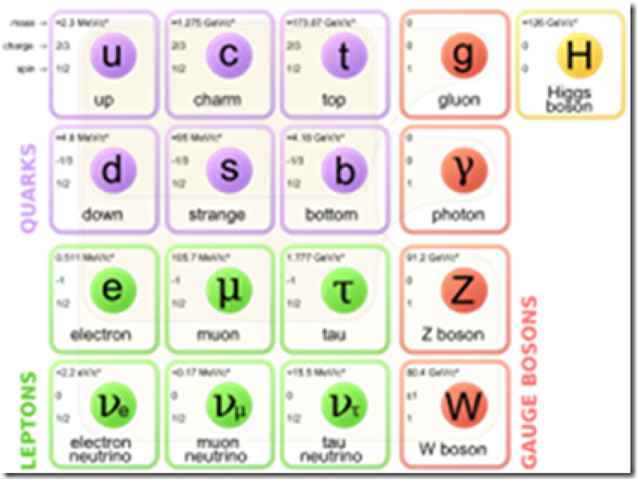
Điều đó ảnh hưởng thế nào đến quan niệm về không thời gian?

Các chiều không thời gian còn ẩn giấu

Việc phát hiện ra các chiều còn ẩn giấu sẽ đem tới những nhảy vọt hết sức to lớn về mặt nhận thức. Chúng ta có thể lấy ví dụ sinh động nhất về sự khác biệt về nhận thức giữa loài tinh tinh bò bằng 4 chân, quan niệm thế giới như không gian 2 chiều và người đứng thẳng, biết có thế giới 3 chiều (Hình 8).



Tinh tinh và người đứng thẳng



Hình 8: *Vật chất và tương tác trong mô hình chuẩn*

Chúng ta sẽ xem xét khả năng mở rộng không thời gian 4 chiều của Einstein với một số chiều còn ẩn giấu để giữ được các thành tựu của hình học Riemann 4 chiều. Bên cạnh đó chúng ta sẽ xem xét việc mở rộng đó có mô tả được những điều gì bên cạnh tương tác hấp dẫn và liệu chúng có mô tả được các thành tựu mới nhất của vật lý hay không.

Bức tranh về vật chất và các tương tác của chúng ta ngày nay là Mô hình chuẩn do A.Salam, S.Weiberg và S.Glashow [1] đề xuất đơn giản hơn rất nhiều so với bảng tuần hoàn của Mendeleev, chỉ gồm các hạt quark, lepton, các tương tác mạnh, yếu, điện từ và hạt Higgs như trong Hình 8.

Trong mô hình trên về vật chất và tương tác, phía trái chúng ta có 6 hạt quark màu tím và 6 hạt lepton màu xanh lá cây. Tương tác mạnh mô tả bằng các hạt gluon g, tương tác yếu và tương tác điện từ mô tả bằng các hạt photon γ, Z và W màu đỏ. Hạt Higgs H màu vàng sinh khối lượng cho các hạt còn lại.

Trong Mô hình Chuẩn, các tương tác mạnh, yếu và điện tử, được xây dựng xuất hiện nhờ một lý thuyết đựa trên đối xứng địa phương $SU(3)$ và $SU(2) \times U(1)$ do C.N.Yang và R.Mills tìm ra từ năm 1954 [2]. Như vậy, chúng ta có được tương tác hấp dẫn là nhờ hình học Riemann trong không thời gian 4 chiều, còn các tương tác khác có được là nhờ lý thuyết Yang-Mills. Trong Mô hình Chuẩn

Câu hỏi đặt ra là: Liệu có thể mở rộng hình học Riemann của không thời gian 4 chiều bằng cách bổ sung thêm các chiều ẩn giấu để có thể có được tất cả các tương tác trong Mô hình Chuẩn?

Năm 1921, Th.Kaluza [3] đề xuất mở rộng hình học Riemann 4 chiều sang 5 chiều. Lý thuyết này mô tả đồng thời tương tác hấp dẫn và tương tác điện từ. Einstein đã ủng hộ ý tưởng này cho đến cuối đời, coi đây là phương pháp để mô tả mọi tương tác của tự nhiên. Trong thực tế, từ những năm 1980 cho đến nay, vật lý hiện đại cũng phát triển theo hướng mở rộng hình học Riemann vào nhiều chiều để thống nhất các tương tác bằng các lý thuyết hình học: siêu hấp dẫn 11 chiều, lý thuyết dây 26 chiều, lý thuyết siêu dây 10 chiều. Các lý thuyết này đều có những thành tựu to lớn về mặt toán học và vật lý. Tuy nhiên, do sử dụng các chiều compact và liên tục nên các lý thuyết này đều chứa vô hạn các hạt có khối lượng không quan sát được trong thực tế.

Để tránh việc này, người ta có thể nghĩ đến các chiều ẩn giấu gián đoạn. Chẳng hạn chiều bên trong có thể là N điểm. Khi đó, lý thuyết sẽ có hữu hạn hạt, việc tính toán với các đại lượng hữu hạn và kiểm chứng thực tế cũng dễ dàng hơn.

Đạo hàm và chiều gián đoạn

Khi không gian cong thậm chí xoắn, hoặc có những đặc trưng topo phức tạp, kỳ dị, việc xác định chiều của không gian này bằng trực giác không đơn giản như nhìn vào góc phòng. Chiều của không gian được xác định nhờ đạo hàm. Đường cong có tiếp tuyến tại mọi điểm là đường thẳng, ứng với đạo hàm theo một biến duy nhất, do đường cong là một chiều.

Tại mọi điểm trên một mặt cong bất kỳ, đều có một mặt tiếp xúc, ứng với đạo hàm theo hai biến độc lập liên tục, như vậy mặt cong là hai chiều. Một cách tổng quát, một không gian cong n chiều bất kỳ sẽ có một không gian tiếp xúc là không gian Euclide n chiều R^n, và sẽ có đạo hàm theo n biến độc lập. Những khái niệm này, học sinh trung học dù chưa biết đến không gian n chiều cũng có thể nắm được khá dễ dàng.

Vấn đề đặt ra như sau: Nếu các chiều ẩn giấu là gián đoạn, làm thế nào chúng ta có thể quan sát được chúng.

Trong bài này chúng ta sẽ chỉ hạn chế với một chiều thứ 5 gián đoạn, bên cạnh 4 chiều không thời gian liên tục. Việc mở rộng với nhiều chiều gián đoạn hoàn toàn tương tự và dễ dàng.

Theo logic ở trên, nhận thức chiều của không gian thông qua khái niệm đạo hàm. Như vậy, đối với chiều gián đoạn, đạo hàm sẽ được định nghĩa thế nào? Điều này hoàn toàn đơn giản với học sinh trung học. Giả sử trong chiều gián đoạn thứ 5 bên cạnh 4 chiều liên tục không gian và thời gian ta có N điểm $x_0, x_1, ..., x_{N-1}$ gián đoạn. Để đơn giản chúng ta sẽ chỉ xét trường hợp các điểm nói trên cách đều nhau một khoảng không đổi $\delta x = 1/m$. Khi đó đạo hàm thứ 5 tại điểm i được định nghĩa khá trực giác như sau:

$$\partial_5 f(i) = m(f(i+1) - f(i-1))/2 \tag{1}$$

Đối với các điểm ở đầu mút x_0 và x_{N-1} ta có thể có hai cách định nghĩa. Cách thứ nhất tương ứng với việc các điểm gián đoạn nằm trên một đường cong mở có định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} \partial_5 f(0) &= m(f(1) - f(0)) \\ \partial_5 f(N-1) &= m(f(N-2) - f(N-1)). \end{aligned} \tag{2}$$

Cách thứ hai ứng với việc các điểm gián đoạn nằm trên một đường cong đóng, được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} \partial_5 f(0) &= m(f(1) - f(N-1))/2 \\ \partial_5 f(N-1) &= m(f(N-2) - f(N-1))/2 \end{aligned} \tag{3}$$

Trong trường hợp không gian trong có 2 điểm gián đoạn, chúng ta sẽ dùng khái niệm đạo hàm như sau:

$$\begin{aligned} \partial_5 f(0) &= m(f(1) - f(0)) \\ \partial_5 f(1) &= m(f(0) - f(1)). \end{aligned} \tag{4}$$

Với định nghĩa chiều bên trong gián đoạn và đạo hàm theo chiều gián đoạn như vậy, chúng ta hoàn toàn có thể xây dựng hình học Riemann với các chiều bên trong gián đoạn.

Trong hình học Riemann thông thường, các đại lượng hình học như độ đo, độ cong, liên thông, độ xoắn đều mô tả bằng các tensor hiệp biến, trong đó các biến không gian và thời gian đều đóng vai trò bình đẳng. Điều đó có nghĩa là ở đâu có đạo hàm theo một biến không gian và không gian thì cũng có đạo hàm theo các biến còn lại. Mở rộng với các chiều gián đoạn chỉ đơn thuần là trong các biểu thức, chúng ta bổ sung thêm định nghĩa đạo hàm theo chiều gián đoạn bên cạnh các đạo hàm theo không thời gian.

Năm 1995, Viet và Wali đã xây dựng thành công hình học Riemann cho không thời gian mở rộng với một chiều gián đoạn có 2 điểm [4]. Nói một cách khác lý thuyết này có hai lá không thời gian 4 chiều. Trong lý thuyết mở rộng này, chúng ta sẽ có một cặp trường hấp dẫn và một cặp trường điện từ. Trong mỗi cặp, một trường là không có khối lượng và một trường có khối lượng. Trong trường hợp các trường có khối lượng triệt tiêu, chúng ta có được lại kết quả của Kaluza, mà không cần chiều bên trong liên tục.

Điều lý thú hơn là hình học Riemann mở rộng này có thể xây dựng chặt chẽ về mặt toán học dựa trên các khái niệm của hình học không giao hoán do A.Connes [5] đề xuất, như là bước phát triển tự nhiên của hình học thông thường.

Câu hỏi được đặt ra là: Ý nghĩa thực tế của chiều gián đoạn thứ 5 là gì và tại sao lại có 2 điểm? Năm 1989, A.Connes và J.Lott [6] để xuất mô hình như sau: Các hạt xoắn trái sống trên một lá không thời gian 4 chiều và các hạt xoắn phải sống trên một lá không thời gian 4 chiều khác. Như vậy không thời gian thực sự sẽ có thêm một chiều gián đoạn gồm 2 điểm. Chiều gián đoạn này được thể hiện bằng sự tồn tại của các hạt vật lý xoắn phải và xoắn trái.

Trong mô hình không thời gian Connes-Lott phẳng, lý thuyết Yang-Mills sẽ tự động bao gồm cả hạt Higgs, như là thành phần thứ 5 của các hạt truyền các tương tác yếu và điện từ.

Lý thuyết Viet-Wali tuy lý thú ở việc trường điện từ xuất hiện cùng với trường hấp dẫn trong một hình học Riemann mở rộng, nhưng chưa bao gồm được tương tác yếu và tương tác mạnh là các lý thuyết Yang-Mills dựa trên đối xứng phi Abel $SU(3)$ và $SU(2)$.

Năm 2015, Việt và Dự [7] chứng minh được một định lý quan trọng: chỉ có thể mở rộng lý thuyết Việt-Wali để hình học Riemannn với một chiều ẩn giấu gián đoạn gồm 2 điểm, bao gồm các trường Yang-Mills phi abel trong 2 trường hợp. Trong trường hợp thứ nhất, trường Yang-Mills trên một lá không thời gian phải là abel. Trong trường hợp thứ hai, trường Yang-Mills trên cả hai lá không thời gian phải giống hệt nhau.

Điều thú vị là trường hợp thứ nhất áp dụng được cho tương tác yếu và điện từ. Tròng Mô hình chuẩn các tương tác yếu và điện từ dựa trên lý thuyết Yang-Mills với nhóm phi abel $SU(2)\times U(1)$ cho các hạt xoắn trái và nhóm abel $U(1)$ cho các hạt xoắn phải. Mặt khác, trường hợp thứ hai áp dụng được cho tương tác mạnh nếu tương tác mạnh là trường Yang-Mills với cùng nhóm đối xứng phi abel $SU(3)$ cho hạt xoắn phải và xoắn trái. Nói một các khác, mọi tương tác của tự nhiên đều là thành phần mở rộng của hình học Riemann với chiều ẩn giấu gián đoạn.

Để có cả các tương tác mạnh yếu và điện từ trong hình học Riemann mở rộng, chúng ta có thể đưa vào thêm 2 chiều gián đoạn là chiều thứ 5 và thứ 6 của không thời gian và áp dụng định lý Việt-Dự 2 lần. Lần thứ nhất, hình học Riemann 6 chiều sẽ bao gồm hình học Riemann 5 chiều và trường Yang-Mills phi abel $SU(2) \times U(1)$ trên lá không thời gian 5 chiều thứ nhất và trướng Yang-Mills abel $U(1)$ trên lá thứ hai.

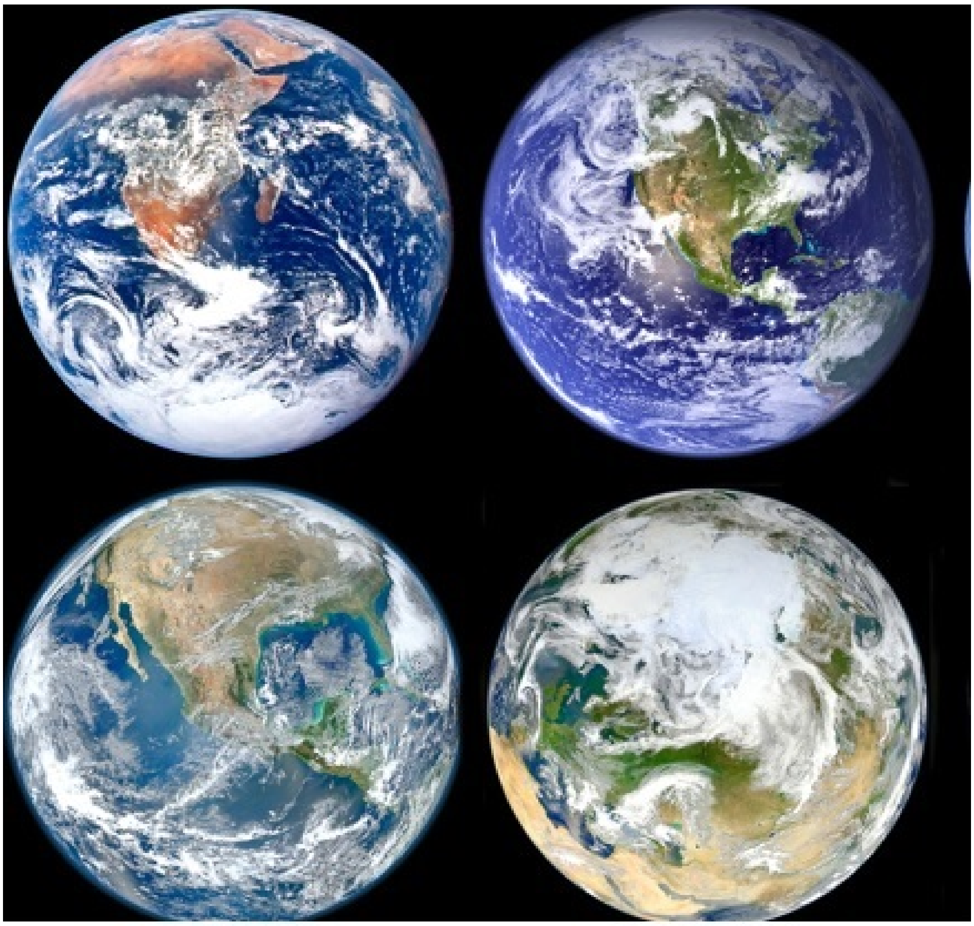
Áp dụng định lý Việt-Dự lần thứ hai, hình học Riemann 5 chiều sẽ bao gồm hình học Riemann 4 chiều của Hilbert-Einstein và trường tương tác mạnh với đối xứng phi abel $SU(3)$ cho cả hai lá không thời gian 4 chiếu cho các hạt xoắn phải và xoắn trái. Trong khi đó, lý thuyết Yang-Mills 5 chiều với đối xứng phi abel $SU(2) \times U(1)$ chính là lý thuyết Connes-Lott cho tương tác yếu và điện từ bao gồm cả các hạt Higgs.

Nói tóm lại, hình học Riemann mở rộng với 2 chiều gián đoạn bao gồm tất cả tương tác của tự nhiên và hạt Higgs như là thành phần của trường hấp dẫn mở rộng. Đặc biệt lý thuyết này giải thích được tính chất đối xứng của tương tác mạnh và tương tác yếu điện từ. Nói một cách khác, chúng ta đã quan sát được các chiều ẩn giấu gián đoạn thông qua sự tồn tại của các tương tác mạnh, yếu, điện từ và hạt Higgs.

Lý thuyết đẹp đẽ này chỉ dựa trên định nghĩa đơn giản về đạo hàm theo các chiều gián đoạn mà học sinh trung học cũng có thể hiểu như trên. Nói cách khác là cấu trúc hình học không giao hoán của hình học hiện đại cùng với lý thuyết thống nhất các tương tác của vật lý hiện đại tự động xuất hiện một cách đẹp đẽ nhờ 2 chiều ẩn giấu gián đoạn.

Chiều ẩn giấu thứ 6 và vật chất tối

Chiều thứ 5 theo quan niệm của Connes và Lott mô tả hai lá không thời gian cho các hạt vật chất xoắn phải và xoắn trái chúng ta quan sát được trong Mô hình Chuẩn. Chúng ta có câu hỏi



Hình 9: *Mô hình không thời gian 4 lá*

cuối cùng: Ý nghĩa thực sự tế chiều ẩn giấu thứ 6 là gì? Có một mô hình khả dĩ để lý giải chiều thứ 6 như sau: chúng ta có thể cho rằng trên lá không thời gian 5 chiều thứ nhất chúng ta có các vật chất của Mô hình Chuẩn, trên lá không thời gian 5 chiều thứ hai là các vật chất mới mà chúng ta chưa từng biết tới.

Điểm thú vị là từ các quan sát về vũ trụ, người ta đã chứng minh được rằng, các vật chất của Mô hình Chuẩn chỉ chiếm chưa tới 5% tổng số vật chất có trong vũ trụ. Khoảng 25% vật chất của vũ trụ là vật chất tối. Như vậy, chiều thứ 6 có thể mô tả sự hiện diện vật chất tối. Trường Yang-Mills $U(1)$ nói trên sẽ mô tả một trường photon mới là photon tối, có khối lượng và truyền tương tác thứ 5 của vật chất như một số nhà vật lý đã đề xuất [8].

Kết luận

Mục đích của bài viết này là chỉ ra rằng các khái niệm trừu tượng của Toán học hiện đại như hình học Riemann không giao hoán và bài toán thống nhất mọi tương tác của tự nhiên có thể hiểu được nhờ việc phân tích sâu sắc khái niệm chiều và đạo hàm gián đoạn là một khái niệm chúng ta đã biết từ trung học.Không thời gian mà chúng ta đang sống có thể bao gồm các chiều gian đoạn cũng có thể hiểu là 4 lá không thời gian 4 chiều như trong Hình 9.

Tài liệu

[1] S.Weinberg, Physical Review Letters **19** (21)(1967), 1264–1266A.

[2] C.N.Yang and R.Mills, Physical Review. 96 (1)(1954), 191–195.

[3] Th.Kaluza, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Klasse* (1927) 996.

[4] N.A.Viet and K.C.Wali, Int.J.Mod.Phys. **11**(13), (1996), 2403.

[5] A. Connes, Noncommutative Geometry, Academic Press, San Diego, CA, (1994), 661

[6] A.Connes and J.Lott, Nucl.Phys.**B18** (Proc. Suppl.), (1990), 29.

[7] N.A.Viet and P.T.Du, Modern Physics Lett **A32**(18), (2017), 1750095

[8] S.Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity* (2003) ISBN 0-8053-8732-3.

TRIẾT HỌC TRONG VẬT LÝ
PHẦN 1

Nguyễn Lê Anh

GIỚI THIỆU

Một "nhà chép sử" đương đại mô tả tác giả của bài viết này như sau: *"anh muốn hiểu được các vĩ nhân trong khoa học thực sự đã nghĩ gì, và vì sao họ có được những ý tưởng, công trình phát minh để đời như vậy – qua đó anh muốn hiểu vũ trụ, thế giới này và loài người hơn nữa! Điều đó trước kia hầu như không tưởng, nhưng bây giờ tra cứu tiện lắm, anh bảo "học một tuần bây giờ bằng ngày xưa học cả năm" – anh nghiên cứu lại lịch sử toán học và một bộ môn có rất nhiều liên quan tới nó là vật lý, học thật nghiêm túc với sức đọc hiểu kỳ lạ của mình! Ví dụ: anh nghiên cứu rất kỹ Einstein – một thiên tài vĩ đại nhưng theo anh ông chưa được chuẩn bị tối đa về mặt toán học. Anh say đắm trước cái phát minh "nhỏ bé" của ông đã mang lại cho ông giải Nobel vật lý – nó rất ngắn gọn và đẹp. Thế còn thuyết tương đối hẹp, thuyết tương đối mở rộng!? Nhiều cái ông Einstein này cũng "đoán mò" và ngay toán học lúc đó cũng còn chưa phát triển đủ cho các suy đoán của ông..."*

Vâng, "nhà chép sử" đang nói tới Nguyễn Lê Anh, một trong những tác giả "tủ" của Epsilon. Trong số báo thứ 15 này, Epsilon trân trọng gửi đến độc giả phần một trong loạt bài Triết học trong Vật lý của ông.

1. Thế nào là quan sát vũ trụ?

Có lẽ ngay từ nhỏ tôi đã thừa hưởng từ ba tôi đặc tính yêu tự do không có bất kể một cái gì hạn chế được tư duy của ông ấy. Ông ấy kể chuyện là lúc còn phải đi ở chăn trâu thuê ở các bãi tha ma. Những lúc lũ về ngập khắp nơi ông ấy trèo lên các ngôi mộ. Bọn trẻ con thì rất sợ ma và lẽ đương nhiên không đứa nào dám trèo lên nơi cao nhất chỗ cái bia mộ để ngồi tránh lũ. Tôi thì nghe ba tôi kể thế và tôi suy nghĩ. Tuy vẫn rất sợ và không dám nói ra nhưng tôi đã không hẳn tin là ma có thật và về sau này tôi cũng không tin các lực siêu nhiên là có thật.

Sự việc là thế này.

Bọn trẻ trong khu tập thể nhỏ thường chơi với nhau. Nhóm nhỏ ấy cũng có thủ lĩnh và thủ lĩnh thì luôn là đại diện cho chân lý mà mọi thành viên đều tuân theo một cách tự nhiên. Thủ lĩnh cái nhóm của bọn trẻ chúng tôi là con của bác giám đốc. Một lần thủ lĩnh tuyên bố "*con Cóc là cậu ông Trời ai mà đánh nó là Trời đánh cho*". Tôi khi ấy chắc 5 tuổi và cứ nhớ mãi một ngày tôi nhìn thấy dưới gầm giường có một con cóc to. Tôi lẳng lặng đánh chết nó. Những ngày sau đấy tôi quan sát xem ông Trời có biết chuyện không. Thật không may cho tôi vào một đêm tối khi đang đi trên con đê tôi nhìn thấy ánh trăng cứ mãi ở phía trước mặt. Tôi để ý các ông sao cũng như vậy. Thế là tôi hoảng sợ và hiểu ra là đang bị ông Trời đang theo dõi. Và rằng ông ấy sẽ sai Thiên Lôi đánh chết tôi. Tôi còn nhớ một buổi tối tôi đã khóc khi mẹ tôi không cho tôi đi theo.

Nhiều ngày sau tôi không ngủ được và rơi vào hoảng loạn. Thế rồi đến một ngày tôi đưa ra kết luận "*ông Trời đã quyết giết chết mình thì mình cũng không thoát được vậy nếu ngày nào còn sống thì cứ nên sống thoải mãi theo ý mình*." Tôi không chỉ thực hiện như vậy mà bắt đầu quan sát bầu trời để cố tìm hiểu về nó. Có lần tôi hỏi mẹ tôi về các ngôi sao. Mẹ tôi không hiểu nổi tình cảnh của tôi khi ấy và không trả lời chúng từ đâu mà ra mà chỉ lên trời và bảo ở trên ấy có sao Thần Nông là người dạy cho tổ tiên cách trồng lúa. Tôi đã buộc phải tự nghĩ "*các ông sao kia từ đâu mà ra?*" Tôi nghĩ có một cái vòm rất cứng và các ông sao gắn ở trên đấy. Thế rồi tôi tự hỏi "*liệu khi tôi đến được cái vòm ấy và đập ra một lỗ thủng thì tôi sẽ nhìn thấy gì?*" Và tôi đã cho rằng tôi sẽ lại "*nhìn thấy một cái vòm nữa*" và cứ như thế. Đến khi lớn tuổi tôi vẫn giữ những kỷ niệm còn thơ ấy nhưng tôi đã hiểu ra rằng cái nguyên lý "*nhìn thấy một cái vòm nữa*" chính là một nguyên tắc rất cơ bản để nhận biết. Chúng ta không thể nhận biết ra được cái gì ngoài những cái chúng ta có thể nhận thấy Đó là nguyên lý "*Kết quả quan sát sự vật sẽ phải bất biến nếu chúng ta lặp lại quan sát một lần nữa cứ như thế, như thế ...*" Rốt cuộc sự vật phải bất biến với quan sát và hóa ra các sự vật như vậy không có nhiều. Mọi phát minh về vật lý lý thuyết hóa ra là dựa trên nguyên lý này nguyên lý bất biến.

Chúng ta luôn cho rằng tất cả những gì chúng ta nhận thấy và hiểu biết là đến với chúng ta một cách tự nhiên và hiển nhiên. Sự thật thì không phải như vậy. Tính khách quan của quá trình quan sát cho rằng "*chúng ta chỉ có thể quan sát được một sự kiện khi có một tín hiệu từ vật mà chúng đang muốn quan sát đi tới*". Vậy có thể có hai khả năng. Thứ nhất là khi các tín hiệu ấy truyền tới tức thời và khả năng thứ hai là các tính hiệu truyền tới với một độ trễ thời gian nhất định.

Đối với khả năng thứ nhất "*sự lan truyền tức thời*". Nếu các thay đổi ở điểm này được lan truyền một cách tức thời tới tất cả các điểm khác nhau trong vũ trụ thì hành vi của một vật sẽ là kết quả của sự tác động tức thời toàn vũ trụ lên nó. Như vậy khái niệm về ý muốn chủ quan của chúng ta sẽ không còn bởi mỗi cử chỉ của chúng ta không còn phụ thuộc vào ý muốn của não bộ mình và như vậy khái niệm chết não cũng không còn bởi người chết nhưng vẫn đi lại bình thường. Chúng ta không chấp nhận một thực tế như vậy.

Đối với khả năng thứ hai "*sự lan truyền không tức thời*". Như vậy sự lan truyền sẽ có một vận tốc nhất định nào đó. Nếu vận tốc này mà có thể tăng lên mãi thì chúng ta sẽ tiệm cận đến mô hình "*sự lan truyền tức thời*" như thế chúng ta cần phải chấp nhận có một giới hạn cực đại nào đó cho vận tốc lan truyền tác động. Khi một người ở vị trí này nhận được tín hiệu từ một người ở vị trí kia thì cả hai người đều đã biến đổi. Những thông tin đã được truyền đi ấy là thuộc về quá khứ nó không phản ánh hiện tại khách quan của cả hai người. Như vậy chúng ta không có cách nào nhận biết thấy được sự vật cho dù là chúng ở gần chúng ta đến mấy. Sở dĩ chúng ta có thể "*nhận thấy*" sự vật ở điểm khác là do chúng ta có khả năng tái tạo lại sự việc "*lùi vào quá khứ*". Chúng ta làm được điều ấy là nhờ vào một hệ thống niềm tin.

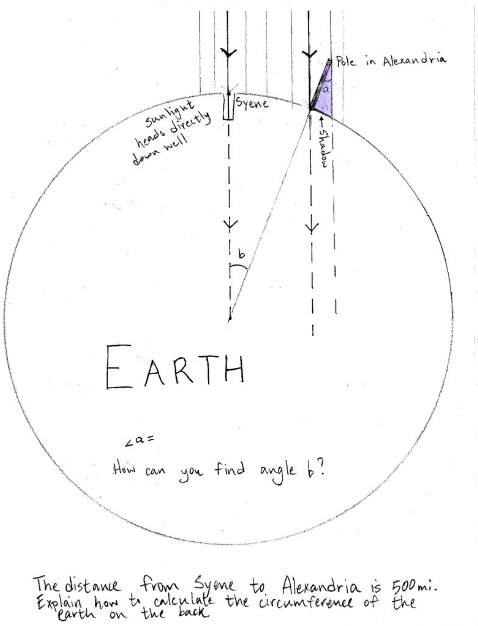
Vũ trụ được quan niệm là hiện hữu khách quan nơi các vật chất vận động trong không gian và thời gian không phụ thuộc vào bất kể một ai. Tính khách quan được hiểu là chúng vận động theo các quy luật nội tại và nó cũng hàm ý là các quan sát của mọi người có thể không giống nhau nhưng chúng có thể chuyển đổi theo những nguyên tắc nhất định. Niềm tin còn mách bảo cho chúng ta là chúng ta có thể nhận thức để hiểu vũ trụ thông qua các quan sát. Như thế niềm tin nói rằng những gì xảy ra ngay cạnh chúng thì cũng sẽ như vậy ở vào bất kỳ một nơi nào khác trong vũ trụ. Đó là niềm tin về tính đồng nhất và đẳng hướng của vũ trụ. Chúng ta sẽ nói rõ hơn về hệ thống các niền tin này.

2. Khoảng cách

Chúng ta luôn muốn được biết chúng ta đang sống trong một không gian thế nào? Một câu hỏi rất khó trả lời. Trước hết chúng ta đề cập tới khoảng cách. Nói tới khoảng cách là chúng ta thường nghĩ tới phép đo dùng một cái thước. Khoảng cách giữa hai điểm là số lần đo được. Nhờ vào phép đo mà chúng ta có thể xác định được độ dài tương đối của khoảng cách này so với khoảng cách khác. Đây được gọi là phép đo cổ điển.

Đối với những vật ở xa và không thể tới được như tâm của Trái Đất chúng ta không thể tiến hành đo theo phương pháp cổ điển. Đường kính trái đất được Eratosthenes xác định từ 276 năm trước Công Nguyên nhờ vào sự đồng dạng. Eratosthenes ở Egypt cho làm một cái hố hình cầu và cắm một cái que thẳng đứng tới tâm của nó.

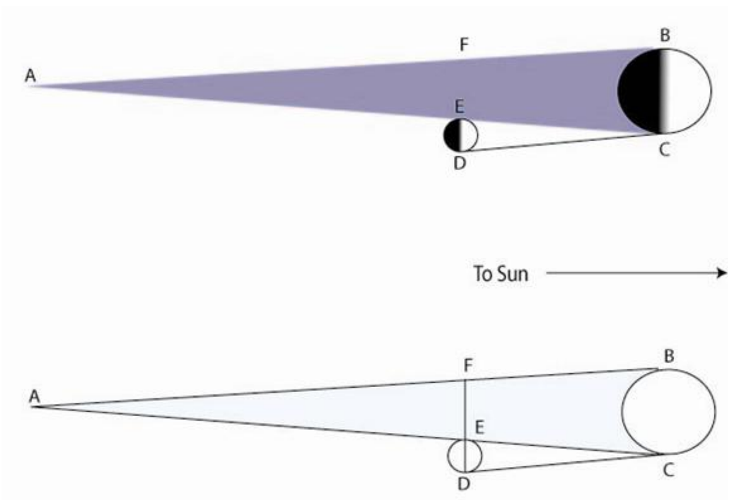
Vào đúng thời điểm khi mà mặt trời chiếu thẳng góc ở Syene[1] ông đo độ dài bóng của cái que lên mặt hố. Độ dài này chia cho khoảng cách từ Syene tới Egypt[2] chính bằng với tỷ lệ chiều dài của que so với với bán kính trái đất.



Hình 1: Thí nghiệm của Eratosthenes. Bóng nắng vào ngày hạ chí ở Syene là thẳng đứng, nhưng đo được ở Alexandria là 7.2 độ. Căn cứ vào khoảng cách giữa 2 thành phố này và góc đo được, Eratosthenes đã suy ra được bán kính của trái đất.

[1] Ngày hạ chí, 21/6. Tất cả chú thích trong bài là của Ban biên tập Epsilon.
[2] Ý tác giả nói thành phố Alexandria ở Ai Cập.

Cùng thời gian này, khoảng cách từ Trái Đất tới mặt trăng được những người Greeks đã xác định. Khoảng tối xuất hiện trên mặt trăng có thể do đó là vùng mà sáng mặt trời không chiếu vào. Hiện tượng như thế này được gọi là trăng tròn trăng khuyết. Bóng đen trên mặt trăng cũng có thể sinh ra khi nó đi vào vùng bị trái đất che khuất. Hiện tượng như thế này được gọi là nguyệt thực. Như vậy khi xảy ra nguyệt thực Trăng bị tối lại do bị mặt đất che khuất ánh mặt trời. Hay nói cách khác là nó đi vào khoảng tối phía sau do trái đất tạo ra đó là một hình chóp. Có thể làm thí nghiệm và nhận thấy tỷ lệ khoảng cách tới cái bóng giữa trưa của một hình cầu so với đường kính của nó bằng 108 lần. Như vậy cái bóng mà Trái Đất tạo ra khi che Mặt Trời là một hình chóp với chiều dài gấp 108 lần đường kính Trái Đất. Khi mặt Trăng đi vào cái chóp ấy sẽ bị tối do ánh sáng từ mặt trời không còn chiếu được tới nó bị Trái Đất che mất. Hiện tượng này được gọi là Nguyệt Thực. Người ta đo được khoảng thời gian mà mặt Trăng bị Nguyệt Thực từ đây tính ra được quãng đường mà mặt Trăng di chuyển trong khoảng chóp tối của Trái Đất là 2.5 lần đường kính mặt Trăng. Như vậy Khoảng cách từ trái Đất tới mặt Trăng bằng $\frac{108}{1+2.5} \approx 31$ lần đường kính trái Đất.



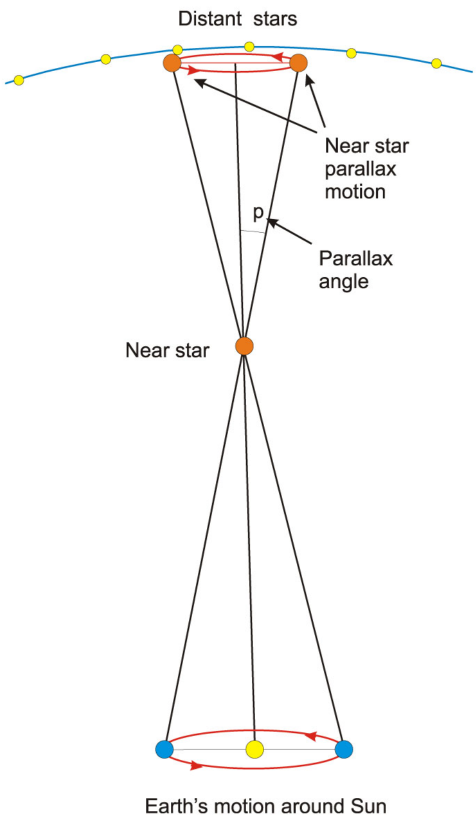
Hình 2: Tam giác ABC (chóp bóng của trái Đất) có đáy bằng đường kính của trái Đất và đường cao bằng 108 lần đường kính trái Đất. Tam giác AEF (tam giác này được tạo nên khi nguyệt thực toàn phần xảy ra) có đáy bằng 2,5 lần đường kính Mặt Trăng và chiều cao bằng 2,5 lần khoảng cách từ Mặt Trăng đến trái Đất. Tam giác CED (chóp bóng của Mặt Trăng) có đáy bằng đường kính Mặt Trăng và đường cao bằng khoảng cách của Mặt Trăng đến Trái Đất. Các tham số chúng ta đều đã có vậy có thể dễ dàng tìm ra đáp số của bài toán: Chiều cao của tam giác ABC bằng 2,5 + 1 = 3,5 lần khoảng cách giữa Mặt Trăng và Trái Đất, suy ra khoảng cách từ Mặt Trăng đến Trái Đất $\frac{108}{1+2.5} \approx 31$ lần đường kính trái đất.

Khoảng năm 250 trước Công nguyên Aristarchus là người đầu tiên đã sử dụng hiện tượng trăng tròn trăng khuyết để đo được khoảng cách từ Trái đất tới Mặt trời. Ông cho rằng khi mặt Trăng sáng một nửa tức là lúc Mặt Trời chiếu thẳng góc với nó. Vào đúng lúc ấy ông đo được tia sáng từ Mặt Trời tới Trái Đất làm thành một góc $87°$. Từ tam giác vuông, góc vuông tại mặt trăng, đường huyền là mặt trời và trái đất góc nhọn từ mặt trời tới trái đất và mặt trăng là $87°$ Aristarchus đã tính được khoảng cách từ trái đất tới mặt trời dài gấp 20 lần khoảng cách từ trái đất tới mặt trăng. Kết quả tính của Aristarchus không được chính xác là do ông xác định sai góc và góc lệch thực tế là $89°50'$. Trên thực tế khoảng cách từ mặt trời tới trái đất dài gấp khoảng 400 lần khoảng cách từ trái đất tới mặt trăng.

Lịch sử văn minh nhân loại chìm đi gần 2000 năm và chỉ được viết tiếp vào thế kỷ 16.

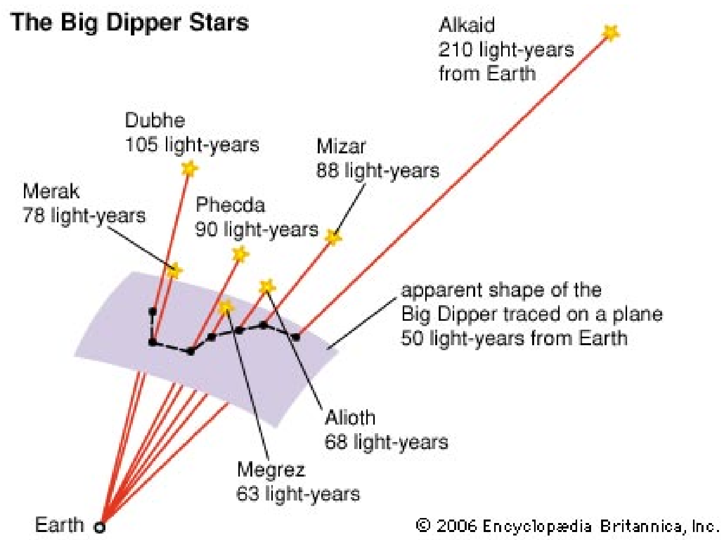
Khoảng năm 1591, khi bố của Galilei mất, ông phải thay cha lo cho các em. Ông vừa phải trả tiền hồi môn cho 2 em gái và phải trợ cấp cho em trai là một nhạc sĩ nghèo. Mùa hè năm đấy ở Venice xuất hiện một thứ đồ chơi cho phép "*kéo các vật ở xa về gần như ở ngay trước mặt*" để nhìn. Ông đã tới đảo Monado mua một chiếc và bắt đầu bắt chước để chế tạo. Kính của ông có thể kéo vật ở xa hơn 8 lần so với kính của thị trường và vì thế ông bán được khá tiền. Có tiền ông bắt tay vào chế tạo kính tốt hơn và bắt đầu quan sát bầu trời. Vào năm 1610, Galilei xuất bản cuốn sách mô tả về bề mặt mặt trăng. Do sử dụng kính viễn vọng của mình Galile có thể quan sát trực tiếp bằng mắt hiện tượng "*trăng tròn khuyết*" của các mặt trăng quay quanh sao Mộc phần cuối quyển sách của ông mô tả việc nhìn thấy và nghiên cứu hiện tượng 4 mặt trăng của và quay quanh sao Mộc (Jupiter). Như vậy bằng thực nghiệm quan sát Galilei chỉ ra sao Mộc cũng như Trái Đất đều quay quanh mặt trời.

Vào năm 1653, Christiaan Huygens đã sử dụng kính viễn vọng Galilei để quan sát sao kim và sử dụng sao Kim thay cho Mặt Trăng trong kết quả đo khoảng cách từ trái Đất tới mặt Trời theo phương pháp của Aristarchus. Ông thu được kết quả hoàn toàn chính xác, nhưng Christiaan Huygens không đưa ra giải thích cách mà ông tính được khoảng cách từ trái đất tới sao Kim.



Hình 3: Đo khoảng cách bằng phương pháp quang sai.

Vào năm 1672, Giovanni Cassini đo được khoảng cách từ Trái Đất tới sao Hỏa bằng phương pháp quang sai. Bản chất của phương pháp quang sai là xác định chiều cao của tam giác cân khi biết độ dài cạnh đáy và góc ở đỉnh. Khoảng cách từ Paris tới Guiana đã biết, Cassini ở Paris và cử Jean Richer tới vùng Guiana. Cả hai cùng lúc đo góc tia sáng đến từ sao Hỏa. Họ xác



Hình 4: Khoảng cách từ trái đất đến chòm sao Bắc Đẩu.

định được tam giác cân có góc đỉnh là sao Hỏa và cạnh đáy là Paris và Guiana. Từ đấy Giovanni Cassini xác định được khoảng cách từ Trái Đất tới sao Hỏa. Từ đây Cassini, bằng phương pháp tương tự như của Aristarchus, đã tính được tỷ số khoảng cách từ Trái Đất tới Mặt trời và từ Trái Đất tới sao Hỏa và như vậy "*đo*" được khoảng cách từ trái đất tới mặt trời.

Việc biết được độ dài đường kính trái đất khi quay quanh mặt trời bằng phương pháp quang sai người ta xác định được khoảng cách từ mặt trời tới các vì sao khác trong vũ trụ. Khoảng cách tương ứng với quang sai $1''$ được gọi là $1\,pc$ (đọc là parsec). Nó tương đương với $\frac{3600\times180}{\pi}$ lần khoảng cách từ trái đất tới mặt trời.

Các phép đo quáng sai cho phép chúng ta xác định được khoảng cách từ trái đất tới các sao ở tương đối gần ví dụ như đối với các sao trong chòm Đại Hùm Tinh ở vào khoảng cách khoảng 80 năm ánh sáng

Do góc quang sai của các vật ở càng xa càng ngày bé, nên phương pháp quang sai chỉ cho phép xác định khoảng cách tới các vật thể trong phạm vi $500\,pc$ – tức khoảng 1630 năm ánh sáng.

Vào năm 1786, Goodricke phát hiện ra sao Delta Cephei ở cách mặt trời $244\,pc$, nhấp nháy với chu kỳ 5.26 ngày. Vào năm 1912, Henrietta Swan Leavitt sau khi nghiên cứu các sao nhấp nháy giống như Delta Cepheid Henrietta phát hiện ra quy luật chu kỳ nhấp nháy của sao tỷ lệ thuận với độ sáng tuyệt đối của nó. Độ sáng của sao mà ở dưới trái Đất đo được tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách từ sao tới trái đất. Như vậy bằng việc đo chu lỳ nhấp nháy và độ sáng quan sát được từ trái đất chúng ta có thể tính được khoảng cách từ trái đất tới sao. Hiện nay có khoảng hơn 1000 sao thuộc định dạng Cepheid được xác định.

Vào năm 1923, Edwin Hubble đã sử phương pháp tính khoảng cách mới và phát hiện ra tinh vân Andromeda ở xa $780000\,pc$ xa đến nỗi nó không thể được chứa trong Thiên hà Ngân hà của chúng ta. Và như vậy đó là một thiên hà mới.

Vào năm 1929, cũng bằng phương pháp tính khoảng cách mới này, Edwin Hubble đưa ra nhận xét phổ tất cả các thiên hà ở xa đều có xu hướng dịch đỏ. Theo nguyên lý Doppler, phổ ánh sáng dịch đỏ tức bước sóng lớn lên và điều này chứng tỏ vật phát sáng đang chạy ra xa khỏi nhau với vận tốc $v = H_0 \times d$. Hệ số H_0 khoảng bằng 70 km/s. Như vậy thông qua việc đo độ dịch đỏ của phổ ánh sáng phát ra từ sao chúng ta có thể xác định được khoảng cách tới nó.

Chúng ta đối diện với hai phương pháp đo khoảng cách. Phương pháp đo quang sai thực chất là đưa ra một con số dựa trên các quan sát về góc quang sai và mô hình tam giác lượng trong hình học Euclid. Nếu quả thật các tia sáng đi theo đường thẳng từ vị trí mà nó phát sáng tới chúng ta thì phương pháp quang sai cho kết quả đúng. Phương pháp Cepheid dựa trên cường độ ánh sáng phương pháp Hubble dựa trên do độ dịch đỏ của phổ ánh sáng.

Một câu hỏi đặt ra là "*Nếu có thể tiến hành việc đo đạc đồng thời được thì liệu các phương pháp đó có đưa ra cùng một kết quả?*"

Phương pháp xác định khoảng cách của Hubble là dựa trên sự dịch về phía đỏ của phổ ánh sáng do không gian dãn nở mà các vật chạy ra xa khỏi nhau. Ánh sáng chuyển động vượt qua một khoảng cách càng lớn thì chu kỳ ánh sáng càng dãn ra. Phương pháp xác định khoảng cách dựa trên dịch chuyển đỏ có lẽ sẽ cho chúng ta giá trị thực khoảng cách giữa các vật thể trong vũ trụ.

– Hết phần 1 –

CÂU CHUYỆN VỀ ĐỊNH LÝ HÀM SỐ COS

Trần Nam Dũng
(Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG TP. HCM)

1. Mở đầu

Khi học lớp 7, chúng ta được học về tiêu chuẩn bằng nhau của hai tam giác. Đó là tiêu chuẩn c-c-c, c-g-c và g-c-g. Thêm một chút nữa, khi học đến dựng hình, chúng ta cũng biết rằng một tam giác sẽ dựng được khi biết 3 cạnh, 2 cạnh và góc xen giữa hay 2 góc và cạnh xen giữa. Bản thân tôi rất thích thú với ý phát triển tiếp theo: Cái gì dựng được thì xác định được và mọi yếu tố đi kèm theo sẽ phải xác định được hay tính được theo các yếu tố ban đầu.

Như thế, do tam giác là dựng được khi biết 3 cạnh, nên các yếu tố liên quan như chu vi (hiển nhiên), diện tích, độ dài các đường đặc biệt, bán kính các đường tròn đặc biệt,... đều sẽ phải tính được theo 3 cạnh.

Từ đó mà ta có công thức Heron, các công thức tính độ dài trung tuyến

$$r = \frac{S}{p},\ R = \frac{abc}{4S}, \ldots$$

Những công thức này ta đã được biết từ cấp 2. Nhưng tam giác lại còn có thể dựng được khi biết hai cạnh và góc xen giữa, cũng như biết hai góc và cạnh xen giữa (do tổng ba góc bằng 180° nên điều này cũng có nghĩa là ta biết cả 3 góc). Như vậy các yếu tố trong tam giác sẽ tính được theo hai cạnh và góc xen giữa. Điều này khá hiển nhiên với diện tích vì ta có công thức $S = \frac{1}{2}bc \sin A$. Nhưng chu vi thì sao? Để tìm chu vi, ta sẽ phải tìm cạnh thứ ba, và công thức để tìm độ dài cạnh thứ ba theo độ dài hai cạnh và góc xen giữa chính là định lý hàm số cos.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Định lý này, một mặt khác cũng giúp chúng ta tìm được độ lớn các góc khi biết độ dài 3 cạnh của tam giác, một vấn đề mà ở trên ta chưa nhắc đến. Cụ thể

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Cuối cùng để hoàn chỉnh bức tranh về 3 điều kiện bằng nhau của các tam giác, ta chú ý rằng trường hợp bằng nhau g-c-g hay cách xác định tam giác khi biết 2 góc và 1 cạnh dẫn chúng ta đến định lý hàm số sin

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{2R}.$$

2. Định lý hàm số cos, phép chứng minh và vài hệ quả

Có nhiều cách chứng minh định lý hàm số cos, trong đó cách ngắn gọn và hiện đại nhất là dùng véc-tơ và tích vô hướng. Tuy nhiên bản thân tôi thích chứng minh định là hàm số cos bằng cách sử dụng định lý Pythagore. Tôi rất thích cái quan hệ biện chứng: *Định lý hàm số cos là mở rộng của định lý Pythagore, được chứng minh bằng cách sử dụng định lý Pythagore.*

Xét tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Xét trường hợp A nhọn. Trong hai góc B và C có ít nhất một góc nhọn. Giả sử đó là C. Hạ đường cao BK xuống AC. Khi đó $AH = c\cos A$, $CH = b - \cos A$, $BH = c\sin A$.

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác BCH

$$a^2 = BC^2 = BH^2 + CH^2 = (c\sin A)^2 + (b - c\cos A)^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos A.$$

Định lý được chứng minh.

Từ định lý hàm số cos và công thức $\sin A = \frac{2S}{bc}$, ta suy ra

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{2S}{bc}} = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}.$$

Đó chính là định lý hàm số cot .

Cũng từ $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, ta suy ra

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}{2bc}.$$

Từ đó suy ra công thức tính diện tích tam giác theo độ dài các cạnh

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Đó chính là *công thức Heron*, và tất nhiên cũng từ đây thì ta suy ra

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{2S}{abc},$$

chính là *định lý hàm số* sin .

3. Định lý Ptolemy

> Định lý Ptolemy. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn, khi đó ta có đẳng thức*
>
> $$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

Định lý Ptolemy có nhiều cách chứng minh khác nhau như cách chứng minh sử dụng tam giác đồng dạng, sử dụng phép nghịch đảo, sử dụng số phức, sử dụng lượng giác (thông qua định lý hàm số sin). Ở đây ta sẽ trình bày cách chứng minh sử dụng định lý hàm số cos .

Để tiện trình bày, ta đặt $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = x$ và $BD = y$. Áp dụng định lý hàm số cos cho các tam giác ABC, ADC ta có

$$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab}, \quad \cos D = \frac{c^2 + d^2 - x^2}{2cd}.$$

Vì $B + D = 180°$ nên $\cos B + \cos D = 0$. Từ đây ta tính được

$$x^2 = \frac{cd(a^2 + d^2) + ab(c^2 + d^2)}{ab + cd} = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}.$$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$y^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}.$$

Từ đây suy ra $x^2y^2 = (ac + bd)^2$ tức là $xy = ac + bd$, và ta có điều phải chứng minh.

Chú ý là từ lời giải trên ta tính được

$$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)},$$

và

$$\sin B = \frac{\sqrt{(a + b + c - d)(b + c + d - a)(c + d + a - b)(d + a + b - c)}}{2(ab + cd)}.$$

Từ đây, do

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2}ab \sin B + \frac{1}{2}cd \sin D,$$

ta tìm được *công thức Heron cho tứ giác nội tiếp*

$$S = S_{ABCD} = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)},$$

với $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ là nửa chu vi của tứ giác.

Sử dụng thêm định lý hàm số sin, ta sẽ tính được bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác

$$R = \frac{\sqrt{(ab + cd)(ad + bc)(ac + bd)}}{4S}.$$

Phép chứng minh định lý Ptolemy và việc tính các đại lượng liên quan cho chúng ta một kết luận thú vị. Mặc dù không thể xác định một tứ giác khi biết độ dài 4 cạnh (theo thứ tự) của nó, nhưng tứ giác này sẽ xác định nếu ta biết thêm rằng nó là tứ giác nội tiếp. Có một điều thú vị là, trong tất cả các tứ giác có 4 cạnh a, b, c, d (theo thứ tự) cho trước thì *tứ giác nội tiếp có diện tích lớn nhất*.

Ta chứng minh sự kiện này bằng cách sử dụng công thức Heron cho tam giác. Thật vậy, giả sử x là độ dài đường chéo AC. Khi đó diện tích tứ giác $ABCD$ bằng tổng diện tích hai tam giác ABC và ACD.

Áp dụng công thức Heron tính diện tích tam giác, ta có

$$4S_{ABCD} = \sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - x^2)} + \sqrt{4c^2d^2 - (c^2 + d^2 - x^2)^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức

$$\sqrt{A^2 - B^2} + \sqrt{C^2 - D^2} \leqslant \sqrt{(A + C)^2 - (B + D)^2},$$

đúng với $|B| \leqslant A,\ |D| \leqslant C$. Ta có

$$\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - x^2)^2} + \sqrt{4c^2d^2 - (x^2 - c^2 - d^2)^2} \leqslant \sqrt{(2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$\frac{2ab}{a^2 + b^2 - x^2} = \frac{2cd}{x^2 - c^2 - d^2},$$

tức là khi

$$x^2 = \frac{ab(c^2 + d^2) + cd(a^2 + b^2)}{ab + cd},$$

chính là độ dài đường chéo của tứ giác nội tiếp mà ta đã tính ở trên.

4. Định lý Napoleon

Định lý Napoleon. *Cho tam giác ABC. Dựng ra phía ngoài tam giác các tam giác đều BCA_1, CAB_1, ABC_1. Gọi A_2, B_2, C_2 là tâm giác giác đều này. Tương tự, dựng các tam giác đều BCA_3, CAB_3, ABC_3 vào phía trong tam giác và gọi A_4, B_4, C_4 là tâm các tam giác này. Chứng minh rằng $A_2B_2C_2$ và $A_4B_4C_4$ là các tam giác đều và hiệu diện tích hai tam giác đều này bằng diện tích tam giác ABC.*

Áp dụng định lý hàm số cos, ta có

$$\begin{aligned} B_2C_2^2 &= AB_2^2 + AC_2^2 - 2AB_2AC_2\cos(B_2AC_2) \\ &= \frac{c^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{2}{3}bc\cos(A + 60^0) \\ &= \frac{c^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{2}{3}bc\left(\frac{1}{2}\cos A - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right) \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} + \frac{2S}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng tính được $C_2A_2^2$, $A_2B_2^2$ bằng với $\frac{a^2+b^2+c^2}{6} + \frac{2S}{\sqrt{3}}$. Suy ra tam giác $A_2B_2C_2$ đều và có diện tích bằng

$$\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} + \frac{2S}{\sqrt{3}}\right)\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{3}}{24} + \frac{S}{2}.$$

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được tam giác $A_4B_4C_4$ đều và có diện tích bằng

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{6}-\frac{2S}{\sqrt{3}}\right)\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{(a^2+b^2+c^2)\sqrt{3}}{24}-\frac{S}{2}.$$

Từ đó suy ra kết luận thứ hai của bài toán.

5. Bài toán 5 đường tròn

Bài toán. *Cho ba đường tròn bán kính R_1, R_2, R_3 đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Khi đó sẽ tồn tại hai đường tròn cùng tiếp xúc với cả 3 đường tròn này, gồm một đường tròn nhỏ có bán kính r và một đường tròn lớn bán kính R (đường tròn lớn có thể suy biến thành đường thẳng, khi đó ta coi $R=\infty$). Chứng minh rằng ta có hệ thức*

$$\frac{1}{r}\pm\frac{1}{R}=2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right).$$

Ở đây dấu $+$ hay dấu $-$ phụ thuộc đường tròn lớn tiếp xúc ngoài hay tiếp xúc trong với 3 đường tròn đã cho.

Có nhiều cách tiếp cận để chứng minh định lý này. Ở đây ta đưa ra cách giải sử dụng định lý hàm số cos . Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm các đường tròn bán kính R_1, R_2, R_3 tương ứng, O là tâm đường tròn nhỏ tiếp xúc 3 đường tròn nói trên. Gọi α, β, γ là số đo các góc O_2OO_3, O_3OO_1, O_1OO_2. Vì $\alpha+\beta+\gamma=360^\circ$ nên ta dễ dàng chứng minh được

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1. \tag{1}$$

Áp dụng định lý hàm số cos cho tam giác O_2OO_3 với chú ý $O_2O_3=R_2+R_3$, $OO_2=r+R_2$, $OO3=r+R_3$, ta được.

$$\cos\alpha=\frac{(r+R_2)^2+(r+R_3)^2-(R_2+R_3)^2}{2(r+R_2)(r+R_3)}=\frac{r^2+rR_2+rR_3-R_2R_3}{(r+R_2)(r+R_3)}.$$

Tương tự

$$\cos\beta=\frac{r^2+rR_3+rR_1-R_3R_1}{(r+R_3)(r+R_1)}, \cos\gamma=\frac{r^2+rR_1+rR_2-R_1R_2}{(r+R_1)(r+R_2)}.$$

Thay vào (1) rồi rút gọn, ta được

$$\begin{aligned}(R_1^2R_2^2+R_2^2R_3^2+R_3^2R_1^2-2R_1R_2R_3(R_1+R_2+R_3))r^2&\\ -2R_1R_2R_3(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1)r+R_1^2R_2^2R_3^2=0.&\end{aligned}\tag{2}$$

Đây chính là phương trình bậc 2 để tính r. Hoàn toàn tương tự, ta tìm được phương trình bậc 2 để tính R.

Nếu $R_1^2R_2^2 + R_2^2R_3^2 + R_3^2R_1^2 - 2R_1R_2R_3(R_1 + R_2 + R_3) > 0$ thì R là nghiệm của (2), khi đó

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{R} = \frac{r+R}{rR} = \frac{2R_1R_2R_3(R_1 + R_2 + R_3)}{R_1^2R_2^2R_3^2} = \frac{2}{R_1} + \frac{2}{R_2} + \frac{2}{R_3}.$$

Nếu $R_1^2R_2^2 + R_2^2R_3^2 + R_3^2R_1^2 - 2R_1R_2R_3(R_1 + R_2 + R_3) < 0$ thì $-R$ là nghiệm của (2), khi đó

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{R} = \frac{r-R}{r(-R)} = \frac{2R_1R_2R_3(R_1 + R_2 + R_3)}{R_1^2R_2^2R_3^2} = \frac{2}{R_1} + \frac{2}{R_2} + \frac{2}{R_3}.$$

Chú ý điều kiện

$$R_1^2R_2^2 + R_2^2R_3^2 + R_3^2R_1^2 - 2R_1R_2R_3(R_1 + R_2 + R_3) = 0,$$

có thể biến đổi thành

$$(\sqrt{R_1R_2} + \sqrt{R_2R_3} - \sqrt{R_1R_3})(\sqrt{R_2R_3} + \sqrt{R_1R_3} - \sqrt{R_1R_2})(\sqrt{R_1R_2} - \sqrt{R_2R_3} + \sqrt{R_1R_3})(\sqrt{R_1R_2} + \sqrt{R_2R_3} + \sqrt{R_1R_3}) = 0$$

Như vậy sẽ tương đương với

$$\sqrt{R_1R_2} + \sqrt{R_2R_3} - \sqrt{R_1R_3} = 0,$$

hoặc

$$-\sqrt{R_1R_2} + \sqrt{R_2R_3} + \sqrt{R_1R_3} = 0, \sqrt{R_1R_2} - \sqrt{R_2R_3} + \sqrt{R_1R_3} = 0.$$

Về mặt hình học, các điều kiện này tương đương với tròn bán kính R_2 tiếp xúc với các đường tròn bán kính $R_1,\ R_3$ và tiếp xúc với tiếp tuyến chung của hai đường tròn này (các trường hợp còn lại cũng tương tự). Lúc này thì đường tiếp tuyến chung của ba đường tròn chính là "*đường tròn*" với bán kính $R = \infty$ tiếp xúc với cả ba đường tròn.

Trường hợp $R_1^2R_2^2 + R_2^2R_3^2 + R_3^2R_1^2 - 2R_1R_2R_3(R_1 + R_2 + R_3) > 0$, tương ứng với trường hợp tồn tại đường tròn bán kính R tiếp xúc trong với ba đường tròn bán kính $R_1,\ R_2,\ R_3$ (và chứa cả 3 đường tròn).

Trường hợp $R_1^2R_2^2 + R_2^2R_3^2 + R_3^2R_1^2 - 2R_1R_2R_3(R_1 + R_2 + R_3) > 0$, tương ứng với trường hợp tồn tại đường tròn bán kính R tiếp xúc ngoài với cả 3 đường tròn bán kính $R_1,\ R_2,\ R_3$ (nhưng không phải là đường tròn nhỏ bị kẹp giữa 3 đường tròn - đường tròn nhỏ này là đường tròn bán kính r).

6. Bài toán Việt Nam TST 1983

Trong kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam dự IMO 1983 có bài toán hình học sau. Không có nhiều thí sinh giải được bài này, vì lời giải bằng hình học thuần túy dường như khó tìm được. Người viết bài này đã giải được nó nhờ áp dụng định lý hàm số cos và các lý luận giải tích.

(Việt Nam TST 1983). *Cho 3 tia Ox, Oy, Oz (không có hai tia nào trùng nhau hoặc đối nhau) và một đoạn thẳng có độ dài p. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất bộ 3 điểm A, B, C thuộc Ox, Oy, Oz tương ứng sao cho chu vi của các tam giác OAB, OBC, OCA đều bằng nhau và bằng $2p$.*

Gọi góc giữa các tia (Oy, Oz), (Oz, Ox), (Ox, Oy) lần lượt là α, β, γ. Giả sử đã dựng được các điểm A, B, C thỏa mãn điều kiện đề bài. Đặt $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$. Điều kiện chu vi tam giác OAB bằng $2p$ có thể viết lại thành

$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\lambda} = 2p.$$

Biến đổi tương đương đẳng thức này, ta được

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos\lambda = 4p^2 - 4p(x+y) + x^2 + y^2 + 2xy,$$

tương đương với

$$p(x + y - p) = xy\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

Tương tự, ta có

$$p(y + z - p) = yz\cos^2\frac{\alpha}{2},\ p(z + x - p) = zx\cos^2\frac{\beta}{2}.$$

Từ phương trình thứ nhất và phương trình thứ ba ta rút ra được

$$y = \frac{p(p-x)}{p - x\cos^2\frac{\gamma}{2}},\ z = \frac{p(p-x)}{p - x\cos^2\frac{\beta}{2}}.$$

Thay vào phương trình thứ hai, ta được

$$p\left(\frac{p(p-x)}{p - x\cos^2\frac{\gamma}{2}} + \frac{p(p-x)}{p - x\cos^2\frac{\beta}{2}} - p\right) = \frac{p^2(p-x)^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\left(p - x\cos^2\frac{\gamma}{2}\right).\left(p - x\cos^2\frac{\beta}{2}\right)},$$

hay là

$$\frac{p-x}{p - x\cos^2\frac{\gamma}{2}} + \frac{p-x}{p - x\cos^2\frac{\beta}{2}} - 1 - \frac{(p-x)^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\left(p - x\cos^2\frac{\gamma}{2}\right).\left(p - x\cos^2\frac{\beta}{2}\right)} = 0. \quad (3)$$

Bài toán quy về việc chứng minh phương trình (3) có nghiệm duy nhất x với $0 < x < p$.

Lời giải năm 1983. Đặt $f(x)$ là biểu thức ở vế trái (xem x là ẩn số, còn lại là tham số) tham số thì f là hàm liên tục trên $[0, p]$ và đa có $f(p) = -1$ và

$$f(0) = 1 + 1 - 1 - \cos^2\frac{\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2} > 0.$$

Do đó theo tính chất của hàm liên tục, tồn tại $x_0 \in (0, p)$ sao cho $f(x_0) = 0$.

Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ chỉ có một nghiệm duy nhất, ta chứng minh $f(x)$ là hàm giảm trên $(0, p)$. Sử dụng hằng đẳng thức $x + y - 1 - xy = -(1-x)(1-y)$, ta viết $f(x)$ lại dưới dạng

$$f(x) = -\frac{x}{p - x\cos^2\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{x}{p - x\cos^2\frac{\beta}{2}} \cdot \sin^2\frac{\beta}{2} \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2} + \frac{p-x}{p - x\cos^2\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{p-x}{p - x\cos^2\frac{\gamma}{2}}\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Ta có $\frac{x}{p-x\cos^2\frac{\beta}{2}}$, $\frac{x}{p-x\cos^2\frac{\beta}{2}}$ là các hàm số tăng trên $[0, p]$ còn $\frac{p-x}{p-x\cos^2\frac{\beta}{2}}$, $\frac{p-x}{p-x\cos^2\frac{\gamma}{2}}$ là các hàm số giảm trên $[0, p]$ (có thể tính đạo hàm của các hàm số này) và các biểu thức này đều dương nên suy ra $f(x)$ là hàm số giảm.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất x_0 thuộc $(0, p)$. □

Lời giải này khá cồng kềnh và thực sự là rất ... dũng cảm. Cái hàm $f(x)$ khủng khiếp ấy mà dám đi chứng minh là hàm giảm. Thực sự thì nếu tính đạo hàm trực tiếp thì đúng là kinh khủng. Ở đây ta đã biết tách $f(x) = -Ag(x)h(x) + Bs(x)t(x)$ với $A, B > 0$, $g(x), h(x), s(x), t(x) > 0$, $g'(x) > 0$, $h'(x) > 0$, $s'(x) < 0$, $t'(x) < 0$, từ đó suy ra

$$f'(x) = -A\left[g'(x)h(x) + g(x)h'(x)\right] + B\left[s'(x)t(x) + s(x)t'(x)\right] < 0.$$

Trong điều kiện phòng thi, thực sự không có thời gian để trau chuốt tìm lời giải đẹp hơn.

Sau này, khi giải lại bài này cùng cách học sinh, tôi đã tìm ra cách giải gọn hơn, không cần dùng đến giải tích. Thậm chí còn giải ra luôn nghiệm tường minh.

Cách 1. Cụ thể thì phương trình (1) có thể biến đổi thành phương trình bậc hai

$$\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2} - \cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\gamma}{2}\right) x^2 + 2p\sin^2\frac{\alpha}{2}x - p^2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 0.$$

Lại đặt vế trái là $f(x)$ thì

$$f(0) = -p^2\sin^2\frac{\alpha}{2} < 0, \ \ f(p) = p^2\sin^2\frac{\beta}{2} \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2} > 0,$$

nên theo định lý về dấu của tam thức bậc hai, phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(0, p)$. Ta có

$$f'(x) = 2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2} - \cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\gamma}{2}\right) x + 2p\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Vì $f'(x)$ là hàm bậc nhất và

$$f'(0) = 2p\sin^2\frac{\alpha}{2} > 0,$$

$$\begin{aligned} f'(p) &= 2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2} - \cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\gamma}{2}\right) p + 2p\sin^2\frac{\alpha}{2} \\ &= 2p\sin^2\frac{\beta}{2} \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2} > 0. \end{aligned}$$

Nên suy ra $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc $[0, p]$. Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất thuộc $(0, p)$. □

Cách 2. Đặt $X = \frac{x}{p}$, $Y = \frac{y}{p}$, $Z = \frac{z}{p}$. Phương trình

$$p(x + y - p) = xy\cos^2\frac{\gamma}{2},$$

có thể viết lại thành

$$X + Y - 1 = XY\cos^2\frac{\gamma}{2},$$

hay là

$$(1 - X)(1 - Y) = XY\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

Tương tự ta có các đẳng thức

$$(1 - Y)(1 - Z) = YZ\sin^2\frac{\alpha}{2}, \quad (1 - Z)(1 - X) = ZX\sin^2\frac{\beta}{2}.$$

Nhân các hệ thức này vế theo vế rồi khai căn, ta được

$$(1 - X)(1 - Y)(1 - Z) = XYZ \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2},$$

từ đây suy ra

$$1 - Z = \frac{Z \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

do đó

$$Z = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Tương tự tìm được X, Y. □

7. Một bài toán đại số giải bằng hình học

Ở trên, ta đã giải một bài toán hình học bằng phương pháp đại số thông qua định lý hàm số cos . Bây giờ, ở chiều ngược lại, ta cùng đến với một bài toán thuần túy đại số nhưng đã được giải khá hiệu quả bằng phương pháp hình học.

> Bài toán. *Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + d^2 - ad = b^2 + c^2 + bc$ và $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Tìm giá trị của*
>
> $$\frac{ab + cd}{ad + bc}.$$

Thoạt nhìn thì đây là bài toán đại số thuần túy, chả có một tí hình học nào. Sau một hồi biến đổi đại số, tình hình có vẻ rối. Về nguyên tắc thì với 4 ẩn số thuần nhất, ta cần 3 phương trình mới giải được. Mà ở đây chỉ có 3.

Các biểu thức $a^2 + d^2 - ad$, $b^2 + c^2 + bc$ gợi đến các ý tưởng hình học. Cụ thể là định lý hàm số cos với các góc 60° và 120°. Theo gợi ý này, lời giải thứ nhất đã được tìm ra

Cách 1. Dựng tam giác ABD có $AB = a$, $AD = d$ và $\angle BAD = 60°$. Theo định lý hàm số cos thì $BD^2 = a^2 + d^2 - ad = b^2 + c^2 + bc$. Vì $(b-c)^2 < b^2 + c^2 + bc < (b+c)^2$ nên ta dựng được tam giác BDC sao cho $BC = c$, $DC = b$ (C và A nằm khác phía đối với đường thẳng BD).

Lại áp dụng định lý hàm số cos ta suy ra $\angle BCD = 120°$. Vì

$$\angle BAD + \angle BCD = 60° + 120° = 180°,$$

nên tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Áp dụng định lý Ptolemy ta suy ra $ab + cd = AC \cdot BD$.

Vì $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ nên tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc, suy ra

$$AC \cdot BD = 2SABCD.$$

Tức là ta có

$$ab + cd = 2SABCD. \tag{4}$$

Cuối cùng, áp dụng công thức tính diện tích tam giác theo hai cạnh và góc xen giữa ta có

$$2SABCD = 2SABD + 2SBCD = ad\sin 60° + bc\sin 120° = (ad + bc)\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{5}$$

Từ (4) và (5) ta suy ra $\frac{ab+cd}{ad+bc} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. □

Khá hài lòng. Nhưng có vẻ vẫn còn phức tạp quá. Giải gì mà dùng hết tất cả các kiến thức hình học thế này?

Suy nghĩ một chút, ta thấy bước dựng tam giác BDC có thể làm khác đi một chút, để tận dụng điều kiện $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ một cách đơn giản hơn. Cụ thể là ta dựng tam giác BDC sao cho $BC = b$, $DC = c$ (C và A nằm khác phía đối với đường thẳng BD). Cũng tương tự như trên $ABCD$ là tứ giác nội tiếp. Áp dụng định lý hàm số cos vào các tam giác ADC và ABC, ta có

$$AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos D = a^2 + b^2 - 2ab\cos B.$$

Suy ra $cd\cos D = ab\cos B$. Vì B và D bù nhau nên từ đây suy ra $\cos B = \cos D = 0$, tức là $B = D = 90°$. Bây giờ thì chỉ cần tính diện tích tứ giác $ABCD$ bằng hai cách là ra

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = S_{BCD} + S_{BAD}.$$

$$\frac{ab}{2} + \frac{cd}{2} = \frac{ad\sin 60^0}{2} + \frac{bc\sin 120^0}{2}.$$

Suy ra $\frac{ab+cd}{ad+bc} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Đó chính là cách giải thứ hai.

Nhận xét. Thực ra có cách giải thuần túy đại số rất đẹp cho bài toán này, cụ thể như sau. Ta có

$$ad + bc = a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2(a^2 - c^2) = 2(d^2 - b^2).$$

Mặt khác

$$(a^2 - c^2)(d^2 - b^2) = (ad + bc)^2 - (ab + cd)^2.$$

Từ đó
$$\frac{(ad+bc)^2}{4} = (ad+bc)^2 - (ab+cd)^2,$$
cho nên
$$(ab+cd)^2 = \frac{3}{4}(ad+bc)^2.$$
Suy ra
$$P = \frac{ab+cd}{ad+bc} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
Tuy nhiên thì cách giải dùng hình học vẫn rất độc đáo.

MÃ VÀ CÁC KỲ THI OLYMPIC TOÁN PHẦN 1

S.B. Gashkov

1. Mở đầu

Toán ứng dụng - đó là khi bạn đi tìm lời giải cho bài toán, còn toán lý thuyết - đó là khi bạn đi tìm bài toán để giải.

Finn,"Anna và hiệp sĩ áo đen".

Bạn đọc hãy thử sức tự mình giải ít nhất là một vài bài trong các bài toán dẫn ra dưới đây. Những bài toán này ở dạng nào đó đã được đề xuất ở các kỳ thi Olympic toán khác nhau 1) (ở trong ngoặc sẽ ghi rõ xuất xứ các bài toán, và các bài toán này có thể tìm thấy trong [2, 8-11]). Có điều gì chung giữa các bài toán này?

Bài toán 1 (MMO 1954, vòng 2, 10.5). *Xét tất cả các số có 10 chữ số trong hệ thập phân, mà trong cách viết chỉ sử dụng các chữ số 1 và 2. Hãy chia chúng thành 2 nhóm, mà tổng hai số bất kỳ thuộc cùng một nhóm chứa ít nhất hai chữ số 3.*

Bài toán 2 (MMO 1967, vòng 2, 8.3). *Để mã hóa các bức điện tín ta cần chia tất cả các "từ" thập phân - chuỗi gồm 10 dấu chấm và dấu gạch ngang thành hai nhóm, sao cho các từ cùng một nhóm khác nhau ở ít nhất 3 vị trí. Hãy chỉ ra một cách chia như vậy hoặc chứng minh là không tồn tại cách chia như thế.*

Bài toán 3 (Olympic CHLB Đức, năm học 1970/1971, vòng 2). *Ở bộ lạc Mumbo-Umbo tất cả các tên gọi đều khác nhau, tạo thành từ hai chữ cái A và B, có độ dài n và khác nhau ở ít nhất 3 vị trí. Chứng minh rằng bộ tộc này có không quá $\frac{2^n}{n+1}$ người.*

Có thể đạt được giá trị biên này không? Ở bộ tộc $ABBA$ bên cạnh các cái tên khác nhau ở ít nhất 2 vị trí. Chứng minh rằng ở bộ tộc này có không quá $2n - 1$ người. Giá trị biên này có thể đạt được không?

Bài toán 4. *Gọi tập hợp tất các các bộ k-phân độ dài n là $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ trong đó $x_i \in \{0, \ldots, k-1\}$ là bàn cờ k-phân n chiều. Con xe ở ô $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sẽ ăn được các ô*

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_i, \ldots, x_n),\ y = 0, \ldots, k-1, i = 1, \ldots, n.$$

Gọi $m(n,k)$ là số con xe nhỏ nhất có thể ăn được tất cả các ô của bàn cờ. Chứng minh rằng

a) $m(2,k) = k$.

b) (ASO 1971, 9.6, 10.6) $m(3,k) = \left[\frac{k^2}{2}\right]$.

c) $m(n,k) \leqslant \frac{k^n}{(k-1)n+1}$.

d) Nếu k *là lũy thừa của số nguyên tố, thì bất đẳng thức ở c) biến thành đẳng thức với* $n = 1 + k + \cdots + k^i$, $i = 1, 2, \ldots$

Bài toán 5 (Chiếc quạt thần của Edouard Lucas[2]). *Khán giả được yêu cầu nghĩ đến một số nào đó trong các số từ* 1 *đến* 31. *Nhà ảo thuật sẽ yêu cầu khán giả thông báo trong cánh quạt nào có số mà anh ta nghĩ, trong cách quạt nào không có.*

- *Cánh quạt thứ nhất gồm các số lẻ*
- *Cánh quạt thứ hai gồm các số* 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 30, 31.
- *Cánh quạt thứ ba gồm các số* 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 28, 29, 30, 31.
- *Cánh quạt thứ tư bao gồm các số* 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31.
- *Cánh quạt cuối cùng gồm các số từ* 16 *đến* 31.

Nhà ảo thuật sẽ tìm được số mà khán giả nghĩ bằng cách nào?

Bài toán 6 (Định lý Zarankevic[3]). *Giả sử* $k = k_{a,b}(n,m)$ *là số số* 1 *nhiều nhất trong bảng gồm* n *dòng,* m *cột các số* 0, 1 *và không chứa* a *dòng,* b *cột mà giao của chúng chứa toàn số* 1. *Khi đó* k *là số lớn nhất sao cho* 4)

$$n\binom{k/n}{b} \leqslant (a-1)\binom{m}{b}.$$

Tất cả các bài toán này đều liên quan đến một lĩnh vực của toán ứng dụng hiện đại - lý thuyết mã hóa thông tin. Chúng ta sẽ biết các bài toán này được giải như thế nào sau khi đọc các mục tương ứng của bài viết này.

Ghi chú

1) MMO: Moscow Mathematical Olympiad, ASO: All Soviet Union Olympiad, ARO: All Russian Olympiad

2) Bài toán này được lấy từ cuốn sách về Toán học giải trí, xuất bản vào thế kỷ XIX bởi nhà toán học người Pháp Edouard Lucas (1842-1891), tác giả của nhiều bài toán và định lý đẹp.

3) K.Zarankevic (1902-1959) – nhà toán học người Ba Lan, công bố bài toán về chủ đề này vào những năm 50 của thế kỷ XX. Bản thân định lý này xuất hiện lần đầu tiên trong các bài báo của nhà toán học Hungary Paul Erdos (1913-1996). Một số bài toán là trường hợp riêng của định lý này xuất hiện trong [4].

4) Từ giờ về sau, ta ký hiệu $\binom{x}{y}$ là số tổ hợp chập y từ x phần tử.

2. Mã là gì?

Ban đầu thì anh ta tin là trước mắt anh ta là mật mã, bởi vì sự kiện các nhà giả kim và thầy đồng ngày xưa hay dùng cách viết bí mật đã trở thành điều mà mọi người đều biết: rõ ràng, những người tìm kiếm sự thật này hoặc là muốn giấu bí mật khỏi những đối thủ, hoặc che giấu khỏi ánh mắt soi mói của nhà thờ.

John Glasby, "*Chiếc gương đen*".

Mã nhị phân C độ dài n là một tập hợp bất kỳ các bộ nhị phân độ dài n (các bộ này còn được gọi là từ mã)[5]. Khoảng cách giữa hai từ a, b là số các vị trí mà ở đó các từ này khác nhau. Ví dụ $d(a,b) = 3$ trong trường hợp $a = (11001)$, $b = (00011)$. Hiển nhiên là với mọi $a, b, c \in B^n$ ta có bất đẳng thức tam giác $d(a,b) + d(b,c) \geqslant d(a,c)$, ngoài ra còn có hai điều kiện $d(a,b) = d(b,a)$ và $d(a,b) = 0$ khi và chỉ khi $a = b$.

Ta gọi số $d(C) = \min_{a,b \in C} d(a,b)$, khoảng cách nhỏ nhất giữa các phần tử phân biệt của C là khoảng cách nhỏ nhất của mã C. Trong bài toán 3 thực chất ta quan tâm đến mã có khoảng cách nhỏ nhất không nhỏ hơn 3 và mã có khoảng cách nhỏ nhất không nhỏ hơn 2. Ở bài toán 2 cũng có hai mã có khoảng cách không nhỏ hơn 3. Bài toán 1 cũng dễ dàng giải quyết nếu nhìn thấy mối liên hệ của nó với mã có khoảng cách nhỏ nhất bằng 2.

Các mã có khả năng sửa sai phải là các mã có khoảng cách lớn hơn 1. Ví dụ mã C bao gồm tất cả các bộ có trọng lượng chẵn. Trọng lượng của một bộ là số các vị trí khác 0 trong bộ đó. Mã này (nó cho chúng ta lời giải phần 2 của bài toán 3) có thể dùng để tìm ra 1 lỗi. Giả sử rằng ta cần chuyển đi theo một kênh không tin cậy từ nhị phân $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Ta biết rằng ở từ nhận được có thể có một lỗi (0 bị chuyển thành 1 hoặc ngược lại). Nếu như ta chuyển đúng từ x thì không thể phát hiện là có bị lỗi hay không. Nhưng nếu cùng với từ x ta bổ sung thêm bit kiểm tra $c_n = x_1 \oplus \dots \oplus x_{n-1}$ (trong đó $\oplus$ là phép cộng theo mô-đun 2)[6] và chuyển từ đã được mã hóa

$$c = (c_1, \dots, c_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, c_n),$$

thì lỗi sẽ được phát hiện, bởi vì nếu không có lỗi thì $c_1 \oplus \dots \oplus c_n = 0$, còn nếu có lỗi thì tổng này sẽ bằng 1. Mã này gọi là kiểm tra tính chẵn lẻ[7].

Mã nhị phân tuyến tính độ dài n là tập hợp các véc-tơ nhị phân độ dài n sao cho tổng hai véc-tơ bất kỳ của chúng theo mô-đun 2 cũng thuộc mã. Số các số 1 trong tổng của hai véc-tơ theo mô-đun 2 chính là khoảng cách giữa chúng. Mã nhị phân tuyến tính có thể coi là không gian véc-tơ trên trường $\{0, 1\}$ từ hai phần tử. Chiều của không gian này được gọi là chiều của mã. Phần đơn giản nhất về lý thuyết mã nhị phân tuyến tính chẳng qua là phát biểu lại những định lý của đại số tuyến tính. Các bài toán 9, 10 dưới đây chính là về mã tuyến tính (và chiều của chúng).

Ta có thể xét không chỉ mã nhị phân mà là mã q-phân với $q > 2$. Khoảng cách giữa hai véc-tơ q-phân x, y là số $\rho(x,y)$ các tọa độ mà ở đó hai véc-tơ này không trùng nhau. Định nghĩa này trùng với định nghĩa ta đã đưa ra trên đây, và với định nghĩa này ta cũng có bất đẳng thức tam giác $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,x)$. Khoảng cách mã, cũng như trong trường hợp nhị phân, là khoảng cách nhỏ nhất giữa các véc-tơ mã phân biệt.

Nếu như mã có khoảng cách mã $d = 2t + 1$, thì nó có thể sửa đến t lỗi. Thật vậy, nếu như trong quá trình truyền từ mã x xảy ra t lỗi thì ta nhận được từ x' đã bị biến dạng với $\rho(x', x) = t$. Theo từ x' ta có thể phục hồi lại từ x một cách duy nhất, vì nếu như từ hai từ mã khác nhau x, y ta thu được cùng một từ biến dạng với không quá t lỗi $x' = y' = z$ thì theo bất đẳng thức tam giác ta có

$$2t + 1 = d \leqslant d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y) \leqslant t + t = 2t,$$

mâu thuẫn. Phục hồi từ mã theo từ đã bị biến dạng được gọi là giải mã[8].

Nếu như khoảng cách mã bằng d, thì mã có thể phát hiện được $d - 1$ lỗi (nếu như từ nhận được là từ mã thì không có lỗi xảy ra, vì để thu được một từ mã khác phải có ít nhất d lỗi, mà theo giả thiết thì chỉ có tối đa $d - 1$ lỗi, nếu từ nhận được không phải là từ mã thì đã có lỗi xảy ra).

Một vấn đề được quan tâm là với n, d cho trước tìm mã q-phân có lực lượng[9] lớn nhất độ dài n và khoảng cách d. Gọi lực lượng của nó là $m_q(n, d)$. Với d lẻ bất kỳ, $d = 2t + 1$ ta dễ dàng thu được cận trên sau đây (từ đó suy ra lời giải cho phần đầu của bài toán 3 và mục c của bài toán[4].

Định lý 1 (Cận Hemming – Rao[10], cận của sắp xếp cầu). *Với mọi n, q, d*

$$m_q(n, d) \leqslant \frac{q^n}{\sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i} (q-1)^i}$$

Nói riêng trong trường hợp $q = 2$

$$m_2(n, d) \leqslant \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i}}$$

.

Lời giải. Ta chỉ cần xét các quả cầu bán kính t với tâm tại các từ mã và chú ý rằng chúng không giao nhau, và mỗi một quả cầu gồm

$$\sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i} (q-1)^i,$$

bộ (mỗi một bộ trong quả cầu hoàn toàn được xác định bởi không quá t vị trí mà nó khác với tâm, và giá trị ở mỗi vị trí có $q - 1$ cách chọn). Vậy tổng số các từ trong tất cả các quả cầu bằng

$$m_q(n, d) \sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i} (q-1)^i,$$

nhưng số này không thể vượt quá q^n- là số tất cả các từ q-phân, từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. □

Mã mà ở đó cận trên này đạt được được gọi là hoàn hảo (hay là xếp kín, vì nó tạo ra một cách phủ hoàn hảo hình lập phương q-phân nhiều chiều bằng các quả cầu).

Cận dưới của sắp xếp cầu được đưa ra bởi Hilbert[11].

Định lý 2. *Với mọi n, q, d*

$$m_q(n,d) \geqslant \frac{q^n}{\sum_{i=0}^{d-1}\binom{n}{i}(q-1)^i}.$$

Nói riêng trong trường hợp $q = 2$

$$m_2(n,d) \geqslant \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{d-1}\binom{n}{i}}.$$

Lời giải. Xét mã cực đại với khoảng cách d (lực lượng của nó theo định nghĩa bằng $m_q(n,d)$) và xây dựng quả cầu bán kính $d-1$ có tâm tại các từ mã. Theo như lập luận ở trên thì mỗi quả cầu như vậy chứa

$$\sum_{i=0}^{d-1}\binom{n}{i}(q-1)^i,$$

bộ mã. Hợp của tất cả các quả cầu này sẽ phủ toàn bộ hình lập phương q-phân (nếu một đỉnh nào đó không được phủ thì nó sẽ nằm ở khoảng cách không nhỏ hơn d đến tất cả các từ mã, như vậy ta có thể bổ sung nó vào mã mà không làm tăng khoảng cách, mâu thuẫn với tính cực đại của mã). Vì vậy

$$m_q(n,d)\sum_{i=0}^{d-1}\binom{n}{i}(q-1)^i \geqslant q^n,$$

từ đó suy ra đánh giá mà ta cần[12]. □

Ý tưởng chứng minh cận sắp xếp cầu từ lâu đã được biết đến trong hình học[13] và cũng được sử dụng trong lý thuyết xấp xỉ[14]. Những ý tưởng này từ lâu cũng được sử dụng trong các bài toán olympic.

Bài toán 7. *Chứng minh rằng ta có thể đặt ít nhất 74 đồng xu bán kính 1 lên bàn chữ nhật kích thước 12×22.*

Bài toán 8 (Câu hỏi 1, MMO 1958, vòng 2, 8.5, 9.4.). *Gọi a là số lớn nhất các hình tròn đường kính 1 không giao nhau nằm trong đa giác M, b là số nhỏ nhất các đường tròn bán kính 1 phủ kín toàn bộ đa giác M và c là số lớn nhất các đường tròn bán kính 1 không giao nhau, có tâm nằm bên trong đa giác M. Số nào lớn hơn? a hay b? b hay c?*

Bài toán 9 (MMO 1980, 9.2). *Trên bảng điều khiển có một số nút mà nhờ đó ta có thể điều khiển bảng điện. Khi nhất một nút bất kỳ thì một số bóng đèn trên bảng sẽ đảo trạng thái (tắt thành bật, bật thành tắt. Với mỗi nút sẽ có bộ bóng đèn liên quan đến nó, trong đó các bộ bóng đèn có thể giao nhau). Chứng minh rằng số các trạng thái có thể của bảng là một lũy thừa của 2. (Hai trạng thái của bảng được gọi là khác nhau nếu chúng khác nhau ở trạng thái của ít nhất một bóng đèn).*

Bài toán 10. *Tiểu ban thiết lập N danh sách. Người ta thấy rằng nếu lấy hai danh sách bất kỳ trong N danh sách này hợp lại, rồi xóa đi những người có ở trong cả hai danh sách thì ta được một danh sách thứ ba cũng nằm trong N danh sách nói trên. Chứng minh rằng $N = 2k - 1$ với số nguyên dương k nào đó.*

Ghi chú

5) Mã C có thể coi là tập con của tập hợp các đỉnh của hình lập phương nhị phân n chiều $B^n = \{0, 1\}^n$.

6) Theo định nghĩa $x_1 \oplus \cdots \oplus x_n$ bằng số dư khi chia tổng $x_1 + \cdots + x_n$ cho 2. Tổng theo mô-đun 2 chỉ khác với tổng bình thường ở đẳng thức $1 \oplus 1 = 0$.

7) Người ta thường dùng mã này để kiểm tra tính toàn vẹn của thông tin. Nó cho biết là có lỗi xảy ra, nhưng không tìm được lỗi ở đâu và không sửa lỗi.

8) Giải mã là một quá trình không đơn giản và tiếp theo ta sẽ không nói về quá trình này.

9) Lực lượng của mã là số phần tử của mã đó.

10) Richard Hemming $(1915 - 1998)$ - nhà toán học người Mỹ, Calyampudi Radhakrishna Rao (1920) - chuyên gia toán thống kê người Ấn Độ.

11) Edgar Hilbert $(1923 - 2013)$ - chuyên gia nổi tiếng người Mỹ về toán rời rạc. Không nhầm ông với nhà toán học vĩ đại người Đức David Hilbert $(1862 - 1943)$.

12) Nhà toán học Xô viết R.R.Varshamov $(1927 - 1999)$ đã làm mạnh kết quả này một chút cho mọi mã tuyến tính, vì vậy cận này còn được gọi là cận Varshamov-Hilbert.

13) Bất đẳng thức Blichfeldt cho mật độ của sắp xếp khối cầu trong không gian, xem [15].

14) Dùng để thiết lập bất đẳng thức giữa Entropy và dung lượng của không gian metric.

3. Cận cho các mã với khoảng cách lớn

Thế nhưng mọi cố gắng tìm chìa khóa để giải mã đều dẫn đến thất bại, và khi đó Smit hiểu rằng ngay từ đầu anh ta đã đi theo một hướng sai.

John Glasby, "*Chiếc gương đen*".

Với các mã nhị phân trong trường hợp khoảng cách lớn thì đánh giá ở định lý 1 là rất thô và ta có thể làm mạnh một cách đáng kể. Ta có các mệnh đề sau

Bổ đề 1. *Ta có bất đẳng thức $m(n, d) \leqslant 2m(n-1, d)$.*

Thật vậy, ở mã có lực lượng $m(n, d)$ sẽ không ít hơn một nửa từ mã có thành phần thứ n giống nhau (bằng 0 hay bằng 1). Nếu như ta bỏ thành phần này đi thì được mã có lực lượng không nhỏ hơn $\frac{m(n,d)}{2}$ với khoảng cách không nhỏ hơn d.

Bổ đề 2. *Nếu d lẻ thì $m(n,d) = m(n+1, d+1)$.*

Ta bổ sung vào mỗi từ của mã cực đại độ dài n và khoảng cách d thêm một thành phần để trọng lượng của từ thu được là chẵn (ta xét mã mở rộng). Lực lượng của mã không thay đổi,nhưng khoảng cách giữa hai từ bất kỳ sẽ chẵn. Vì khoảng cách này không giảm nên nó sẽ không nhỏ hơn $d+1$ (và sẽ bằng $d+1$ ở chỗ mà trước đó bằng d). Từ đây suy ra $m(n,d) \leqslant m(n+1, d+1)$.

Ngược lại, giả sử ta có mã lực lượng $m(n+1, d+1)$. Ta xét trong mã này hai từ có khoảng cách $d+1$ và xét thành phần mà ở đó hai từ khác nhau. Ta bỏ thành phần này ở tất cả các từ thì được mã có lực lượng $m(n+1, d+1)$ có độ dài n và khoảng cách $d+1-1 = d$. Nghĩa là $m(n,d) \geqslant m(n+1, d+1)$, từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

Định lý 3 (Cận Plotkin[15]). *Với*

1) *Với $2d > n \geqslant d$ thì*
$$m(n,d) \leqslant 2\left[\frac{d}{2d-n}\right].$$

2) *$n = 2d$ ta có bất đẳng thức $m(n,d) \leqslant 2n$.*

3) *d lẻ và $2d+1 > n \geqslant d$ thì*
$$m(n,d) \leqslant 2\left[\frac{d+1}{2d+1-n}\right].$$

4) *$n = 2d+1$ ta có bất đẳng thức $m(n,d) \leqslant 2n+2$.*

Xét mã cực đại lực lượng $m = m(n,d)$ với khoảng cách d. Ta đánh giá tổng R các khoảng cách đôi một giữa các từ của nó. Hiển nhiên $R \geqslant \frac{dm(m-1)}{2}$, và dấu bằng chỉ xảy ra với các mã đẳng cự (mã có khoảng cách đôi một giữa các từ bằng nhau). Gọi h_i là số các từ mã mà thành phần thứ i bằng 1 thì $R = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i(m-h_i)$, (số các cặp từ khác nhau ở thành phần thứ i bằng $h_i(m-h_i)$). Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân $h_i(m-h_i) \leqslant \frac{m^2}{4}$, do đó với hi nguyên, ta có
$$h_i(m-h_i) \leqslant \left[\frac{m^2}{4}\right], \quad R \leqslant n\left[\frac{m^2}{4}\right].$$
Như vậy $\frac{dm(m-1)}{2} \leqslant \frac{nm^2}{4}$. Nghĩa là với $2d > n$, nếu m lẻ thì ta có $m \leqslant \frac{2d}{2d-n} \leqslant 2\left[\frac{d}{2d-n}\right]$, còn nếu m lẻ thì
$$m+1 \leqslant \frac{2d}{2d-n} \leqslant 2\left[\frac{d}{2d-n}\right].$$
Với $2d = n$ ta có thể bổ đề 1 thì
$$m = m(2d,d) \leqslant 2m(2d-1,d) \leqslant 4\left[\frac{d}{2d-(2d-1)}\right] = 4d = 2n.$$
Nếu d lẻ thì với $2d+1 > n$, theo bổ đề 2 ta có
$$m(n,d) = m(n+1,d+1) \leqslant 2\left[\frac{d+1}{2d+1-n}\right],$$

còn với $2d + 1 = n$ thì

$$m = m(2d+1, d) = m(2d+2, d+1) \leqslant 4(d+1) = 2(n+1).$$

V.I.Levenstein[16] chứng minh (xem ví dụ [6, 7, 14]) được rằng dấu bằng ở các bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tồn tại ma trận Hadamard bậc n chia hết cho 4 bất kỳ. Về ma trận Hadamard xem mục 3.1.

Bài toán 11 (Dựa trên MMO 1993, 10.5). *Trong bảng phân loại các loài thực vật được mô tả bởi 100 dấu hiệu nhị phân. Bảng phân loại được gọi là tốt nếu như hai loài thực vật bất kỳ khác nhau ở nhiều hơn một nữa dấu hiệu. Chứng minh rằng ở một bảng phân loại tốt có không quá a) 50 loài thực vật b) 34 loài thực vật.*

Bài toán 12. *Trong bảng phân loại các loài thực vật được mô tả bởi 128 dấu hiệu nhị phân. Bảng phân loại được gọi là đúng nếu hai loài thực vật bất kỳ khác nhau ở không quá một nửa dấu hiệu. Chứng minh rằng trong một bảng phân loại đúng có không quá 256 loài thực vật và hãy chứng tỏ rằng tồn tại một bảng phân loại có đúng 256 loài thực vật.*

Bài toán 13 (MMO 1948, vòng 2, lớp 9-10, bài 4). *i) Từ một điểm trong không gian 3 chiều có thể kẻ nhiều nhất bao nhiêu tia sao cho góc giữa hai tia bất kỳ đều tù?*

(ii) Ta nói hai bộ $(a_1, \ldots, a_n)$ và $(b_1, \ldots, b_n)$ độ dài n tạo với nhau một "góc tù" nếu

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n < 0.$$

Chứng minh rằng nếu hai bộ bất kỳ từ m bộ đều tạo thành một góc tù thì $n \leqslant n + 1$.

Bài toán 14 (ASO 1970, 9.4). *Từ các chữ số 1 và 2 tạo ra 5 số có n chữ số sao cho hai số bất kỳ giống nhau ở đúng m vị trí, nhưng không có vị trí nào mà ở đó cả 5 số đều giống nhau. Chứng minh rằng $\frac{2}{5} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \frac{3}{5}$.*

Bài toán 15. *Có $N = 2k + 1$ số có n chữ số tạo thành từ các chữ số 0 và 1 sao cho hai số bất kỳ trùng nhau ở đúng m vị trí. Chứng minh rằng $\frac{m}{n} \leqslant \frac{N+1}{2N}$, còn nếu $N = 2k$ thì $\frac{m}{n} \leqslant \frac{N}{2(N-1)}$.*

Bài toán 16. *Có N số có n chữ số được tạo thành từ các chữ số 0 và 1, trong đó không có vị trí nào mà ở đó tất cả các số đều giống nhau. Chứng minh rằng $\frac{m}{n} \geqslant \frac{2}{N}$.*

3.1. Ma trận Hadamard

Bảng đồ vàng bây giờ bị thủng lỗ chỗ, như là miếng pho mát Thụy Sĩ. Chúng nằm ở các nút của lưới tọa độ của ngài Descartes, nhưng không phải nút nào cũng bị đóng. Kết quả là một sự kết hợp lạ lùng của quy tắc và ngẫu nhiên, có lẽ đây là một đoạn văn được in rõ ràng nhưng đã được mật mã hóa.

Neal Stephenson, "*Hệ thống của thế giới*".

Jacques Hadamard (nhà toán học xuất chúng người Pháp, 1865 – 1963) đã đi đến khái niệm ma trận này khi giải bài toán tối ưu: Trong tất cả các ma trận $n \times n$ với các phần tử có trị tuyệt đối không vượt quá 1, tìm ma trận có định thức lớn nhất. Kết quả là nếu n là bội của 4 (hay bằng 2) thì ma trận như vậy sẽ được tạo thành từ các phần tử bằng ± 1, trong đó tích vô hướng của hai dòng bất kỳ (phân biệt) và hai cột bất kỳ bằng 0. Ta hiểu tích vô hướng của hai véc-tơ $x = (x_1, \ldots, x_n)$ và $y = (y_1, \ldots, y_n)$ là đại lượng $x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$. Các véc-tơ có tích vô hướng bằng 0 được gọi là vuông góc. Ma trận với tính chất vừa nêu được gọi là ma trận Hadamard. Dễ dàng chứng minh được rằng việc đổi dấu tất cả các phần tử trên một dòng bất kỳ sẽ biến một ma trận Hadamard thành một ma trận Hadamard khác[17]. Điều tương tự cũng đúng cho các cột. Vì vậy đôi khi trong định nghĩa ma trận Hadamard người ta bổ sung thêm điều kiện dòng trên cùng và cột tận cùng bên trái chứa toàn số 1.

Từ điều kiện vuông góc của một dòng bất kỳ với dòng trên cùng gồm toàn số 1 suy ra trong tất cả các dòng còn lại số các số 1 bằng số các số -1, và nghĩa là n chẵn. Trong lý thuyết mã người ta sử dụng các ma trận thu được từ ma trận Hadamard bằng cách thay -1 bằng 0. Thay 1 và 0 bằng bé trai và bé gái và giải bài toán 18, bạn đọc dễ dàng chứng minh được rằng nếu kích thước của ma trận Hadamard $n > 2$ thì n là bội của 4.

Để xây dựng ma trận Hadamard người ta đã nghĩ ra các phương pháp rất thông minh, nhưng giả thuyết rằng với mọi n là bội số của 4 tồn tại ma trận Hadamard bậc n vẫn chưa được chứng minh.

Ta đưa ở đây các xây dựng đơn giản nhất các ma trận Hadamard, cho phép xây dựng chúng với $n = 2^k$. Với $n = 2$, hiển nhiên ma trận Hadamard có dạng

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nếu ma trận A_{2^k} kích thước $2^k \times 2^k$ đã được dựng, thì ma trận $A_{2^{k+1}}$ có thể được tạo thành từ 4 block kích thước $2^k \times 2^k$ như sau

$$A_{2^{k+1}} = \begin{pmatrix} A_{2^k} & A_{2^k} \\ A_{2^k} & -A_{2^k} \end{pmatrix}.$$

Bài toán 17. *Chứng minh bằng quy nạp rằng dãy các ma trận được xây dựng như ở trên đúng là các ma trận Hadamard*[18].

Bây giờ độc giả có thể dễ dàng giải quyết mục cuối cùng của bài toán 12.

Bài toán 18 (ASO 1983, 9.5). *Nhóm trẻ của một nhà trẻ xếp thành từng cặp nối đuôi nhau. Hơn nữa, trong mỗi cột số bé trai bằng số bé gái và số cặp mà ở đó có 1 bé trai, 1 bé gái bằng số các cặp còn lại. Chứng minh rằng số trẻ trong nhóm chia hết cho 8.*

Bài toán 19 (MMO 1959, vòng 2, 7.5). *Cho các số $x_i = \pm 1,\ i = 1, \ldots, n$. Chứng minh rằng nếu $x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$, thì n chia hết cho 4.*

Bài toán 20 (MMO 1971, vòng 2, 10.1). *Ở đỉnh của một n-giác đều ta viết các số 1 hoặc -1. Nếu như xoay đa giác đều một góc $\frac{2k\pi}{n}$, $k = 1, \ldots n-1$, nhân các số ở các đỉnh trùng nhau và cộng tất cả các tích đó lại thì kết quả sẽ là 0. Chứng minh rằng n là bình phương của một số nguyên.*

Trong bài toán 20[19], bây giờ thì ta có thể đoán được, thực chất là nói về ma trận Hadamard, và đúng hơn là các ma trận Hadamard với điều kiện bổ sung hoán vị vòng quanh. Trong cuộc thi học sinh được đề nghị tìm tất cả các ma trận như vậy. Ban giám khảo cũng không có lời giải cho bài toán này, và bài toán được đặt tên "*Bài toán Zelevinsky*"[20]. Trước đó bài toán này đã được biết đến như bài toán Raser về ma trận Hadamard vòng quanh. Bài toán này cho đến nay vẫn chưa có lời giải.

3.2. Mã đẳng cự đồng trọng

Dưới thuật ngữ này là một khái niệm đơn giản, trong đó thực chất là nói về bài toán sau (được xem xét trong [4]).

Bài toán 21. *Cho 10 tập hợp 4 phần tử, hơn nữa hợp của hai tập hợp bất kỳ có đúng 7 phần tử. Hỏi rằng hợp của 10 tập hợp này có thể có bao nhiêu phần tử? Đồng thời hãy chỉ ra tất cả các trường hợp có thể.*

Đáp số: $1 + 3 \cdot 10 = 31$ và $1 + 3 + 3^2 = 13$.

Giả sử hợp của các tập hợp này gồm m phần tử. Ta cho tương ứng mỗi một tập hợp này với một bộ gồm các số 0 và số 1 với 4 số 1 ở các vị trí tương ứng với các phần tử của tập hợp đã cho, ta được tập hợp đỉnh của hình lập phương nhị phân m-chiều, nằm ở lớp thứ tư (tức là có trọng lượng bằng 4). Điều kiện bài toán có nghĩa là khoảng cách giữa các đỉnh này bằng 7. Mã, nằm trong cùng một lớp, tức là từ các bộ có trọng lượng bằng nhau được gọi là đồng trọng, còn mã mà khoảng cách giữa hai từ mã bất kỳ bằng nhau, được gọi là đẳng cự. Bài toán mô tả tất cả các mã đẳng cự đồng trọng khá phức tạp.

Bài toán 22. *Chứng minh rằng mã đẳng cự tối đại chiều dài $n = q^2 + q + 1$ với trọng $q + 1$ và khoảng cách $2q + 1$ có lực lượng không quá $q^2 + q + 1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tồn tại mặt phẳng xạ ảnh bậc q.*

Ghi chú

15) M.Plotkin – chuyên gia người Mỹ về lý thuyết mã, người đã chứng minh định lý này vào khoảng những năm 1960.

16) Vladimir Iosifovic Levenstein (1935−2017) - chuyên gia nổi tiếng người Nga về lý thuyết mã.

17) Chỉ đừng quên kiểm tra tính trực giao của các cột.

18) Trước Hadamard thì J.Sylvester (1814 − 1897) đã đề xuất cách xây dựng này, vì thế các ma trận này có thể gọi là ma trận Hadamard – Sylvester.

19) Bài toán 19 thực chất là phương án đơn giản hóa của bài toán 20 và gần với bài toán 18.

20) Người đề xuất bài toán này là nhà toán học nổi tiếng A.V.Zelevinsky (1953−2013), trước đó đã từng đạt huy chương toán quốc tế và lúc đó là sinh viên năm thứ hai.

Tài liệu

[1] Берлекэмп Э. Р. Алгебраическая теория кодирования. М.: Мир, 1971.

[2] Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. М.: Наука, 1988.

[3] Гальперин Г. А., Толпыго А. К. Московские математические олимпиады. М.: Просвещение, 1986.

[4] Гашков С. Б. Разностные множества, конечные геометрии, матрицы Заранкевича и экстремальные графы // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 21. М.: МЦНМО, 2017. С. 145–185.

[5] Гашков С. Б. Графы-расширители и их применения в теории кодирования // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 13. М.: МЦНМО, 2009. С. 104–126.

[6] Левенштейн В. И. Элементы теории кодирования // Дискретная математика и математическая кибернетика. Т. 1. М.: Наука, 1974.

[7] Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А. Теория кодов, исправляющих ошибки. М.: Связь, 1979.

[8] Прасолов В. В. и др. Московские математические олимпиады 1935–1957 гг. М.: МЦНМО, 2010. Коды и олимпиады 173

[9] Прасолов В. В. и др. Московские математические олимпиады 1958–1967 гг. М.: МЦНМО, 2013. [10] Бегунц А. В. и др. Московские математические олимпиады 1981–1992 гг. М.: МЦНМО, 2017. [11] Фёдоров Р. М. и др. Московские математические олимпиады 1993–2005 гг. / 3-е изд. М.: МЦНМО, 2017.

[12] Садовничий В. А., Григорьян А. А., Конягин С. В. Задачи студенческих математических олимпиад. М.: МГУ, 1987. [13] Сидельников В. М. Теория кодирования. М.: Физматлит, 2008.

[14] Таранников Ю. В. Комбинаторные свойства дискретных структур и приложения к криптологии. М.: МЦНМО, 2011.

[15] Фейеш Тот Л. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Физматгиз, 1958. [16] Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

[17] Чашкин А. В. Дискретная математика. М.: Академия, 2012.

[18] Guruswami V., Sudan M. Improved decoding of Reed — Solomon and algebraicgeometric codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 1999. Vol. 45. P. 1757–1767.

[19] Winkler P. Mathematical puzzles: a connoisseur's collection. Natick, USA: Taylor and Francis Inc., 2004.

BÀI TOÁN ĐỘI NÓN - PHẦN 3

Đặng Nguyễn Đức Tiến
(Bergen, Na Uy)

GIỚI THIỆU

Ở những số Epsilon đầu tiên (Epsilon 1 và 2), chúng tôi đã giới thiệu với bạn đọc hàng loạt bài toán đội nón khác nhau. Cho đến thời điểm hiện nay, người viết đã sưu tập được hơn 100 biến thể khác nhau của bài toán này, và có lẽ giới toán học vẫn chưa bao giờ thôi yêu mến thể loại bài toán này. Trong số Epsilon 15 này, chúng tôi giới thiệu một phiên bản mới của bài toán - Bài toán đội nón 2019, vẫn từ nguồn quen thuộc: nhà toán học Stan Wagon ở đại học Macalester.

Bài toán

(Bài toán đội nón 2019). Có rất nhiều chiếc nón có màu sắc khác nhau được đội trên đầu các người chơi, mỗi người được đội một nón và màu nón 2 người bất kỳ có thể trùng nhau. Mỗi người không biết màu nón của mình nhưng lại thấy được màu nón của mọi người khác. Khi người dẫn trò yêu cầu, tất cả bọn họ phải đoán màu nón của mình. Người chơi (toàn bộ) sẽ thắng nếu họ đoán cùng một màu, và ít nhất một người đoán đúng màu của mình. Ngược lại họ sẽ thua. Khác biệt với những bài toán đội nón trước, ngoài việc đội nón ra, ban tổ chức còn cung cấp một chiếc máy sinh ra một số nguyên ngẫu nhiên. Toàn bộ người chơi có thể thấy con số được tạo ra từ máy trước khi đoán màu nón, và họ trước khi được đội nón có quyền chọn phạm vi sinh ra số ngẫu nhiên này (ví dụ từ 1 tới 100).

Trong lúc chơi, người chơi không được có bất cứ trao đổi gì với nhau, nhưng họ được thảo luận chiến thuật trước khi chơi. Hãy tìm chiến thuật sao cho khả năng chiến thắng của họ là cao nhất.

Ví dụ một chiến thuật có thể như sau: giả sử chỉ có 2 màu nón (đỏ và xanh), 2 người chơi thì nếu máy sinh ra số chẵn, họ chọn màu đỏ, nếu máy sinh ra số lẻ, họ sẽ chọn màu xanh.

a) Hãy tìm chiến thuật sao cho khả năng thắng trong trường hợp có 2 màu nón, 2 người chơi là cao hơn 50%

b) Giả sử có 100 người chơi, và có 100 màu nón khác nhau. Nếu người chơi chọn khoảng sinh ngẫu nhiên từ 1 đến 100 và máy sinh ra số nào thì tất cả bọn họ sẽ hô màu ứng với số đó thì khi đó xác suất thắng của họ là 1%. Liệu có thể thắng với khả năng cao hơn?

Lời giải và bình luận

Bài toán này được lấy từ nguồn (Seacrest and Seacrest, The prisoner shouting puzzle and variations, Amer. Math. Monthly, 126 (April 2019), 291-305), kết hợp với các lời giải do Stan Wagon thu thập trên nhóm toán học giải trí của ông.

Lời giải cho phần 1

Chiến thuật quen thuộc (mời bạn đọc xem lại nhóm bài toán này ở Epsilon 1 và 2) là "Cùng chọn màu đỏ", "Cùng chọn màu xanh", hoặc "Chọn màu mà mình nhìn thấy".

Rõ ràng trong 2 trường hợp đầu, họ luôn thoả mãn điều kiện 1: đoán cùng màu nón với nhau, nhưng có thể màu họ đón không phải màu nón họ đội. Với trường hợp cuối (chọn màu mà mình nhìn thấy), thì chắc chắn họ sẽ thoả điều kiện 2: có ít nhất 1 người đội đúng màu nón họ đội, nhưng lại có thể không thoả điều kiện 1 vì họ có thể đoán 2 màu khác nhau. Như vậy, nếu giữ nguyên một cách chọn, khả năng thắng chỉ là 1/2 hay 50%.

Chúng ta cũng thấy rằng chỉ có 4 khả năng với 2 nón: đỏ/đỏ, xanh/xanh, đỏ/xanh và xanh/đỏ. Dù khả năng nào xảy ra, thì 2 trên 3 chiến thuật nêu trên cũng đều giúp 2 người chơi chiến thắng với khả năng 2/3 (cao hơn 1/2). Do vậy họ có thể đưa ra chiến thuật đánh số cho các cách chọn trên 1: "Cùng chọn màu đỏ", 2: "Cùng chọn màu xanh", và 3:"Chọn màu mà mình nhìn thấy" và sau đó sẽ dùng máy sinh số ngẫu nhiên trong 1, 2, 3 để quyết định.

Chiến thuật với khả năng thắng 2/3 này là tối ưu và phần chứng minh xin phép được xem như là bài tập đối với bạn đọc.

Lời giải cho phần 2

Với trường hợp tổng quát với n người chơi và h màu nón, ta cũng có thể áp dụng cách làm ở phần 1.

Xét các màu là $c(1)$, $c(2)$, ..., $c(n)$, ta có 2 "hệ" chiến lược như sau:

- Hệ các chiến lược chọn màu cố định $F(i)$ với $1 \leq i \leq h$: bất kể thấy nón màu gì, tất cả đều cùng chọn màu $c(i)$. Chiến lược này đảm bảo rằng tất cả các người chơi đều chọn cùng một màu.

- Hệ các chiến lược chọn màu nón của mình dựa trên những gì nhìn thấy: ta gọi các chiến lược này là $S(j)$, với $1 \leq j \leq n-1$. Chiến lược $S(j)$ là: tưởng tượng xếp hàng mọi người theo màu nón tăng dần và hét màu mũ lên người thứ j trong hàng đó.

Hãy xét hệ chọn màu cố định: Giả sử có k ($k \leq h$) màu nón khác nhau trong một lần chơi. Khi đó chiến lược $F(i)$ với i là một trong k màu sẽ chắc chắn là chiến thuật thành công, và tất cả các chiến thuật khác sẽ thất bại. Vậy trong số h chiến thuật hệ cố định, có k chiến thuật thành công.

Với hệ chọn màu dựa trên màu nón nhìn thấy: giả sử toàn bộ n người chơi đều xếp hàng theo màu nón tăng dần, ta tạm gọi hàng này là hàng "đầy đủ". Với bất kỳ một người chơi p nào đó, đối với họ $n-1$ người còn lại sẽ là một hàng có được từ hàng "đầy đủ" khi xoá đi phần tử thứ p. Thử xét chiến thuật $S(j)$, khi người p chọn người thứ j trong hàng, người này sẽ ứng với hoặc người j, hoặc thứ $j+1$ so với hàng đầy đủ, tuỳ thuộc vào giá trị của p. Như vậy, chiến thuật $S(j)$ chỉ thành công khi và chỉ khi j và $j+1$ đội nón cùng màu với nhau. Bởi vì có k màu nón nên có $k-1$ vị trí trên hàng đầy đủ có 2 người liên tục khác màu nón với nhau, hay nói cách khác, trong số $n-1$ chiến thuật $S(j)$ thì $k-1$ sẽ thất bại, và sẽ có $n-k$ thành công.

Kết hợp 2 hệ chiến thuật lại với nhau, ta có $k+(n-k)=n$ chiến thuật có khả năng thành công trên tổng số $h+n-1$ chiến thuật. Do vậy, tương tự như phần 1, với bất kể cách thức đội như thế nào, nếu người chơi chọn ngẫu nhiên cùng một chiến thuật để chơi thì khả năng thắng của họ là $n/(n+h-1)$.

Với trường hợp cụ thể 100 màu nón, 100 người chơi, ta có khả năng chiến thắng là 100/199, hơn 50.25%. Một kết quả cao vượt trội so với ước lượng sơ lược ban đầu.

KHAI THÁC BÀI PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐỀ IMO 2017

Nguyễn Thế Anh
(Giáo viên THPT Nguyễn Hiếu Tự, Vĩnh Long)

Trong các kỳ thì IMO 2017 diễn ra tai thành phố Rio de Janeiro, Brazil có bài toán phương trình hàm rất lý thú của tác giả **Dorlir Ahmeti** đến từ **Albania.** Trong bài viết này, chúng tôi xin gửi đến bạn đọc các cách tiếp cận lời giải và hướng phát triển bài toán; từ đó, tạo ra góc nhìn mới về các vấn đề khác trong kỳ thi IMO. Dưới đây là nội dung bài toán đó.

Bài toán 1. *(IMO 2017) Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn*

$$f(f(x)f(y))+f(x+y)=f(xy) \tag{1}$$

với mọi $x,y\in\mathbb{R}$.

Phân tích. *Giả sử tồn tại hàm f thoả mãn bài toán. Nếu $f(0)=0$ thì thay $y=0$ vào (1), ta có*

$$f(f(0)f(x))+f(x)=f(0)\Rightarrow f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Nếu $f(0)\neq 0$, thay $x=y=0$ vào (1), ta có

$$f(f(0)^2)+f(0)=f(0)$$

nên $f(f(0)^2)=0$. Lúc đó $\exists\, c\in\mathbb{R}$ sao cho $c=(f(0))^2$ mà $f(c)=0$. Giả sử $c\neq 1$ thay $x=\frac{c}{c-1}$; $y=c$ vào (1) ta được

$$f(f\left(\frac{c}{c-1}\right)f(c))+f\left(\frac{c}{c-1}+c\right)=f\left(\frac{c}{c-1}.c\right)$$
$$\Leftrightarrow f(0)+f\left(\frac{c^2}{c-1}\right)=f\left(\frac{c^2}{c-1}\right)$$

Suy ra $f(0)=0$ (vô lý) nên $c=1=(f(0))^2$ và $f(1)=0$. Đến đây ta có một số hướng giải như sau

Lời giải 1. *Ở đây điểm nhấn trong các trình bày này là tập trung sử dụng cách biến đổi khéo léo từ việc thay thế x,y.*

Chú ý rằng nếu hàm số $f(x)$ thỏa mãn đề bài thì $-f(x)$ cũng thế. Do đó, ta có thể giả sử $f(0)\leq 0$ và vì thế nên $f(0)=-1$.

- Thay $y = 1$ vào (1) ta có $f(x+1) = f(x) - 1$.
- Thay $y = 0$ vào (1) ta có $f(f(x)) = 1 - f(x)$, nên

$$f(f(f(x))) = 1 - f(f(x)) = f(x).$$

Theo quy nạp thì $f(x+n) = f(x) - n$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{Z}$. Suy ra $f(n) = 1 - n, \forall n \in \mathbb{Z}$. Ta có $f(1 - f(x)) = f(f(f(x))) = f(x)$ nên $f(-f(x)) = 1 + f(x)$.

- Thay $y = 2$, ta có $f(-f(x)) + f(x+2) = f(2x)$ nên $f(2x) = 2f(x) - 1$.
- Thay $y = -1$, ta có $f(2f(x)) + f(x-1) = f(-x)$ nên

$$2f(f(x)) - 1 + f(x) + 1 = f(-x) \Rightarrow f(-x) = 2 - f(x) = -f(x+2).$$

Suy ra $f(-x)f(-y) = f(x+2)f(y+2)$.

- Trong (1), lại thay $(x, y) \to (-x, -y)$ thì

$$f(f(-x)f(-y)) = f(xy) - f(-x-y) = f(xy) + f(x+y) - 2.$$

- Trong (1), thay $(x, y) \to (x+2, y+2)$ ta có

$$f(f(x+2)f(y+2)) = f(xy+2x+2y+4) - f(x+y+4) = f(xy+2x+2y) - f(x+y).$$

Suy ra

$$f(xy) = 2f(x+y) - 2 = f(xy+2x+2y) \Rightarrow f(xy) + f(2x+2y) - 1 = f(xy+2x+2y).$$

Dễ thấy với mọi $u, v \in \mathbb{R}$, tồn tại $x, y \in \mathbb{Z}$ và $n \in \mathbb{Z}$ để cho $xy = u, 2x + 2y + n = v$ nên

$$\begin{aligned} & f(u) + f(v-n) - 1 = f(u+v-n) \\ \Leftrightarrow\ & f(u) + f(v) + n - 1 = f(u+v) + n \\ \Leftrightarrow\ & f(u) + f(v) - 1 = f(u+v). \end{aligned}$$

Thay $(u, v) \to (f(x), x)$, ta được $f(f(x)+x) = f(f(x)) + f(x) - 1 = 0$ nên $f(x) = 1 - x, \forall x$.

Tương tự thì $f(x) = x - 1$ cũng thỏa mãn. Vậy nên có tất cả ba hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x) \equiv 0, f(x) = 1 - x, f(x) = x - 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Lời giải 2. Hướng giải dùng tính đơn ánh.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $f(0) = -1$ thì $f(x+1) = f(x) - 1$. Ta cần chứng minh f là đơn ánh.

Thật vậy, giả sử $f(a) = f(b)$ lúc đó theo đẳng thức trên, ta cũng có $f(a-1) = f(b-1)$ và vì thế nên nếu cặp (a, b) thỏa mãn thì $(a-1, b-1)$ cũng thế. Như vậy thì số a, b có thể chọn cho nhỏ tùy ý và ở đây ta cho $a < 1$. Khi đó, tồn tại $r, s \in \mathbb{R}$ sao cho $rs + 1 = a, r + s = b$.

Hệ này có nghiệm vì khi rút s theo r, ta có $r^2 - br + a - 1 = 0$ với $\Delta = b^2 - 4(a-1) > 0$. Thay $x = s, y = r$ vào (1), ta có $f(f(s)f(r)) + f(s+r) = f(sr)$. Suy ra

$$\begin{aligned}
& f(f(s)f(r)) + f(b) = f(a-1) = f(a) + 1 = f(b) + 1 \\
& \Rightarrow f(f(s)f(r)) = 1 \\
& \Rightarrow f(f(s)f(r) + 1) = 0 \\
& \Rightarrow f(s)f(r) + 1 = 1 \\
& \Rightarrow f(s)f(r) = 0.
\end{aligned}$$

Đến đây suy ra $f(s) = 0$ hoặc $f(r) = 0$ hay $s = 1$ hoặc $r = 1$. Trong cả hai trường hợp, ta đều có $a = b$ nên suy ra f là đơn ánh. Thay $y = -x$ vào (1), ta có

$$\begin{aligned}
& f(f(x)f(-x)) - 1 = f(-x^2) = f(-x^2 + 1) - 1 \\
& \Rightarrow f(f(x)f(-x)) = f(-x^2 + 1) \\
& \Rightarrow f(x)f(-x) = -x^2 + 1.
\end{aligned}$$

Thay $y = 1 - x$ vào (1), ta có

$$\begin{aligned}
& f(f(x)f(1-x)) = f\left(x\left(1-x\right)\right) \\
& \Rightarrow f(x)f(1-x) = x\left(1-x\right) = x - x^2 \\
& \Rightarrow f(x)\left(1 + f(-x)\right) = x\left(1-x\right) = x - x^2 \\
& \Rightarrow f(x) + f(x)f(-x) = x\left(1-x\right) = x - x^2.
\end{aligned}$$

Từ hai đẳng thức trên, ta có $f(x) - x^2 + 1 = x - x^2 \Rightarrow f(x) = x - 1$. Trường hợp $f(0) = 1$ làm tương tự ta có $f(x) = 1 - x$. Vậy nghiệm của bài toán là

$$f(x) = 0, f(x) = x - 1, f(x) = 1 - x.$$

□

Nhận xét. *Ở vế trái biểu thức $f(f(x)f(y))$ của (1). Ta bỏ đi $f(y)$ nhằm giảm bới trường hợp cho $f(0)$. Một điều lý thú là cách giải quyết vẫn như bài toán 1. Từ đó ta có Bài toán sau.*

Bài toán 2. *Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn*

$$f(f(x)) + f(x+y) = f(xy) \tag{2}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm f thoả mãn bài toán. Thay $x = y = 0$ vào (2), ta có

$$f(f(0)) + f(0) = f(0)$$

Nếu $f(0) = 0$ thì thay $x = 0$ vào (2), ta có

$$f(f(0)) + f(y) = f(0) \Rightarrow f(y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Nếu $f(0) \neq 0$ thì $f(f(0)) = 0$, lúc đó $\exists\, c \in \mathbb{R}$ sao cho $c = f(0)$ mà $f(c) = 0$ Giả sử $c \neq 1$ thay $x = c; y = \frac{c}{c-1}$ vào (2) ta có

$$\begin{aligned} f(f(c)) + f\left(\frac{c}{c-1} + c\right) &= f\left(\frac{c}{c-1}.c\right) \\ \Leftrightarrow f(0) + f\left(\frac{c^2}{c-1}\right) &= f\left(\frac{c^2}{c-1}\right) \end{aligned}$$

Suy ra $f(0) = 0$ (vô lý), do đó $c = 1 = f(0)$và $f(1) = 0$, thay $x = 1$ vào (2), ta có

$$f(f(1)) + f(y+1) = f(y) \Leftrightarrow 1 + f(y+1) = f(y).$$

Giả sử $f(a) = f(b)$ với $a < 1$, lúc đó tương tự cách giải bài gốc thì $\exists r, s \in \mathbb{R}$ sao cho $rs + 1 = a, r + s = b$. Thay $x = s, y = r$ vào (2), ta có

$$\begin{aligned} &f(f(s)) + f(b) = f(a-1) = (f(a)+1) = (f(b)+1) \\ &\Rightarrow f(f(s)) = 1 \\ &\Rightarrow f(f(s)+1) = 0 \\ &\Rightarrow f(s) + 1 = 1 \\ &\Rightarrow f(s) = 0 \Rightarrow s = 1. \end{aligned}$$

do đó $a = b$ suy ra f là đơn ánh. Thay $y = 0$ vào (2), ta có

$$\begin{aligned} &f(f(x)) + f(x) = f(0) \\ &\Rightarrow f(f(x)) = 1 - f(x) \\ &\Rightarrow f(1 - f(x)) = f(f(f(x))) = 1 - f(f(x)) = f(x) \\ &\Rightarrow 1 - f(x) = x \\ &\Rightarrow f(x) = -x + 1. \end{aligned}$$

Thế $f(x) = -x + 1$ vào (2), ta có $f(x) = -x + 1$ không thoả mãn (2). Vậy nghiệm của bài toán là: $f(x) = 0$. □

Nhận xét. *Ở vế trái biểu thức $f(f(x)f(y))$ của (1), ta bỏ đi $f(x)$ nhằm giảm bớt trường hợp cho $f(0)$. Một điều lý thú là các giải quyết vẫn như bài toán 1 khi thay đổi miền xác định và miền giá trị thành $f : [0; 1] \to [0; 1]$.*

Bài toán 3. *Tìm tất cả các hàm số $f : [0; 1] \to [0; 1]$ thoả mãn*

$$f(f(x)^2) + f(x+y) = f(xy) \tag{3}$$

với mọi $x, y \in [0; 1]$.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm f thoả mãn bài toán. Thay $x = y = 0$ vào (3), ta có

$$f(f(0)^2) + f(0) = f(0).$$

Nếu $f(0) = 0$ thì thay $y = 0$ vào (1), ta có

$$f(f(0)^2) + f(x) = f(0) \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in [0; 1].$$

Nếu $f(0) \neq 0$ thì $f(f(0)^2) = 0$ nên $\exists\, c \in \mathbb{R}$ sao cho $c = (f(0))^2$ mà $f(c) = 0$. Giả sử $c \neq 1$ thay $x = c; y = \frac{c}{c-1}$ vào (3) ta có

$$\begin{aligned} & f(f(c)^2) + f\left(\frac{c}{c-1} + c\right) = f\left(\frac{c}{c-1}.c\right) \\ & \Leftrightarrow f(0) + f\left(\frac{c^2}{c-1}\right) = f\left(\frac{c^2}{c-1}\right) \end{aligned}$$

Suy ra $f(0) = 0$, vô lý nên $c = 1 = (f(0))^2 \Rightarrow f(0) = 1$và $f(1) = 0$, thay $x = 1$ vào (3), ta có

$$f(f(1)^2) + f(1+y) = f(y) \Leftrightarrow 1 + f(y+1) = f(y).$$

Giả sử $f(a) = f(b)$ lúc đó $\exists r, s \in \mathbb{R}$ sao cho $rs + 1 = a, r + s = b$. Thay $x = s, y = r$ vào (3), ta có

$$\begin{aligned} & f(f(s)^2) + f(b) = f(a-1) = f(a) + 1 = f(b) + 1 \\ & \Rightarrow f(f(s)^2) = 1 \\ & \Rightarrow f(f(s)^2 + 1) = 0 \\ & \Rightarrow f(s)^2 + 1 = 1 \\ & \Rightarrow f(s) = 0 \Rightarrow s = 1. \end{aligned}$$

do đó $a = b$ suy ra f là đơn ánh. Thay $y = 1 - x$ vào (3), ta có

$$\begin{aligned} & f(f(x)^2) = f\left(x\left(1-x\right)\right) \\ & \Rightarrow f(x)^2 = x\left(1-x\right) = x - x^2 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x - x^2} \end{aligned}$$

Thế $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ vào (1), ta có $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ không thoả mãn (3).

Vậy nghiệm của bài toán là $f(x) = 0$. □

Bài toán 4. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thoả mãn*

$$f(f(x)f(y)^2) + f(x+y) = f(xy) \tag{4}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm f thoả mãn bài toán. Thay $x = y = 0$ vào (4), ta có

$$f(f(0)^3) + f(0) = f(0).$$

Nếu $f(0) = 0$ thì thay $y = 0$ vào (4), ta có

$$f(f(x)f(0)^2) + f(x) = f(0) \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nếu $f(0) \neq 0$ thì $f(f(0)^3) = 0$ nên $\exists c \in \mathbb{R}$ sao cho $c = (f(0))^3$ mà $f(c) = 0$ Giả sử $c \neq 1$ thay $x = c; y = \frac{c}{c-1}$ vào (1) ta có

$$\begin{aligned} & f(f(c)f(\frac{c}{c-1})^2) + f\left(\frac{c}{c-1} + c\right) = f\left(\frac{c}{c-1}.c\right) \\ \Leftrightarrow\ & f(0) + f\left(\frac{c^2}{c-1}\right) = f\left(\frac{c^2}{c-1}\right) \end{aligned}$$

Suy ra $f(0) = 0$ (vô lý) nên $c = 1 = (f(0))^3 \Rightarrow f(0) = 1$và $f(1) = 0$, thay $y = 1$ vào (4), ta có

$$f(f(x)f(1)^2) + f(1+x) = f(x) \Leftrightarrow 1 + f(x+1) = f(x).$$

Giả sử $f(a) = f(b)$ lúc đó $\exists r, s \in \mathbb{R}$ sao cho $rs + 1 = a, r + s = b$. Thay $x = s, y = r$ vào (4), ta có

$$\begin{aligned} & f(f(s)f(r)^2) + f(b) = f(a-1) = f(a) + 1 = f(b) + 1 \\ \Rightarrow\ & f(f(s)f(r)^2) = 1 \\ \Rightarrow\ & f(f(s)f(r)^2 + 1) = 0 \\ \Rightarrow\ & f(s)f(r)^2 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Suy ra $f(s) = 0$ hoặc $f(r)^2 = 0$ nên $s = 1$ hoặc $r = 1$. Do đó $a = b$ suy ra f là đơn ánh.

Thay $y = 0$ vào (4), ta có

$$\begin{aligned} & f(f(x)) + f(x) = f(0) \\ \Rightarrow\ & f(f(x)) = 1 - f(x) \\ \Rightarrow\ & f(1 - f(x)) = f(f(f(x))) = 1 - f(f(x)) = f(x) \\ \Rightarrow\ & 1 - f(x) = x \\ \Rightarrow\ & f(x) = -x + 1. \end{aligned}$$

Thế $f(x) = -x+1$ vào (1), ta có $f(x) = -x+1$ không thoả mãn (4). Vậy nghiệm của bài toán là: $f(x) = 0$. □

Nhận xét. *Tổng quát khi thay 2 bởi số nguyên dương chẵn bất kỳ, ta có bài toán sau.*

Bài toán 5. *Với k là số nguyên dương cho trước, tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn*

$$f(f(x)^{2k}f(y)) + f(x+y) = f(xy)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$

Lời giải bài toán này được thực hiện hoàn toàn tương tự như trường hợp mũ 2, ứng với $k = 1$.

Cuối cùng, ta xét một bài tương tự với bài toán ban đầu nhưng lời giải khó hơn nhiều. Đề bài cụ thể như sau (lời giải của thành viên **pco** trên diễn đàn `artofproblemsolving.com`).

Bài toán 6. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thoả mãn*

$$f(f(x)f(y)) = f(x+y) + f(xy)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Nếu $f(0) = 0$, thay $y = 0$ vào đề bài, ta có $f(0) = f(x) + f(0) \Rightarrow f(x) \equiv 0, \forall x$.

Giả sử rằng $f(0) = a > 0$. Ta sẽ lần lượt chứng minh các khẳng định sau:

1. Đặt $D = \{x | f(x) = f(-x)\}$ thì $x, y \in D \Rightarrow x + y \in D$.

   Thật vậy, $0 \in D, x \in D \Rightarrow -x \in D$. Trong giả thiết, thay $(x, y) \to (-x, -y)$, ta có

   $$f(x+y) + f(xy) = f(f(x)f(y)) = f(f(-x)f(-y)) = f(-x-y) + f(xy).$$

   Suy ra $f(x+y) = f(-x-y)$ nên $x + y \in D$.

2. Nếu tồn tại $u, v \in \mathbb{R}$ sao cho $f(u) = f(v)$ thì $u - v \in D$.

   Thật vậy, lần lượt thay $(x, y) \to (u, 1), (v, 1)$, ta có $f(u+1) = f(v+1)$. Do đó, bằng quy nạp, ta thu được $f(u+n) = f(v+n)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

   - Thay $(x, y) \to (u, n), (v, n)$ rồi so sánh, ta có $f(nu) = f(nv), \forall n \in \mathbb{Z}^+$.
   - Thay $(x, y) \to (u, u), (v, v)$ rồi so sánh, ta có $f(u^2) = f(v^2)$.
   - Thay $(x, y) \to (u+1, -1), (v+1, -1)$ rồi so sánh, ta có $f(-u-1) = f(-v-1)$. Suy ra $f(-u) = f(-v)$ nên $f(u+n) = f(v+n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}$.
   - Thay $(x, y) \to (u, -v), (v, -v)$ rồi so sánh, ta có

     $$f(u-v) + f(-uv) = a + f(-v^2).$$

   - Thay $(x, y) \to (v, -u), (u, -u)$ rồi so sánh, ta có

     $$f(v-u) + f(-uv) = a + f(-u^2).$$

   Chú ý rằng, ta cũng có $f(-u^2) = f(-v^2)$ nên $f(u-v) = f(v-u) \Rightarrow u - v \in D$.

3. $f(n+2) = f(n)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

   Thật vậy,

   Đặt $d = u - v \in D$. Giả sử rằng f không đơn ánh, tức là tồn tại cặp (u, v) để $f(u) = f(v)$ nhưng $u \neq v$, tương ứng $d \neq 0$. Ta có $f(d) = f(-d)$ và $f(d+1) = f(-d+1)$.

   - Thay $(x, y) \to \left(\frac{1}{d} - 1, -d + 1\right), \left(\frac{1}{d} - 1, d + 1\right)$ rồi so sánh, ta có $f\left(d + \frac{1}{d} - 2\right) = f\left(d + \frac{1}{d}\right)$. Suy ra $2 \in D$. Để ý rằng $f(2) = f(-2)$ nên $f(n+4) = f(n)$. Do đó $f(5) = f(1)$.
   - Thay $(x, y) \to \left(\frac{1}{4}, 5\right), \left(\frac{1}{4}, 1\right)$ rồi so sánh, ta có $f\left(5 + \frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right)$ nên $5 \in D$. Vì tính "cộng tính" của tập D nên $5 \in D, 2 \in D$ chứng tỏ $1 \in D$. Suy ra $f(1) = f(-1)$.

Từ đó suy ra $f(n+2) = f(n), \forall n \in \mathbb{Z}$.

4. $\mathbb{Q} \subset D$ và $f(x) = a, \forall x \in \mathbb{Q}$.

   Xét số nguyên dương n, thay $(x, y) \to \left(1 - \frac{1}{n}, n-1\right), \left(1 - \frac{1}{n}, n+1\right)$ rồi so sánh, ta có $f\left(n + \frac{1}{n} - 2\right) = f\left(n - \frac{1}{n} + 2\right)$ nên $\frac{2}{n} - 4 \in D$. Mà $2 \in D$ nên dễ chứng minh được $\frac{2}{n} \in D$ và mọi số hữu tỷ $\frac{p}{q} \in D$. Do đó $\mathbb{Q} \subset D$.

   Xét $x_0 \in \mathbb{Q}$ thì thay $(x, y) \to \left(\frac{x_0}{2}, \frac{x_0}{2}\right), \left(\frac{x_0}{2}, -\frac{x_0}{2}\right)$ rồi so sánh, ta được $f(x) = a$.

5. f là đơn ánh trên $\mathbb{R}$.

   Theo trên thì $f(1) = a$. Thay $(x, y) \to (x-1, 0), (x-1, 1)$ rồi so sánh, ta có $f(x) = a, \forall x$. Thử lại thấy không thỏa. Do đó, không tồn tại hàm "không đơn ánh" nào thỏa mãn đề bài. Suy ra f đơn ánh.

6. $a = 1$.

   Tiếp theo,

   - Thay $(x, y) \to (0, 0)$, ta có $f(a^2) = 2a$.
   - Thay $(x, y) \to (a^2, a^2)$, ta có $f(a^4) = 2a = f(a^2)$. Suy ra $a^4 = a^2 \Rightarrow a = 1$.

7. $f(x) = x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

   - Thay $(x, y) \to (0, -1), (1, -1)$ và sử dụng tính đơn ánh, ta có $f(-1)\left[f(1) - f(0)\right] = 0$ nên $f(-1) = 0$.
   - Thay $(x, y) \to (x, -x-1)$, ta có $f(x)f(-x-1) = -x(x+1)$.
   - Thay $(x, y) \to (-x, -1)$ ta có $f(-x-1) = 1 - f(x)$.

   Suy ra $f(x)(1 - f(x)) = -x(x+1)$ hay

   $$[f(x) - x - 1]\,[f(x) + x] = 0.$$

   Do đó với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $f(x) = x + 1$ hoặc $f(x) = -x$. Tuy nhiên, giả sử có x_0 để $f(x_0) = -x_0$ thì thay $(x, y) \to (x_0, x_0)$, ta có $f(2x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{2}$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + 1$ vẫn thỏa mãn $f(x) = x + 1$.

8. Nếu $a < 0$ thì $f(x) = -x - 1$.

   Ta thấy rằng nếu $f(x)$ thỏa mãn thì $-f(x)$ cũng thỏa nên ở trên ta đã có $f(x) = x + 1$ ứng với $a > 0$ thì cũng sẽ có $f(x) = -x - 1$ ứng với $a < 0$.

Vậy tất cả các hàm thỏa mãn đề bài là $f(x) \equiv 0, f(x) = x + 1, f(x) = -x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$. □

XUNG QUANH ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI VƯƠNG QUỐC ANH 2019

Cao Hoàng Đức
(Trường Ashbourne College, United Kingdom)

1. Phần giới thiệu:

Kì thi Olympic dành cho học sinh giỏi toán Vương quốc Anh 2019 (British Mathematical Olympiad) vừa được diễn ra theo cấu trúc 10 bài toán trong hai vòng. Với thời gian 210 phút ở mỗi vòng, đã có hơn 1000 thí sinh tham dự vòng 1, và 100 thí sinh tham dự vòng 2 với mục đích khuyến khích và chọn lọc các học sinh có năng khiếu và đam mê với bộ môn toán học trên khắp lãnh thổ của Vương quốc Anh.

Nhân dịp kì thi Olympic toán quốc tế (IMO) lần thứ 60 sắp tới sẽ được tổ chức tại đại học Bath, Vương quốc Anh, bài viết này nhằm mục đích giới thiệu bạn đọc về các đề thi học sinh giỏi ở Vương quốc Anh mới nhất cũng như lời giải và bình luận về các bài toán trong đề thi.

2. Đề bài

2.1. Vòng 1, ngày thi 30/11/2018

Bài toán 1. *Một dãy số gồm* 5 *số có hai chữ số nguyên dương được viết lên bảng theo thứ tự tăng dần. Mỗi một số trong* 5 *số này đều là bội của* 3*, và các chữ số* $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ *xuất hiện đúng một lần trên bảng. Hỏi có tổng cộng bao nhiêu cách biểu diễn dãy số lên bảng. Lưu ý rằng số có hai chữ số không bắt đầu từ số* 0.

Bài toán 2. *Với mỗi số nguyên dương* $n \geq 3$*, ta xác định một vòng-*n *là một cách sắp xếp vòng tròn của* n *số nguyên dương (không nhất thiết phân biệt) thỏa mãn tích của mỗi ba số nguyên liên tiếp là* n*. Xác định số số nguyên* n *thỏa mãn* $3 \leq n \leq 2018$ *sao cho ta có thể tại được một vòng-*n.

Bài toán 3. *Ares nhân hai số nguyên khác có hiệu là* 9*. Grace nhân hai số nguyên khác nhau có hiệu là* 6*. Hai tích này đều đạt cùng một giá trị* T*. Xác định các giá trị có thể của* T.

Bài toán 4. *Xét Γ là một nửa đường tròn đường kính AB. Một điểm C nằm trên đường kính và hai điểm E và D nằm trên cung BA, với E nằm giữa B và D. Gọi F là giao điểm của các tiếp tuyến của Γ tại D và E. Giả sử $\angle ACD = \angle ECB$. Chứng minh rằng $\angle EFD = \angle ACD + \angle ECB$.*

Bài toán 5. *Cho hai khối hình trụ đồng dạng với nhau. Tổng của chiều cao của cả hai là 1. Tổng của diện tích toàn phần của cả hai là 8π. Tổng thể tich của cả hai là 2π. Tìm tất cả khả năng có thể cho mỗi hình trụ.*

Bài toán 6. *Một con kiến Ada bắt đầu xuất phát tại điểm O trên mặt phẳng. Sau khi bắt đầu, mỗi phút nó chọn một hướng Bắc, Nam, Đông, Tay, và di chuyển 1m theo hướng đó. Sau khi kết thúc 2018 phút, nó nhận ra rằng nó đã quay trở lại đúng điểm O. Gọi n là số khả năng có thể để chuyến hành trình của con kiến thỏa mãn yêu cầu. Giá trị cao nhất của lũy thừa của 10 là ước của n là bao nhiêu?*

2.2. Vòng 2, ngày thi 24/01/2019

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC. Gọi L là đường thẳng qua B vuông góc với AB. Đường thẳng qua A vuông góc với BC cắt L tại điểm D. Đường trung trực của BC cắt L tại điểm P. Gọi E là hình chiếu của D lên AC.*

Chứng minh tam giác BPE là tam giác cân.

Bài toán 2. *Với một số nguyên n, một tập hợp bao gồm n^2 quân cờ ma thuật được đặt lên một bàn cờ $n^2 \times n^2$ bao gồm n^4 ô vuông đơn vị. Tại một thời điểm, mỗi quân cờ di chuyển đến một ô mới sao cho khoảng cách giữa tâm ô vuông mới và với tâm ô cũ là n. Các quân cờ sẽ chiến thắng nếu trước và sau tín hiệu, không có các quân cờ nào trên cùng một hàng hoặc một cột.*

Với những giá trị nào của n, quân cờ có thể giành chiến thắng?

Bài toán 3. *Cho số nguyên tố p lẻ. Hỏi có bao nhiêu tập hợp con khác rỗng của*

$$\{1, 2, 3, ..., p-2, p-1\}$$

có tổng các phần tử chia hết cho p?

Bài toán 4. *Tìm tất cả các hàm số f từ tập hợp các số thực dương đến tập hợp các số thực dương sao cho $f(x) \leq f(y)$ khi $x \leq y$ và*

$$f(x^4) + f(x^2) + f(x) + f(1) = x^4 + x^2 + x + 1$$

với mọi $x > 0$.

3. Lời giải và bình luận

3.1. Vòng 1

Bài toán 1. *Một dãy số gồm 5 số có hai chữ số nguyên dương được viết lên bảng theo thứ tự tăng dần. Mỗi một số trong 5 số này đều là bội của 3, và các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ xuất hiện đúng một lần trên bảng. Hỏi có tổng cộng bao nhiêu cách biểu diễn dãy số lên bảng. Lưu ý rằng số có hai chữ số không bắt đầu từ số 0.*

Lời giải. Nếu $A = \overline{ab} \vdots 3$ thì khi đó $a + b \vdots 3$. Từ đó suy ra a, b đều là bội của 3 hoặc a chia 3 dư 1 và b chia 3 dư 2 hoặc a chia 3 dư 2 và b chia 3 dư 1. Ta phân hoạch các chữ số $0, 1, ..., 9$ thành ba tập hợp

- $S_0 = \{0, 3, 6, 9\}$, tập các số chia hết cho 3.
- $S_1 = \{1, 4, 7\}$, tập các số chia 3 dư 1.
- $S_2 = \{2, 5, 8\}$, tập các số chia 3 dư 2.

Ta có hai trường hợp sau:

1. Nếu $a, b \in S_0$: Trước hết, nếu $b = 0$ thì a có 3 cách chọn. Với hai chữ số còn lại, ta có thể chọn được 2 số có hai chữ số là bội của 3.

   Như vậy số cách chọn ở đây là: $3 \times 2 = 6$ cách.

2. Nếu a, b đều không là bội của 3: Ta chọn 3 số còn lại như sau:

   - Với số A có chữ số 1, ta có 3 cách chọn chữ số còn lại từ tập S_2.
   - Với số A có chữ số 4, lúc này ta chỉ còn 2 chữ số có thể chọn từ tập S_2.
   - Với số A có chữ số 7, ta chỉ còn duy nhất 1 chữ số có thể chọn từ tập S_2.

   Ngoài ra, với mỗi số chọn được từ 2 chữ số, ta lập được 2 số có hai chữ số (ví dụ như với hai chữ số $1, 2$ thì ta được hai số 12 và 21).

   Vậy có $3 \times 2 \times 1 \times 2^3 = 48$ số thỏa mãn yêu cầu.

Khi ta có 5 số như vậy, chỉ có duy nhất 1 cách sắp xếp chúng theo thứ tự tăng dần.

Vậy tổng cộng ta có $6 \times 48 = 288$ cách.

□

Bài toán 2. *Với mỗi số nguyên dương $n \geq 3$, ta xác định một vòng-n là một cách sắp xếp vòng tròn của n số nguyên dương (không nhất thiết phân biệt) thỏa mãn tích của mỗi ba số nguyên liên tiếp là n. Xác định số số nguyên n thỏa mãn $3 \leq n \leq 2018$ sao cho ta có thể tại được một vòng-n.*

Lời giải. Giả sử các số trên vòng-n là $a_1, a_2, ..., a_n$. Ta có:

$$\begin{cases} a_1a_2a_3 = n \\ a_2a_3a_4 = n \end{cases} \Leftrightarrow a_1 = a_4.$$

Tương tự như vậy, ta có thể chứng minh được $a_1 = a_{3m+1}, a_2 = a_{3m+2}, a_3 = a_{3m}$.

Đặt $a_1 = x, a_2 = y, a_3 = z$, do đó $xyz = n$. Ta xét các trường hợp sau:

1. Nếu $n = 3k + 1$, khi đó:
$$a_{3k}a_{3k+1}a_1 = n \Rightarrow zx^2 = n.$$
Suy ra $x = z$, tương tự ta cũng sẽ có $z = y$. Suy ra n phải là lập phương của một số tự nhiên.
2. Nếu $n = 3k + 2$, chứng minh tương tự ta cũng sẽ có n là lập phương của một số tự nhiên.
3. Nếu $n = 3k$, dễ thấy mọi số n lúc này đều thỏa mãn.

Như vậy, yêu cầu bài toán trở thành tìm tất cả số nguyên n trong khoảng $3 \leq n \leq 2018$ là số lập phương hoặc là bội của 3. Ta có các trường hợp sau

- Số các số n là bội của 3 là $\left\lfloor \dfrac{2018 - 3}{3} \right\rfloor + 1 = 672$ số.
- Số các số lập phương là $\left\lfloor \sqrt[3]{2018} \right\rfloor - 1 = 11$ số.
- Số các số lập phương là bội của 3 là $\left\lfloor \sqrt[3]{\dfrac{2018}{27}} \right\rfloor = 4.$

Vậy theo nguyên lý bù trừ, tổng cộng có $672 + 11 - 4 = 679$ số thỏa mãn đề bài.

□

Bài toán 3. *Ares nhân hai số nguyên khác có hiệu là* 9. *Grace nhân hai số nguyên khác nhau có hiệu là* 6. *Hai tích này đều đạt cùng một giá trị* T. *Xác định các giá trị có thể của* T.

Lời giải. Gọi hai số nguyên của Ares là a và $a - 9$. Gọi hai số nguyên của Grace là b và $b - 6$. Theo giả thiết, ta có phương trình

$$\begin{aligned} & a(a-9) = b(b-6) \\ \Leftrightarrow\ & 4a^2 - 36a - 4b^2 + 24b = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (2a-9)^2 - (2b-6)^2 = 45 \\ \Leftrightarrow\ & (2a - 2b - 3)(2a + 2b - 15) = 45. \end{aligned}$$

Đặt $x = 2a - 2b - 3, y = 2b + 2a - 15$, dễ thấy x, y là các số nguyên lẻ và:

$$\begin{cases} a = \dfrac{x + y + 18}{4} \\ b = \dfrac{y - x + 12}{4} \end{cases}.$$

Ta có bảng sau giá trị sau

x	-45	-15	-9	-5	-3	-1	1	3	5	9	15	45
y	-1	-3	$-$	-9	-15	-45	45	15	9	5	3	1
a	-7	0	1	1	0	-7	16	9	8	8	9	16
b	14	6	4	2	0	-8	14	6	4	2	0	-8
T	112	0	-8	-8	0	112	112	0	-8	-8	0	112

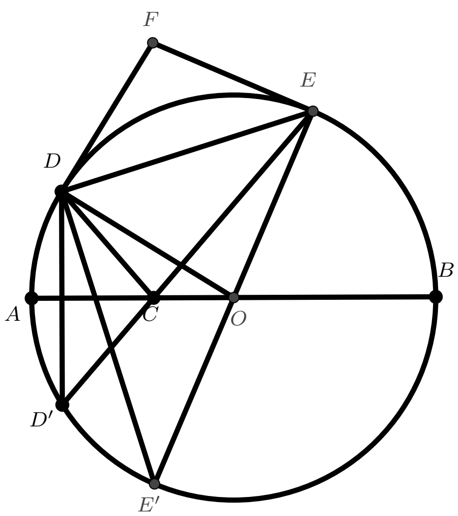
Như vậy $T \in \{-8, 0, 112\}$.

□

Nhận xét. *Các bài toán 1,2,3 đều là những bài toán tương đối dễ. Tuy nhiên, việc tính toán cũng khá nhiều trong một thời gian ngắn cũng là một vấn đề đối với đa số thí sinh tham gia.*

Bài toán 4. *Xét Γ là một nửa đường tròn đường kính AB. Một điểm C nằm trên đường kính và hai điểm E và D nằm trên cung BA, với E nằm giữa B và D. Gọi F là giao điểm của các tiếp tuyến của Γ tại D và E. Giả sử $\angle ACD = \angle ECB$. Chứng minh rằng $\angle EFD = \angle ACD + \angle ECB$.*

Lời giải.



Gọi O là tâm đường tròn. Vẽ đường kính EE' và gọi D' là điểm đối xứng của D qua AB. Như vậy $D' \in (O)$, ngoài ra ta cũng có:

$$\angle ACD' = \angle ACD = \angle ECB$$

Từ đó ta có thể chứng minh được E, C, D' thẳng hàng. Ngoài ra do $\angle DD'E = \angle DE'E$ và $\Delta CDD'$, $\Delta DOE'$ lần lượt cân tại C và O, ta còn có:

$$\angle DCE = 2\angle DD'C = 2\angle DE'O = \angle DOE$$

Suy ra tứ giác $CDEO$ nội tiếp. Ngoài ra, tứ giác $FDOE$ cũng nội tiếp.

Từ đó ta có tứ giác $FDCE$ nội tiếp nên:

$$\angle DFE = 180^\circ - \angle DCE = \angle ACD + \angle ECB$$

□

Bài toán 5. *Cho hai khối hình trụ đồng dạng với nhau. Tổng của chiều cao của cả hai là* 1. *Tổng của diện tích toàn phần của cả hai là* 8π. *Tổng thể tich của cả hai là* 2π. *Tìm tất cả khả năng có thể cho mỗi hình trụ.*

Lời giải. Gọi h, r lần lượt là đường cao và bán kính của một khối trụ và $\dfrac{1}{k}$ là tỉ số đồng dạng ($h, r, k \in \mathbb{R}^+$). Như vậy đường cao và bán kính của khối trụ còn lại lần lượt là hk và rk. Ta tính được

Tổng chiều cao của cả hai là

$$h + hk = h(1+k)$$

Tổng diện tích toàn phần của cả hai là

$$2\pi r^2 + 2\pi rh + 2\pi r^2k^2 + 2\pi rhk^2 = 2\pi r(r+h)(1+k^2)$$

Tổng thể tích của cả hai là

$$\pi hr^2 + \pi hr^2k^3 = \pi hr^2(1+k^3)$$

Từ đó, ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} h(1+k) = 1 \\ 2\pi r(r+h)(1+k^2) = 8\pi \\ \pi hr^2(1+k^3) = 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = \dfrac{1}{1+k} \\ r(r+h)(1+k^2) = 4\,(1) \\ r^2(1-k+k^2) = 2 \quad (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (2), ta có: $r = \sqrt{\dfrac{2}{1-k+k^2}}$.

Thay tất cả vào phương trình (1), ta được:

$$\sqrt{\frac{2}{1-k+k^2}}\left(\sqrt{\frac{2}{1-k+k^2}}+\frac{1}{1+k}\right)(1+k^2)=4$$

Quy đồng hai vế, ta được

$$2(1+k)(1+k^2)+\sqrt{2(1-k+k^2)}(1+k^2)=4(1+k^3)$$

Đặt $a=\sqrt{2(1-k+k^2)}, b=1+k$ nên $a,b>0$. Ngoài ra, ta cũng có

$$1+k^2=\frac{a^2+b^2}{3} \text{ và } 1+k^3=\frac{a^2b}{2}.$$

Ta viết lại phương trình

$$\frac{2b(a^2+b^2)}{3}+\frac{a(a^2+b^2)}{3}=2a^2b \Leftrightarrow 2a^2b+2b^3+a^3+ab^2-6a^2b=0$$
$$\Leftrightarrow 2b^3+a^3+ab^2-4a^2b=0 \Leftrightarrow a(a^2+b^2-2ab)+2b(b^2-a^2)=0$$
$$\Leftrightarrow a(b-a)^2+2b(b-a)(b+a)=0 \Leftrightarrow (b-a)(ab-a^2+2b^2+2ab)=0$$
$$\Leftrightarrow b-a=0 \text{ hay } 3ab-a^2+2b^2=0$$

Để ý $a=\sqrt{2(1-k+k)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}(1-k)^2+\frac{1}{2}(1+k)^2}$. Theo bất đẳng thức Minkowski thì

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}k}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}k}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\le\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}k}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}k}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{-\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$
$$\Rightarrow a\le 2k+2=2b.$$

Suy ra $3ab-a^2+2b^2>0$. Như vậy chỉ còn trường hợp $a=b$, khi đó

$$\sqrt{2(1-k+k^2)}=k+1\Leftrightarrow k^2-4k+1=0.$$

Giải phương trình bậc 2 trên, ta được $k=2\pm\sqrt{3}$. Thế vào để tìm h,r, ta có hai cặp nghiệm

$$(h,r)\in\left\{\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6},\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right),\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)\right\}.$$

□

Nhận xét. *Đây thật chất lại một bài toán giải phương trình tương đối khó. Ngoài cách đặt ẩn phụ để có thể biến đổi đại số một cách thuận tiện như trên, ta còn có thể chuyển vế và bình phương để khai trừ đi dấu căn. Sau khi rút gọn, ta nhận được một phương trình đối xứng sau:*

$$k^6 - 3k^5 - 5k^4 + 10k^3 - 5k^2 - 3k + 1 = 0.$$

Ta có thể chia k^3 cho hai vế và đặt $t = k + \dfrac{1}{k}$ để giải quyết.

Bài toán 6. *Một con kiến Ada bắt đầu xuất phát tại điểm O trên mặt phẳng. Sau khi bắt đầu, mỗi phút nó chọn một hướng Bắc, Nam, Đông, Tay, và di chuyển $1m$ theo hướng đó. Sau khi kết thúc 2018 phút, nó nhận ra rằng nó đã quay trở lại đúng điểm O. Gọi n là số khả năng có thể để chuyến hành trình của con kiến thỏa mãn yêu cầu. Giá trị cao nhất của lũy thừa của 10 là ước của n là bao nhiêu?*

Lời giải. Gọi A là tổng số cách Ada có thể di chuyển.

Trước hết, nếu Ada di chuyển qua phía Đông x lần thì sau đó một lúc nào đó Ada cũng phải di chuyển qua phía Tây x lần. Như vậy số lần di chuyển qua phía Đông bằng số lần di chuyển qua phía Tây của Ada.

Tương tự thì số lần di chuyển qua phía Bắc cũng bằng số lần di chuyển qua phía Nam.

Gọi n là số lần di chuyển qua phía Tây, khi đó số lần di chuyển qua phía Nam sẽ là $1009 - n$. Với mỗi n cố định, ta có $2018!$ cách sắp xếp bước di chuyển. Ngoài ra, có $n!$ hoán vị các bước di chuyển phía Tây, $n!$ hoán vị di chuyển phí Đông, $(1009 - n)!$ hoán vị các bước di chuyển phía Bắc, $(1009 - n)!$ hoán vị các bước di chuyển phía Nam.

Tóm lại ta có $\dfrac{2018!}{n! \times n! \times (1009-n)! \times (1009-n)!} = \dfrac{2018!}{(n!)^2((1009-n)!)^2}$

Tổng cộng ta có

$$A = \sum_{n=0}^{1009} \frac{2018!}{(n!)^2((1009-n)!)^2} = \sum_{n=0}^{1009} \frac{2018!}{1009! \times 1009!} \times \frac{1009!}{n!(1009-n)!} \times \frac{1009!}{n!(1009-n)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{1009} \binom{2018}{1009} \binom{1009}{n} \binom{1009}{1009-n} = \binom{2018}{1009} \sum_{n=0}^{1009} \binom{1009}{n} \binom{1009}{1009-n}$$

Đến đây, ta xét đa thức $f(x) = (1+x)^{2018}$, ta có

$$f(x) = \sum_{i=0}^{2018} \binom{2018}{i} x^i$$

Ngoài ra

$$f(x) = (1+x)^{1009} \times (1+x)^{1009} = \sum_{i=0}^{2018} \sum_{j=0}^{i} \binom{1009}{j} \binom{1009}{i-j} x^i$$

Cân bằng hệ số của x^{1009}, ta được đẳng thức sau

$$\binom{2018}{1009} = \sum_{n=0}^{1009} \binom{1009}{n} \binom{1009}{1009-n}$$

Như vậy, ta có

$$A = \binom{2018}{1009}^2 = \left(\frac{2018!}{1009!^2}\right)^2$$

Đến đây, ta tìm số các chữ số 0 tận cùng của A bằng cách tìm số mũ cao nhất của 2 và 5 trong phân tích thành nhân tử của A.

Đặt $B = \sqrt{A}$, trước hết, ta tính số mũ cao nhất của 5 trong phân tích nhân tử của A.

Sử dụng hàm định giá, ta có

$$v_5(B) = v_5(2018!) - 2v_5(1009!)$$

Ta sử dụng bổ để sau

Bổ đề. *(Công thức Legendre) Với số tự nhiên n và số nguyên tố p, khi đó:*

$$v_p(n!) = \sum_{i=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$$

Việc chứng minh bổ đề trên khá đơn giản p dụng công thức trên, ta dễ dàng có số mũ cao nhất của 5 trong B là 2.

Ngoài ra:

$$\begin{aligned} B = \binom{2018}{1009} &= \binom{2017}{1009} + \binom{2017}{1008} \\ &= 2\binom{2017}{1009} = 2020\binom{2017}{1007} \end{aligned}$$

Do đó $4|B$ nên số chữ số 0 tận cùng của B là 2

Kết luận: số mũ cao nhất của 10 là ước của B là 4. □

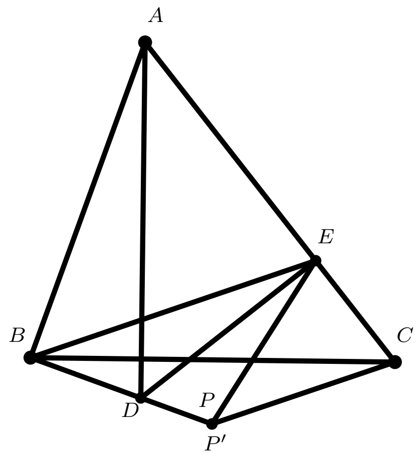
Nhận xét. *Bài 6 là bài toán khó nhất vòng 1 do áp lực thời gian và cũng phải tính toán nhiều. Điểm trung bình của bài 6 trên mọi thí sinh là $0,8/10$.*

3.2. Vòng 2

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC. Gọi L là đường thẳng qua B vuông góc với AB. Đường thẳng qua A vuông góc với BC cắt L tại điểm D. Đường trung trực của BC cắt L tại điểm P. Gọi E là hình chiếu của D lên AC.*

Chứng minh tam giác BPE là tam giác cân.

Lời giải. Gọi P' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BEC.



Biến đổi góc, ta có:

$$\angle P'BC = \frac{180^\circ - \angle BP'C}{2} = \frac{180^\circ - 2(180^\circ - \angle BEC)}{2}$$
$$= \angle BEC - 90^\circ = 90^\circ - \angle BEA$$

Ngoài ra, tứ giác $ABDE$ nội tiếp nên $\angle AEB = \angle ADB$

Suy ra $\angle AEB = \angle ABC$ và $\angle P'BC = \angle PBC$.

Từ đây ta được $P \equiv P'$ hay ΔPBC cân tại P.

□

Bài toán 2. *Với một số nguyên n, một tập hợp bao gồm n^2 quân cờ ma thuật được đặt lên một bàn cờ $n^2 \times n^2$ bao gồm n^4 ô vuông đơn vị. Tại một thời điểm, mỗi quân cờ di chuyển đến một ô mới sao cho khoảng cách giữa tâm ô vuông mới và với tâm ô cũ là n. Các quân cờ sẽ chiến thắng nếu trước và sau tín hiệu, không có các quân cờ nào trên cùng một hàng hoặc một cột.*

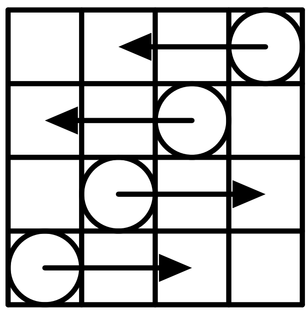
Với những giá trị nào của n, quân cờ có thể giành chiến thắng?

Lời giải. Ta xét hai trường hợp:

Với n chẵn: Ban đầu, ta đặt tất cả các quân cờ lên đường chéo. Tiếp theo, ta có thể di chuyển như sau:

- Với $\frac{n^2}{2}$ quân cờ ở trên cùng, ta có thể di chuyển qua bên trái mỗi quân n ô.
- Với $\frac{n^2}{2}$ quân cờ tiếp theo, ta có thể di chuyển qua bên phải mỗi quân n ô.

Một ví dụ cho $n = 2$:



Với n lẻ: Ta đánh số các hàng từ 1 đến n^2 theo thứ tự từ trên xuống dưới, và đánh số các cột từ 1 đến n^2 theo thứ tự từ trái qua phải. Với mỗi ô hàng i cột j, ta kí hiệu là ô (i, j).

Xét tổng $S = \sum i^2 + j^2$ với tất cả các ô chứa quân cờ ma thuật. Theo giả thiết, dễ thấy $S = 2\sum_{i=1}^{n^2} i^2$ là một số chẵn.

Với mỗi ô (i, j), sau một phép biến đổi thành ô $(i \pm a, j \pm b)$ thì S được viết lại thành:

$$S' = \sum \left((i \pm a)^2 + (j \pm b)^2\right) = \sum \left(i^2 + j^2 \pm 2ai \pm 2bj + a^2 + b^2\right)$$

$$= \sum \left(i^2 + j^2 \pm 2ai \pm 2bj + n^2\right) = S + \left(\sum \pm 2ai \pm 2bj\right) + n^3$$

Để ta thực hiện được yêu cầu đề bài, S' phải bằng S. Suy ra S' là một số chẵn. Tuy nhiên, S là một số chẵn, $\sum(\pm 2ai \pm 2bj)$ là một số chẵn và n^3 là một số lẻ, vô lý. Do đó, ta không thể thực hiện cho n lẻ.

Kết luận: mọi số n chẵn đều thực hiện được yêu cầu đề bài. □

Bài toán 3. *Cho số nguyên tố p lẻ. Hỏi có bao nhiêu tập hợp con khác rỗng của*

$$\{1, 2, 3, ..., p-2, p-1\}$$

có tổng các phần tử chia hết cho p?

Lời giải. Đặt $S = \{1, 2, ..., p-1\}$, $\wp(S)$ là tập hợp bao gồm các tập con của S, P là tập hợp con của S và thỏa mãn yêu cầu, T là tập hợp bao gồm các tập hợp P. Như vậy $|\wp(S)| = 2^{p-1}$.

Ta thiết lập ánh xạ $f : \wp(S) \to T$ như sau:

Với mỗi tập hợp $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$ có tổng là s, tồn tại số nguyên dương $0 \le r < p$ sao cho $s + mr$ chia hết cho p. Ta thiết lập $P = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ sao cho $b_i \in S$ và $b_i \equiv a_i + r \pmod p$

Như vậy, mỗi tập hợp thuộc $\wp(S)$, ta luôn chuyển về được một tập hợp P thỏa mãn đề bài. Tuy nhiên, với mỗi tập hợp P như vậy, ta lại có p cách tạo thành từ các tập hợp thuộc $\wp(S)$, trừ trường hợp $P = \emptyset$.

Do đó, số tập hợp thỏa mãn đề bài là $\dfrac{2^{p-1} - 1}{p}$.

□

Nhận xét. *Ở đây, ta có thể giải quyết bài toán bằng phương pháp hàm sinh dựa vào ý tưởng số phức như sau:*

Xét đa thức $f(x) = (1+x)(1+x^2)...(1+x^{p-1}) = a_0 + a_1x^1 + ... + a_{\frac{p(p-1)}{2}}x^{\frac{p(p-1)}{2}}$

Nhận thấy rằng với mỗi cách chọn một tập hợp con thỏa mãn đề bài sẽ tương ứng với 1 đơn vị trong tổng các hệ số chia hết cho p ở trong đa thức trên. Do đó, ta chuyển bài toán thành tính $A = \sum\limits_{p|t} a_t$. *Phần tính toán còn lại, bạn đọc có thể giải quyết dựa trên tính chất của nhóm cyclic.*

Bài toán 4. *Tìm tất cả các hàm số f từ tập hợp các số thực dương đến tập hợp các số thực dương sao cho $f(x) \le f(y)$ khi $x \le y$ và*

$$f(x^4) + f(x^2) + f(x) + f(1) = x^4 + x^2 + x + 1$$

với mọi $x > 0$.

Lời giải. Giả sử hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn $f(x) \le f(y)$ khi $x \le y$ và

$$f(x^4) + f(x^2) + f(x) + f(1) = x^4 + x^2 + x + 1$$

với mọi $x > 0$.

Thế $x = 1$, dễ thấy $f(1) = 1$. Ta viết lại phương trình

$$f(x^4) + f(x^2) + f(x) = x^4 + x^2 + x \, \forall x > 0 \text{ (*)}$$

Thế $x = x^2$ vào (*), ta có

$$f(x^8) + f(x^4) + f(x^2) = x^8 + x^4 + x^2 \, \forall x > 0$$

Từ đây suy ra $f(x^8) - x^8 = f(x) - x\, \forall x > 0$. Dễ thấy:

$$f\left(x^{8^k}\right) - x^{8^k} = f\left(x^{8^{k-1}}\right) - x^{8^{k-1}} = \dots = f(x) - x$$

$$= \dots = f\left(x^{8^{-k}}\right) - x^{8^{-k}}\ \forall x > 0, k \in \mathbb{N}$$

Với $x < 1$, ta có:

$$f(x) - x \leq f(1) - x^{8^k} = 1 - x^{8^k} \forall 0 < x < 1, k \in \mathbb{Z}$$

Cho $k \to -\infty$, ta có:

$$\lim_{k \to -\infty} x^{8^k} = \lim_{k \to +\infty} x^{\frac{8}{k}} = x^0 = 1$$

Suy ra $f(x) \leq x\, \forall 0 < x < 1$. Khi đó

$$f(x^4) + f(x^2) + f(x) \leq x^4 + x^2 + x \forall 0 < x < 1$$

Do đó $f(x) = x$ với mọi $0 < x < 1$.

Tương tự với $x \geq 1$, ta cũng được $f(x) = x$.

Kết luận, $f(x) = x$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

□

4. Lời kết

Nếu so sánh với các đề thi học sinh giỏi quốc gia ở Việt Nam (VMO, TST) thì các bài toán trên khá "nhẹ nhàng" về kỹ thuật, đặc biệt là phần hình học. Tuy nhiên, các bài toán trên lại yêu cầu nhiều ý tưởng độc đáo và khả năng biến đổi đại số cao. Đây cũng là xu hướng của đa số các kì thi ở phương tây trong thời gian gần đây.

Tài liệu

[1] https://www.ukmt.org.uk

[2] https://bmos.ukmt.org.uk

HỌC ĐẾM NHƯ THẾ NÀO?

Vũ Hồng Sơn
(Giáo viên THPT Chuyên Hùng Vương)

1. Lời giới thiệu

Trong toán học, mỗi bài toán hình học, số học, đại số ... đều có những vẻ đẹp riêng. Nhưng với cá nhân tác giả, các bài toán tổ hợp, đặc biệt là bài toán đếm có một vẻ đẹp rất đặc biệt. Bạn có tìm được ở đâu những bài toán có phát biểu đơn giản, dễ nhớ như thế? Bạn có tìm được ở đâu các bài toán mà có thể cả lớp đều làm được, nhưng mỗi bạn lại ra một kết quả khác nhau? Và hẳn bạn sẽ cảm thấy vô cùng sung sướng khi mình là người duy nhất trong lớp ra đáp số đúng? Nó là một cảm xúc rất khác biệt so với khi mình bạn giải được một bài toán.

Mỗi khi nghĩ ra lời giải cho một bài toán, đặc biệt là các bài toán đơn giản nhất; thông thường tôi ít khi cho phép mình được cảm thấy thỏa mãn. Tôi luôn có một câu hỏi đặt ra trong đầu là:

1. Lời giải này có thể dử dụng cho các bài toán khác hay không? Mình có thể sáng tạo ra các bài toán gần giống bài toán cũ mà không thể sử dụng lời giải trên hay không?
2. Nếu suy nghĩ theo hướng khác có thể có những lời giải khác hay không?
3. Nếu tổng quát hóa bài toán, cách giải cũ còn dùng được không? Liệu có cách giải mới tốt hơn.

Ba phần của chuyên đề "Học đếm như thế nào" sẽ cùng bạn đi theo ba câu hỏi trên.

2. Sáng tạo các bài toán tương tự

Chúng ta hãy đến với ví dụ đầu tiên.

Ví dụ 1. Từ các chữ số $1, 2, 3$; hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 10 chữ số.

Lời giải. Đây là một bài toán sử dụng quy tắc nhân cơ bản. Xét một số có 10 chữ số bất kì $\overline{a_1a_2...a_{10}}$. Khi đó:

1. Có 3 cách chọn a_1 là 1, 2 hoặc 3.

2. Có 3 cách chọn a_2 là 1, 2 hoặc 3.

3. ...

4. Có 3 cách chọn a_{10} là 1, 2 hoặc 3.

Theo quy tắc nhân, có tất có 3^{10} cách chọn số $\overline{a_1a_2...a_{10}}$. Vậy có tất cả 3^{10} số thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Nếu chúng ta thay đổi giả thiết đi một chút, nghĩa là thêm một số yêu cầu cho số $\overline{a_1a_2...a_{10}}$ cần tìm, chúng ta có thể thu được hàng loạt bài toán.

Ví dụ 2. Từ các chữ số $1, 2, 3$; hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có 10 chữ số.

Đáp số. 2.3^9. □

Ví dụ 3. Từ các chữ số $1, 2, 3$; hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 10 chữ số mà hai chữ số kề nhau bất kì khác nhau.

Lời giải. Xét một số có 10 chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán $\overline{a_1a_2...a_{10}}$. Khi đó:

1. Có 3 cách chọn a_1 là 1, 2 hoặc 3.

2. Có 2 cách chọn a_2 do a_2 khác a_1.

3. ...

4. Có 2 cách chọn a_{10} do a_{10} khác a_9.

Theo quy tắc nhân, có tất có 3.2^9 cách chọn số $\overline{a_1a_2...a_{10}}$. Vậy có tất cả 3.2^9 số thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Ví dụ 4. Từ các chữ số $1, 2, 3$; hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có 10 chữ số mà hai chữ số kề nhau bất kì khác nhau.

Nhận xét. *Xét một số có 10 chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán $\overline{a_1a_2...a_{10}}$. Nếu vẫn đếm một cách thông thường như trước, ta có:*

1. *Có 3 cách chọn a_1 là 1, 2 hoặc 3.*

2. *Có 2 cách chọn a_2 do a_2 khác a_1.*

3. ...

4. *Có 2 cách chọn a_9 do a_9 khác a_8.*

Có bao nhiêu cách chọn a_{10}?

Ta thấy ngay a_{10} phải thỏa mãn hai điều kiện đồng thời: vừa phải là số lẻ, vừa phải khác a_9. Như vậy nếu $a_9 = 2$ sẽ có 2 cách chọn a_{10}; nhưng nếu $a_9 = 1$ hoặc $a_9 = 3$ thì chỉ có duy nhất một cách chọn a_{10}. Như vậy ta không thể sử dụng quy tắc nhân trong trường hợp này. Vậy phải giải quyết như thế nào? Ta thấy a_{10} thì bị điều kiện ràng buộc, tuy nhiên a_1 lại không có điều kiện ràng buộc gì. Như vậy chỉ cần đếm ngược lại từ phía a_{10}, ta dễ dàng tìm ra lời giải.

Lời giải. Xét một số có 10 chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán $\overline{a_1a_2...a_{10}}$. Khi đó:

1. Có 2 cách chọn a_{10} là 1 hoặc 3.
2. Có 2 cách chọn a_9 do a_9 khác a_{10}.
3. ...
4. Có 2 cách chọn a_1 do a_1 khác a_2.

Theo quy tắc nhân, có tất có 2^{10} cách chọn số $\overline{a_1a_2...a_{10}}$.
Vậy có tất cả 2^{10} số thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Nhận xét. *Ta nhận thấy nếu đếm từ đầu tới đuôi mà vướng thì đếm ngược từ đuôi lên đầu. Vậy nếu ở đầu cũng vướng thì phải đếm như thế nào? Ta sẽ nghĩ ra bài toán mà phương án đếm từ đuôi lên đầu cũng không sử dụng được nữa. Hay nói cách khác, ta phải thêm điều kiện cho a_1. Cách đơn giản nhất là gì? Đó là a_1 phải khác 0. Ta có bài toán sau.*

Ví dụ 5. Từ các chữ số $0, 1, 2, 3$; hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có 10 chữ số mà hai chữ số kề nhau bất kì khác nhau.

Đếm từ đầu đến đuôi không được, từ đuôi lên đầu cũng không xong, vậy phải đếm như thế nào? Nếu bạn để ý thấy rằng số 10 trong bài toán trên là không hề quan trọng, ta hoàn toán có thể tổng quát cho n. Khi đó ta có thể nghĩ đến phương án truy hồi.

Lời giải. Ta xét bài toán tổng quát: Từ các chữ số $0, 1, 2, 3$; hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có n chữ số mà hai chữ số kề nhau bất kì khác nhau.
Kí hiệu f_n là số cần tìm. Xét $n \geq 4$. Gọi $\overline{a_1a_2...a_n}$ là số có n chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó ta thấy a_n phải là số lẻ và a_1 phải khác 0. Ta xét hai trường hợp

1. $a_2 = 0$. Khi đó có 3 cách chọn a_1 là $1, 2, 3$. Do $a_3 \neq a_2 = 0$ nên $\overline{a_3a_4...a_n}$ tạo thành một số có $n-2$ chữ số lẻ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó có f_{n-2} cách chọn số $\overline{a_3a_4...a_n}$.
2. $a_2 \neq 0$. Khi đó có 2 cách chọn a_1 là 2 số thuộc tập $\{1, 2, 3\}$ và khác a_2. Hơn nữa $\overline{a_2a_3...a_n}$ tạo thành một số có $n-1$ chữ số lẻ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó có f_{n-1} cách chọn số $\overline{a_2a_3...a_n}$.

Theo quy tắc cộng và quy tắc nhân, ta có

$$f_n = 2f_{n-1} + 3f_{n-2} \quad \forall n \geq 4.$$

Dễ dàng tính được $f_1 = 2$, $f_2 = 4$, $f_3 = 14$. Sử dụng các kiến thức cơ bản về dãy số, ta có

$$f_n = \frac{1}{2}\left(3^n - (-1)^n\right).$$

Vậy $f_{10} = 29524$. □

Tương tự như trên, ta có thể sáng tạo ra hàng loạt bài toán. Và chắc chắn, sẽ không có một phương pháp chung có các bài toán này.

Ví dụ 6. Từ các chữ số $1, 2, 3$; hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 10 chữ số thỏa mãn:

1. Là số chẵn.
2. Là số chia hết cho ba.
3. Là số chẵn chia hết cho ba.
4. Không có hai chữ số 2 nào kề nhau.
5. Hai chữ số kề nhau bất kì khác nhau.
6. Xuất hiện đủ cả 3 chữ số 1, 2, 3.
7. Xuất hiện đủ cả 3 chữ số 1, 2, 3 và chia hết cho 3.
8. Số chữ số 1 lớn hơn số chữ số 2.
9. Chữ số 1 và 2 không đứng cạnh nhau.
10. Hai chữ số kề nhau hơn kém nhau 1 đơn vị.

3. Nhiều cách giải cho một bài toán

Với những bài toán cơ bản, nhiều bạn có thói quen giải được là bỏ qua. Nhiều bạn thậm chí có thể coi bài dễ không thèm làm. Tuy nhiên với một bài toán cơ bản, nhưng nếu tập cho mình thói quen suy nghĩ theo nhiều hướng khác nhau, các bạn có thể thu được những lợi ích sau:

1. Biết được phương án nào tốt, phương án nào không tốt với những dạng bài khác nhau, từ đó dần hình thành kinh nghiệm, phản xạ với các dạng bài tập khác nhau.
2. Ôn tập đồng thời nhiều kiến thức đã học. Từ đó có được nền tảng kiến thức vững chắc.
3. Khi kết hợp nhiều phương pháp khác nhau, biết đâu bạn có thể thu được nhiều điều thú vị.

Sau đây là một ví dụ như vậy.

Ví dụ 7. (2.18 SBT Đại số và giải tích 11 nâng cao Trang 63).
Cho tập hợp $S_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ trong đó n là số nguyên dương lớn hơn 1. Hỏi có bao nhiêu cặp sắp thứ tự (x, y) thỏa mãn $x, y \in S_n$ và $x \leq y$.

Lời giải. **Cách 1.**
Ta xét hai trường hợp

1. Nếu $x = y$ thì có n cặp sắp thứ tự tự (x, y) thỏa mãn.

2. Nếu $x < y$ thì có C_n^2 cặp sắp thứ tự tự (x, y) thỏa mãn. (Vì chọn 2 số bất kì trong tập hợp S_n luôn có một số lớn hơn, một số bé hơn. Sắp thứ tự của chúng ta được cặp sắp thức tự (x, y) thỏa mãn).

Áp dụng quy tắc cộng ta có kết quả là

$$C_n^2 + n = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2} = C_{n+1}^2.$$

Cách 2. Đặt $A = \{(x, y) \, | x, y \in S_n, x \leq y\}$; ta cần tính $|A|$.
Giờ ta để ý, nếu ta chọn y trước, khi đó do $x \leq y$ nên x có y cách chọn. Cho y chạy từ 1 một tới n, ta có $|A| = \sum\limits_{y=1}^{n} y$.
Sử dụng kết quả quen thuộc của đại số ta có:

$$|A| = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Cách 3. Đặt $A = \{(x, y) \, | x, y \in S_n, x \leq y\}$; $B = \{(x, y) \, | x, y \in S_{n+1}, x < y\}$. Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} f \, : \, & A \to B \\ & (x, y) \mapsto (x, y+1) \, . \end{aligned}$$

Dễ thấy là song ánh. Mặt khác ta thấy số phần tử của tập B chính là số tập con có hai phần tử của S_{n+1}. Khi đó ta có $|B| = C_{n+1}^2$.
Vậy $|A| = |B| = C_{n+1}^2$. □

Nhận xét. *Chúng ta cùng xem xét lại cả ba cách giải trên.*

1. *Cách 1 và cách 2 khá tự nhiên. Khi chúng tôi cho học sinh làm thử bài toán này, đa số các bạn đều làm theo một trong hai cách trên.*

2. *Cách 3 nó được tôi nghĩ đến sau khi ra được kết quả ở cách 1 và cách 2. Từ kết quả C_{n+1}^2, một cách tự nhiên ta thấy rằng đây chính là số các tập con có hai phần tử của tập $S_{n+1} = \{1, 2, \ldots, n+1\}$. Tuy cách song ánh được nghĩ ra "sau khi" có kết quả; nhưng nó cũng giúp các bạn rèn luyện cách thiết lập các song ánh. Một phần khó nhất trong phép đếm.*

3. *Từ kết quả C_{n+1}^2 ở cách 3 và nếu cách 2 chúng ta dừng lại ở $|A| = 1 + 2 + 3 + ... + n$. Ta có thể coi như chúng ta đã chứng minh được đẳng thức*

$$1 + 2 + 3 + ... + n = C_{n+1}^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

bằng phương pháp "Đếm hai cách".

4. *Cách 3 tuy là khó nhất, nhưng nó cũng là cơ sở để ta có thể phát triển bài toán ra thêm nhiều bài toán tương tự khác; cũng như từ đó ta có thêm một cách chứng minh các đẳng thức đại số theo phương pháp "Đếm hai cách".*

Sau đây là một số mở rộng của bài toán 7.

Ví dụ 8. Cho tập hợp $S_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ trong đó n là số nguyên dương lớn hơn 1. Hỏi có bao nhiêu cặp sắp thứ tự (x, y, z) thỏa mãn $x, y, z \in S_n$ và $x \leq y \leq z$.

Ví dụ 9. Cho tập hợp $S_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ trong đó n là số nguyên dương lớn hơn 1. Hỏi có bao nhiêu cặp sắp thứ tự (x, y, z) thỏa mãn $x, y, z \in S_n$ và $x, y \leq z$.

Ví dụ 10. Cho tập hợp $S_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ trong đó n là số nguyên dương lớn hơn 1.

1. Hỏi có bao nhiêu cặp sắp thứ tự (x, y, z, t) thỏa mãn $x, y, z, t \in S_n$ và $x, y, z \leq t$.
2. Hỏi có bao nhiêu cặp sắp thứ tự (x, y, z, t) thỏa mãn $x, y, z, t \in S_n$ và $x \leq y$ và $z \leq t$.

Ví dụ 11.

1. Có bao nhiêu bộ sắp thứ tự (m, n) sao cho $m \backslash n$ và $n \backslash 2^{2019}$.
2. Có bao nhiêu bộ sắp thứ tự $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sao cho $a_1 \backslash a_{i+1}$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n-1$ và $a_n \backslash 2^{2019}$.
3. Có bao nhiêu bộ sắp thứ tự $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sao cho $a_1 \backslash a_{i+1}$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n-1$ và $a_n \backslash 10^{2019}$.

4. Tổng quát hóa các bài toán đơn giản

Ví dụ 12. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B, 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho mỗi lớp có ít nhất 1 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

Thông thường, đa số các bạn sẽ làm ví dụ **??** bằng phương pháp liệt kê hay lập bảng. Tuy nhiên phương án đấy chắc chắn sẽ không phù hợp khi chúng ta tổng quát hóa bài toán một cách rất tự nhiên như sau

Ví dụ 13. Cho m, n, p, k là các số nguyên dương ($k \geq 3$). Có m bạn học sinh lớp A, n học sinh lớp B, p học sinh lớp C. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra k học sinh sao mỗi lớp có ít nhất một bạn học sinh được chọn.

Đáp số.
$$C_{m+n+p}^k - C_{m+n}^k - C_{n+p}^k - C_{p+m}^k + C_m^k + C_n^k + C_p^k.$$
(Chúng ta quy ước $C_n^k = 0$ nếu $k > n$.) □

Ví dụ 14. Có bao nhiêu số tự nhiên có dạng $\overline{abcd}$, trong đó $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 9$.

Ngoài phương pháp liệt kê, chúng tôi xin trình bày thêm hai cách giải khác sử dụng song ánh.

Hướng dẫn. Cách 1
Gọi A là tập số tự nhiên có dạng $\overline{abcd}$, trong đó $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 9$. Ta đặt
$$B = \left\{(x; y; z; t) \in \mathbb{N}^4 | 1 \leq x < y < z < t \leq 12\right\}.$$
Khi đó ta có song ánh
$$\begin{aligned} &f : A \to B \\ &\overline{abcd} \mapsto (x; y; z; t) = (a; b+1; c+2; d+3). \end{aligned}$$
Mặt khác dễ dàng tính được số phần tử của B là C_{12}^4. Vậy $|A| = C_{12}^4$.
Đáp số C_{12}^4. □

Hướng dẫn. Cách 2
Gọi A là tập số tự nhiên có dạng $\overline{abcd}$; trong đó $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 9$. Ta đặt
$$C = \left\{(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) \in \mathbb{N}^5 | x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8\right\}.$$
Khi đó ta có song ánh
$$\begin{aligned} &f : A \to C \\ &\overline{abcd} \mapsto (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) = (a-1; b-a; c-b; d-c; 9-d). \end{aligned}$$
Sử dụng kết quả bài toán chia kẹo Euler. dễ dàng tính được số phần tử của C là C_{12}^4. Vậy $|A| = C_{12}^4$.
Đáp số C_{12}^4. □

Từ hai cách trên, các bạn có thể dễ dàng làm được bài toán tổng quát sau

Ví dụ 15. Cho số nguyên dương n. Có bao nhiêu số tự nhiên có n chữ số $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ thỏa mãn $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq 9$.

Đáp số. C_{8+n}^n. □

MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỌN LỌC VỀ SỐ HỌC TỔ HỢP

Huỳnh Kim Linh
(Giáo viên THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Khánh Hòa)

Có thể nói các bài toán số học tổ hợp là những bài toán hay và khó nhất trong Tổ hợp, bởi vì nó là sự kết hợp tinh tế giữa cả hai phân môn. Nó đòi hỏi chúng ta không chỉ khéo léo trong việc sử dụng những suy luận logic mà còn phải hiểu về số học. Những ý tưởng hay được sử dụng thông thường hay bắt nguồn từ: tính chia hết, số chính phương, ước chung lớn nhất (gcd) và bội chung nhỏ nhất (lcm), các phương trình Diophante và đặc biệt là hệ thặng dư và số nguyên tố.

Bài toán 1. *(IMO Shortlist 2001) Có tồn tại hay không 100 số nguyên dương không lớn hơn 25000 thỏa mãn : tất cả các tổng hai số trong chúng là các số phân biệt, tức là không có bốn số nào trong chúng mà tổng hai số này bằng tổng hai số kia.*

Lời giải. Câu trả lời là tồn tại. Để chứng minh bài toán, ta xét bổ đề sau

Với số nguyên tố p lẻ tùy ý, thì tồn tại p số nguyên dương phân biệt không lớn hơn $2p^2$ thỏa mãn: không có bốn số nào trong chúng mà tổng hai số này bằng tổng hai số kia.

Chứng minh. Xét tập các số $S = \left\{ f(n) = 2pn + (n^2); n = \overline{0; p-1} \right\}$ trong đó, ký hiệu (n^2) là số dư của n^2 khi chia cho p.

Suy ra $|S| = p; (n^2) \in \{0; 1; 2; ...; p-1\}$. Ta chứng minh tập S này thỏa mãn bổ đề.

1. Với mọi $f(n) \in S$ thì
$$f(n) = 2pn + \left(n^2\right) \leq 2p(p-1) + (p-1) = 2.\left(p^2 - 1\right) < 2p^2.$$

2. Xét bốn số $m; n; a; b$ thỏa mãn :$f(m) + f(n) = f(a) + f(b)$ ta có
$$\left[2pm + \left(m^2\right)\right] + \left[2pn + \left(n^2\right)\right] = \left[2pa + \left(a^2\right)\right] + \left[2pb + \left(b^2\right)\right]$$
$$\rightarrow \left[\frac{2pm + (m^2)}{2p}\right] + \left[\frac{2pn + (n^2)}{2p}\right] = \left[\frac{2pa + (a^2)}{2p}\right] + \left[\frac{2pb + (b^2)}{2p}\right]$$

Mà ta có $\left[\frac{2px+\left(x^2\right)}{2p}\right] = x$ vì $0 \leq (x^2) \leq p-1$, suy ra

$$m + n = a + b \to m + n \equiv a + b \,(\text{mod} p)$$

Từ đó ta được

$$\left(m^2\right) + \left(n^2\right) = \left(a^2\right) + \left(b^2\right) \to m^2 + n^2 \equiv a^2 + b^2 \,(\text{mod} p)\,(2)$$

Do $m; n; a; b \in \{0; 1; ...; p-1\}$ nên từ (1) và (2) ta suy ra $\{m; n\} = \{a; b\}$. Điều đó , chứng tỏ rằng

$$\forall\,(m; n) \neq (a; b) \to f\,(m) + f\,(n) \neq f\,(a) + f\,(b)\,.$$

Vậy tập S thỏa mãn bổ đề. □

Áp dụng bổ đề với $p = 101$, ta sẽ chọn được 101 số nguyên dương nhỏ hơn

$$2 \cdot 101^2 < 25000$$

thỏa mãn giả thiết đã cho của đề bài. Vậy bài toán được chứng minh xong. □

Bài toán 2. *(Vietnam TST 2002) Cho số nguyên dương m có một ước nguyên tố lớn hơn $\sqrt{2m+1}$. Hãy tìm số nguyên dương M nhỏ nhất sao cho tồn tại một tập hợp gồm hữu hạn só nguyên dương đôi một khác nhau thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

i) m và M tương ứng là số nhỏ nhất và số lớn nhất trong T.

ii) Tích tất cả các số thuộc T là một số chính phương.

Lời giải. Dễ thấy, nếu gọi p là ước nguyên tố lớn hơn $\sqrt{2m+1}$ thì p là duy nhất và $p > 3$. Xét số nguyên dương M mà đối với nó tồn tại tập $T = \{x_1 = m, x_2, \ldots, x_k = M\}$ thỏa mãn các điều kiện của đề bài. Ta sẽ chứng minh rằng $M \geq m + p$. Thật vậy,

Vì $p\sqrt{2}m{+}1$ nên p có số mũ là 1 trong phân tích chuẩn của m. Do đó từ giả thiết tích $x_1x_2\ldots x_k$ là số chính phương suy ra trong các số $x_2, \ldots, x_k$ phải có ít nhất một số là bội của p. Vì vậy $M = x_k \geq m + p$.

Với $M = m + p$, xét tập hợp

$$A = \left\{m; \frac{m(p+1)}{p}; \frac{(2m+p)(p-1)}{2p}; \frac{(2m+p)(p+1)}{2p}; \frac{(m+p)(p-1)}{p}; m+p\right\}.$$

Dễ thấy rằng tất cả phần tử trong tập hợp này đều nguyên dương và phần tử nhỏ nhất là m, phần tử lớn nhất là $m + p$. Tích tất cả các phần tử thuộc A là

$$\frac{m^2(p-1)^2(p+1)^2(m+p)^2(2m+p)^2}{4p^4}$$

là số chính phương. Hơn nữa, nếu trong 4 số

$$\frac{m(p+1)}{p};\frac{(2m+p)(p-1)}{2p};\frac{(2m+p)(p+1)}{2p};\frac{(m+p)(p-1)}{p}$$

có hai số trùng nhau thì khi bỏ chúng đi, tập hợp còn lại vẫn thỏa mãn. Từ đó ta thấy rằng $M = m + p$ thỏa mãn đề bài là tồn tại tập hợp T tương ứng. Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm của M là $m + p$. □

Bài toán 3. *(China TST 2012) Cho số nguyên dương $n \geq 4$ và tập hợp : $A; B \subseteq \{1; 2; 3; ....; n\}$ thỏa mãn điều kiện: Với mọi $a \in A; b \in B$ thì $ab + 1$ là số chính phương. Chứng minh rằng* $\min\{|A|;|B|\} \leq \log_2 n$.

Lời giải. Trước hết, để chứng minh bài toán , ta sẽ chứng minh bổ đề sau

Với hai tập $A; B$ thỏa mãn đề bài, nếu a, x là hai số nguyên dương thuộc tập A và $a < x$; còn b, y là hai số nguyên dương thuộc tập B và $b < y$ thì ta luôn có $xy > 4ab$.

Chứng minh. Ta thấy rằng

$$\begin{aligned}
&(x-a)(y-b) > 0\\
&\to (xy+1)(ab+1) > (xb+1)(ya+1)\\
&\to \sqrt{(xy+1)(ab+1)} > \sqrt{(xb+1)(ya+1)}
\end{aligned}$$

Do giả thiết bài toán ta suy ra

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(xy+1)(ab+1)} \geq \sqrt{(xb+1)(ya+1)} + 1\\
&\to (xy+1)(ab+1) \geq \left[\sqrt{(xb+1)(ya+1)} + 1\right]^2\\
&\to xy + ab \geq xb + ya + 2\sqrt{(xb+1)(ya+1)} + 1\\
&\to xy + ab > xb + ya + 2\sqrt{xbya} > ab + 0 + 2\sqrt{xyab}\\
&\to xy > 2\sqrt{xyab} \to xy > 4ab
\end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh. □

Trở lại bài toán, ta có : $A = \{a_1; a_2; ...; a_u\}; B = \{b_1; b_2; ...; b_v\}$ với $a_1 < a_2 < ... < a_u; b_1 < b_2 < ... < b_v$ và không mất tổng quát ta giả sử $u \leq v$. Theo giả thiết suy ra $a_1b_1 + 1$là số chính phương. Nếu $a_1b_1 \geq 4$ thì theo bổ đề ta có $a_2b_2 > 4a_1b_1 \geq 4^2$. Ngược lại, nếu $a_1b_1 < 4 \to a_1b_1 + 1 = 4$ khi đó , từ ba số $a_1b_2 + 1; a_2b_1 + 1; a_2b_2 + 1$ đều là số chính phương lớn hơn 4, đồng thời $a_2b_2 + 1$ là số lớn hơn hẳn hai số $a_1b_2 + 1; a_2b_1 + 1$ nên $a_2b_2 + 1 \geq 16$. Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{aligned}
&a_1b_1 + 1 = 4; a_2b_1 + 1 = a_1b_2 + 1 = 9; a_2b_2 + 1 = 16\\
&\to a_1b_1 = 3; a_2b_1 = a_1b_2 = 8; a_2b_2 = 15
\end{aligned}$$

Hệ này vô nghiệm nên dấu bằng không xảy ra , do đó,

$$a_2b_2 + 1 > 16 \to a_2b_2 + 1 \geq 25 \to a_2b_2 > 4^2.$$

Như vậy ta luôn có $a_2b_2 > 4^2$. Khi đó , áp dụng bổ đề ta có

$$n^2 \geq a_u b_u > 4.a_{u-1}b_{u-1} > 4^2.a_{u-2}b_{u-2} > ... > 4^{u-2}.a_2b_2 > 4^u$$
$$\to n > 2^u \to u < \log_2 n.$$

Vậy bài toán được chứng minh. □

Bài toán 4. *(Vietnam TST 2004) Xét tập hợp S gồm 2004 số nguyên dương phân biệt $a_1, ..., a_{2004}$ có tính chất: Nếu với mỗi $i = 1, 2, 3..., 2004$, ta ký hiệu $f(a_i)$ là số các số thực thuộc S nguyên tố cùng nhau với a_i thì $d(a_i) < 2003$ và $f(a_i) = f(a_j)$ với mọi $i, j \in \{1, 2, 3, ..., 2004\}$. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho trong mỗi k – tập con của một tập S tuỳ ý có tính chất nêu trên đều tồn tại hai số phân biệt mà ước số chung lớn nhất của chúng khác 1.*
(k - tập con là tập con có k phần tử).

Lời giải. Xét tập hợp

$$S_0 = \{p_1, p_2, p_3, ..., p_{1001}, p_{1002}, p_1p_{1003}, p_2p_{1004}, ..., p_{1001}p_{2003}, p_{1002}p_{2004}\}$$

trong đó $p_1, p_2, p_3, ..., p_{2004}$ là các số nguyên tố đôi một khác nhau. Dễ thấy rằng tập hợp này thỏa mãn đề bài. Hơn nữa, trong 1002-tập con $\{p_1, p_2, p_3, ..., p_{1002}\}$ của tập hợp đã cho, không có hai phần tử nào mà ước chung của chúng khác 1. Suy ra $k \geq 1003$.

Xét một tập hợp S tùy ý thỏa mãn các điều kiện đề bài. Với mỗi $s \in S$, ta gọi $g(s)$ là số các số không nguyên tố cùng nhau với s. Từ giả thiết đã cho, ta có $g(s) \geq 1, \forall s \in S$ và $g(s) = g(t)$ với mọi $s, t \in S$ hay $g(s) = m, \forall s \in S$ với m là một số nguyên dương nào đó.

Xét một 1003-tập con T tùy ý của S. Ta sẽ chứng minh rằng trong T, luôn tồn tại hai số mà ước chung lớn nhất của chúng lớn hơn 1.

Thật vậy, giả sử ngược lại rằng trong T, không tồn tại hai số nào mà ước chung lớn nhất của chúng khác 1. Kí hiệu $A = \{a \in S | \exists t \in T, (a, t) \neq 1\}$, ta có $A \cap T = \varnothing$. Từ đó suy ra $|A| \leq 2004 - 1003 = 1001$. Mặt khác, số số thuộc S (kể cả lặp) mà mỗi số đều không nguyên tố cùng nhau với ít nhất một số thuộc T là $1003m$ và mỗi số có tính lặp tối đa m lần nên

$$|A| \geq \frac{1003m}{m} = 1003.$$

Mâu thuẫn này cho ta đpcm. Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm của k là 1003. □

Bài toán 5. *(China TST 2007) Cho n là số nguyên dương và tập hợp $A \subseteq \{1; 2; ...; n\}$ thỏa mãn $\forall a; b \in A$: lcm $(a; b) \leq n$. Chứng minh rằng $|A| \leq 1,9\sqrt{n} + 5$.*

Lời giải. Xét $a \in \left(\sqrt{n}; \sqrt{2n}\right]$, ta có

$$\text{lcm}\,(a; a+1) = a\,(a+1) > \sqrt{n}\left(\sqrt{n} + 1\right) > n.$$

Do đó , trên $\left(\sqrt{n}; \sqrt{2n}\right]$ ta phân hoạch thành cặp hai số liên tiếp thì A chỉ chứa không quá một số trong một cặp. Do đó , ta có

$$\left|A \cap \left(\sqrt{n}; \sqrt{2n}\right]\right| \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{2n} - \sqrt{n}\right) + 1$$

Xét $a \in \left(\sqrt{2n}; \sqrt{3n}\right]$, ta có

$$\begin{cases} \text{lcm}\,(a; a+1) = a\,(a+1) > n \\ \text{lcm}\,(a+1; a+2) = (a+1)\,(a+2) > n \\ \text{lcm}\,(a; a+2) \geq \dfrac{a\,(a+2)}{2} > \dfrac{\sqrt{2n}\left(\sqrt{2n}+2\right)}{2} > n \end{cases}$$

Do đó, trên $\left(\sqrt{2n}; \sqrt{3n}\right]$, ta phân hoạch thành các bộ ba số liên tiếp thì A chỉ chứa không quá một số trong bộ ba số. Do đó , ta có

$$\left|A \cap \left(\sqrt{2n}; \sqrt{3n}\right]\right| \leq \frac{1}{3}\left(\sqrt{3n} - \sqrt{2n}\right) + 1.$$

Xét $a \in \left(\sqrt{3n}; \sqrt{4n}\right]$, ta phân hoạch thành các bộ bốn số liên tiếp và hoàn toàn tương tự A chứa không quá một số trong mỗi bộ bốn số đó , ta có

$$\left|A \cap \left(\sqrt{3n}; \sqrt{4n}\right]\right| \leq \frac{1}{4}\left(\sqrt{4n} - \sqrt{3n}\right) + 1$$

Từ các điều trên, ta suy ra

$$\left|A \cap \left[1; 2\sqrt{n}\right]\right| \leq \sqrt{n} + \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{2n} - \sqrt{n}\right) + 1\right] + \left[\frac{1}{3}\left(\sqrt{3n} - \sqrt{2n}\right) + 1\right] + \left[\frac{1}{4}\left(\sqrt{4n} - \sqrt{3n}\right) + 1\right]$$

$$\rightarrow \left|A \cap \left[1; 2\sqrt{n}\right]\right| \leq \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right)\sqrt{n} + 3$$

Xét trên $(2\sqrt{n}; n]$ta phân hoạch thành các khoảng $\left(\frac{n}{k+1}; \frac{n}{k}\right]$; $k \in N^*$. Khi đó , ta có :

$$a; b \in \left(\frac{n}{k+1}; \frac{n}{k}\right]; a < b; d = \text{gcd}\,(a; b)$$

$$\rightarrow \text{lcm}\,(a; b) = \left(\frac{a}{d}\right)\left(\frac{b}{d}\right)d = \frac{ab}{d} \geq \frac{ab}{a-b} = b + \frac{b^2}{a-b} > b + \frac{b^2}{\frac{n}{k} - b}$$

$$\rightarrow \text{lcm}\,(a; b) > \frac{n}{k+1} + \frac{\left(\frac{n}{k+1}\right)^2}{\frac{n}{k} - \frac{n}{k+1}} = n \rightarrow \text{lcm}\,(a; b) > n$$

Điều đó , chứng tỏ rằng trên $\left(\frac{n}{k+1}; \frac{n}{k}\right]$; $k \in \mathbb{N}^*$ chứa nhiều nhất một phần tử của A. Do đó, với số $x \in N^*$ thỏa mãn $\frac{n}{x+1} \leq 2\sqrt{n} < \frac{n}{x} \rightarrow x < \frac{1}{2}\sqrt{n}$ thì ta có

$$\left|A \cap \left(2\sqrt{n}; n\right]\right| \leq \sum_{k=1}^{x}\left|A \cap \left(\frac{n}{k+1}; \frac{n}{k}\right]\right| \leq x < \frac{1}{2}\sqrt{n}.$$

Do đó, ta có

$$|A| = \left|A \cap \left[1; 2\sqrt{n}\right]\right| + \left|A \cap \left(2\sqrt{n}; n\right]\right| \leq \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right)\sqrt{n} + 3 + \frac{1}{2}\sqrt{n}$$

$$\rightarrow |A| < 1,9\sqrt{n} + 5$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. □

Hướng phân hoạch các vùng và sử dụng các tính chất số học khá tự nhiên. Ý tưởng phân hoạch ở đây cần có sự hiểu sâu về số học để có thể chọn được các điểm mút trong từng đoạn.

Bài toán 6. *(USAMO 2001) Cho S là một tập các số nguyên sao cho:*

i) Tồn tại $a, b \in S$ với $\gcd(a, b) = \gcd(a-2, b-2) = 1$;

ii) Nếu x và y là hai phần tử của S (có thể bằng nhau) thì $x^2 - y$ cũng thuộc S.

Chứng minh rằng S là tập tất cả các số nguyên.

Lời giải. Ta nói "S ổn định tại $x \mapsto f(x)$" nếu $x \in S$ thì $f(x) \in S$. Nếu $c, d \in S$, thì theo (ii), tập S ổn định tại $x \mapsto c^2 - x$ và $x \mapsto d^2 - x$, do đó nó ổn định tại

$$x \mapsto c^2 - \left(d^2 - x\right) = x + \left(c^2 - d^2\right).$$

Tương tự ta cũng có S ổn định tại$x \mapsto x + (d^2 - c^2)$. Do đó S ổn định tại $x \mapsto x + n$ và $x \mapsto x - n$ với mọi n là số nguyên có dạng $c^2 - d^2$ với $c, d \in S$ Khi đó , ta có thể cho $n = m$ với $m = \gcd(c^2 - d^2 : \forall c; d \in S)$.

Thật vậy , ta đặt $P = \{c^2 - d^2 : \forall c; d \in S\}$ khi đó , theo một tính chất số học đơn giản (Định lý Euler) , tồn tại dãy số nguyên x_k để : $\sum\limits_{a_k \in P} x_k a_k = m$. Từ nhận xét trên, ta thấy nếu có $x \mapsto x \pm n; x \mapsto x \pm m$ thì cũng có $x \mapsto x \pm m \pm n$. Vì thế ta có

$$x \mapsto x \pm a_k; \forall a_k \in P$$

$$\to x \mapsto x \pm \sum_{a_k \in P} x_k a_k$$

$$\to x \mapsto x \pm m.$$

Vậy nhận xét trên là đúng.

Ta chứng minh $m = 1$. Phản chứng, giả sử $m \neq 1$. Gọi p là mộtước nguyên tố của m. Khi đó $c^2 - d^2 \equiv 0 \pmod p$ với mọi $c, d \in S$. Nói cách khác, với mỗi $c, d \in S$, ta được $d \equiv c \pmod p$ hoặc $d \equiv -c \pmod p$. Với $c \in S$, theo (b) ta có $c^2 - c \in S$, nên $c^2 - c \equiv c \pmod p$ hoặc $c^2 - c \equiv -c \pmod p$. Do đó với mỗi $c \in S$, ta có $c \equiv 0, 2 \pmod p$. $(*)$

Từ (i), tồn tại a và b trong S sao cho $\gcd(a, b) = 1$, từ đó ta được ít nhất một trong hai số a hoặc b không thể chia hết cho p. Điều đó có nghĩa là có một phần tử α của S mà $\alpha \neq 0 \pmod p$. Tương tự, theo (i),$\gcd(a-2, b-2) = 1$, nên p không thể chia hết cả $a - 2$ và $b - 2$. Do đó tồn tại một phần tử β của S sao cho $\beta \neq 2 \pmod p$. Theo $(*)$, ta suy ra $\alpha \equiv 2 \pmod p$ và $\beta \equiv 0 \pmod p$.

Theo (ii), $\beta^2 - \alpha \in S$. Chọn $c = \beta^2 - \alpha$, ta được cả $-2 \equiv 0 \pmod p$ hoặc $-2 \equiv 2 \pmod p$ đều cho $p = 2$. Từ $(*)$ ta thấy tất cả các phần tử của S chẵn, trái với (i).

Do đó giả thiết trên của chúng ta là sai , chứng tỏ $m = 1$ và ta được S là tập tất cả số nguyên. $\square$

Bài toán 7. *(Vietnam TST 2014) Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, xét các điểm nguyên có tọa độ thuộc tập hợp sau:*

$$T = \{(x;\, y) : -20 \leq x,\, y \leq 20, (x;\, y) \neq (0;\, 0)\}\,.$$

Tô màu các điểm thuộc T sao cho với mọi điểm có tọa độ $(x, y) \in T$ thì có đúng một trong hai điểm $(x; y)$ và $(-x; -y)$ được tô màu. Với mỗi cách tô như thế, gọi N là số các bộ $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ mà cả hai điểm này cùng được tô màu và

$$x_1 \equiv 2x_2, y_1 \equiv 2y_2 \pmod{41}.$$

Tìm tất cả các giá trị có thể có của N.

Lời giải. Trước hết, ta chuyển bài toán từ 2 chiều thành 1 chiều.

Ta có $2^{10} \equiv -1 (\bmod 41)$ nên 40 số nguyên khác 0 có giá trị tuyệt đối không vượt quá 20 có thể chia thành 2 dãy, mỗi dãy có độ dài 20 sao cho nếu số hạng đầu chia 41 dư x thì số hạng sau chia 41 dư $2x$.

Tô màu các số của dãy sao cho cứ 2 số đối nhau thì có đúng 1 số được tô màu. Ta quan tâm đến số lượng các cặp số liên tiếp cùng được tô màu trong dãy.

Dễ thấy $2^{20} \equiv 1 (\bmod 41)$ nên nếu thêm số hạng đầu của mỗi dãy vào cuối thì dãy mới gồm 21 số vẫn thỏa mãn tính chất trên nên ta có thể chuyển thành vòng tròn và phát biểu lại bài toán như sau: Cho đa giác đều 20 đỉnh nội tiếp trong một đường tròn sao cho trong 2 điểm đối xứng qua tâm thì có đúng 1 đỉnh được tô màu. Tính số các cặp đỉnh liên tiếp được tô màu có thể có.

Với n là số chẵn, gọi S_n là tập hợp số các cặp kề nhau cùng được tô màu có thể có của đa giác có n đỉnh. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng

$$S_{4n} = \{2k+1 | 0 \leq k \leq n-1\} \text{ và } S_{4n-2} = \{2k | 0 \leq k \leq n-1\}.$$

Điều này có thể chứng minh bằng quy nạp như sau:

Với $n = 2$ thì dễ thấy nhận xét đúng. Giả sử nhận xét đúng đến $n \geq 2$. Xét đa giác có $4n+2$ đỉnh. Đa giác này có thể tạo thành bằng cách thêm đỉnh A vào giữa hai đỉnh thứ $2n, 2n+1$ và thêm đỉnh B vào giữa hai đỉnh thứ $4n, 1$. Ta xét các trường hợp:

- Nếu đỉnh $2n, 2n+1$ đều được tô và A không được tô thì tương ứng: đỉnh $4n, 1$ không được tô và B được tô. Lúc này, số cặp kề nhau cùng được tô giảm đi 1.
- Nếu đỉnh $2n, 2n+1$ đều được tô và A cũng được tô thì tương ứng: đỉnh $4n, 1$ không được tô và B không được tô. Số cặp kề nhau tăng lên 1.
- Nếu trong hai đỉnh $2n, 2n+1$ có 1 đỉnh được tô và A cũng được tô thì tương ứng: trong hai đỉnh $4n, 1$có 1 đỉnh được tô và B không được tô. Số cặp kề nhau tăng lên 1.
- Nếu trong hai đỉnh $2n, 2n+1$, có 1 đỉnh được tô và A không được tô thì tương ứng: trong hai đỉnh $4n, 1$ có 1 đỉnh được tô và B được tô. Số cặp kề nhau tăng lên 1.

Do đó, $S_{4n+2} = \{x \pm 1 | x \in S_{4n}\}$ hay $S_{4n+2} = \{2k | 0 \le k \le n\}$.

Tương tự, ta cũng có $S_{4n+4} = \{x \pm 1 | x \in S_{4n+2}\}$. Tất nhiên không xảy ra trường hợp S_{4n+4} có chứa số -1 vì để có trường hợp 0 cặp số ở $4n+2$, các đỉnh phải được tô xen kẽ và trường hợp giảm đi số bộ không xảy ra, suy ra $S_{4n+4} = \{2k+1 | 0 \le k \le n\}$.

Rõ ràng trong cách chứng minh trên, ta cũng đã chỉ ra được cách xây dựng các trường hợp để có thể tô màu thỏa mãn được tất cả các giá trị trong tập hợp tương ứng. Nhận xét được chứng minh. Từ đó suy ra $S_{20} = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$.

Do đó, kết quả cho bài toán phụ sẽ là $2S_{20}$ với định nghĩa

$$2S = S + S = \{a + b | a, b \in S\}.$$

Quay trở lại bài toán ban đầu, để chuyển từ 1 thành phần x ở trên thành 2 thành phần (x, y), ta có thể thực hiện như sau:

Ứng với mỗi vòng tròn chứa các số thuộc dãy A, ta lấy một vòng tròn mới cũng gồm các số thuộc dãy A đặt lên đó sao cho mỗi số thuộc đường tròn cũ khớp với đúng một số thuộc đường tròn mới. Viết các cặp số khớp nhau thành một dãy, dãy đó chính là dãy các tọa độ điểm mà liền sau của (x_1, y_1) là $(2x_1, 2y_1)$ theo $\bmod 41$.

Dễ thấy có tất cả 20 cách ghép như thế (cố định vòng tròn cũ và xoay vòng tròn mới). Tương tự với việc ghép các dãy $A - B, B - A, B - B$ nên có tổng cộng là 80 cách ghép tạo thành 80 dãy. Tuy nhiên, ta cũng xét thêm 4 dãy đặc biệt, tương ứng với các điểm nằm trên trục tung và trục hoành. Cụ thể là xét thêm dãy C gồm 20 số 0 và xét 4 cách ghép: $A - C, C - A, B - C, C - B$. Do đó, tổng cộng có 84 dãy các tọa độ.

Theo chứng minh ở trên thì ở mỗi dãy, số các cặp có thể có là S_{20} vậy nên đáp số của bài toán là $84S_{20}$, cũng chính là các số chẵn từ $1 \cdot 84 = 84$ đến $9 \cdot 84 = 756$. □

Một cách tự nhiên khi ta lấy x, y thì nghĩ đến việc tìm $2x, 2y$ thay vì ngược lại là xét các điểm cùng được tô màu). Từ đó, khi biết các số có thể xoay thành 1 vòng tròn thì sẽ nhận thấy được miền giá trị kia chính là số cạnh và việc đưa thành 1 mô hình như đã nêu sẽ dễ trình bày nhất, mọi thứ đều sáng sủa hơn. Sẽ có ích khi ta phát biểu bài toán tổng quát sau đó làm việc với các tham số nhỏ để tìm ra quy luật.Bài này bản chất không khó, nhưng rất dễ sai nhất là khi kết luận vội vàng thông qua 1 số nhận xét nhỏ. Điểm mấu chốt là việc tách riêng hoành độ, tung độ, mô hình hóa dưới dạng đa giác đều và chú ý đến đồng dư thức $2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{41}$. Bài này khá mới mẻ là dạng tổ hợp đếm có kết hợp số học, tuy phát biểu có phần gượng ép trong việc đặt vào trục tọa độ nhưng lại giúp học sinh dễ tưởng tượng. Việc giải quyết bài toán trong trường hợp 1 chiều mang tính quyết định để xử lý bài toán với nhiều chiều hơn. Chẳng hạn:

Trong không gian Oxyz xét các điểm nguyên có tọa độ thuộc tập hợp: $T = \{(x, y, z) : -20 \le x, y, z \le 20, (x; y; z) \ne (0; 0; 0)\}$ Tô màu các điểm thuộc T sao cho với mọi điểm có tọa độ $(x; y; z) \in T$ thì có đúng 1 trong 2 điểm $(x; y; z)$ và $(-x; -y; -z)$ được tô màu. Với mọi cách tô như thế, gọi N là số các bộ $(x_1; y_1; z_1), (x_2; y_2; z_2)$ mà cả 2 điểm này cùng được tô màu và các tọa độ của chúng thỏa mãn điều kiện $x_1 \equiv 2x_2, y_1 \equiv 2y_2, z_1 \equiv 2z_2 \pmod{41}$. Tìm tất cả các giá trị có thể có của N.

Bài toán 8. *Xét tập $S = \{n_a = 101a - 100x2^a | a \in N; 0 \leq a \leq 99\}$. Chứng minh rằng : Nếu tồn tại $n_a; n_b; n_c; n_d \in S$ sao cho : $n_a + n_b \equiv n_c + n_d \pmod{10100}$ thì : $\{a; b\} = \{c; d\}$.*

Lời giải. Do $\gcd(100; 101) = 1$ nên ta có :$n_a + n_b \equiv n_c + n_d \pmod{10100}$ thì suy ra

$$n_a + n_b \equiv n_c + n_d \pmod{100}$$
$$n_a + n_b \equiv n_c + n_d \pmod{101}$$

Theo định nghĩa của tập S ta suy ra :

$$a + b \equiv c + d \pmod{100}$$
$$2^a + 2^b \equiv 2^c + 2^d \pmod{101}\ (1)$$

Từ $a + b \equiv c + d \pmod{100}$ suy ra tồn tại $k > 0$ để

$$\left[\begin{array}{l} a + b = c + d + 100k \\ \\ a + b = c + d - 100k \end{array}\right.$$

Theo định lý Fermat nhỏ thì do 101 là số nguyên tố nên ta có :$2^{100} \equiv 1 \pmod{101}$ Từ đó, ta được

$$2^a.2^b = 2^{a+b} \equiv 2^{c+d} = 2^c.2^d \pmod{101}\ (2)$$

Từ các điều trên, ta suy ra

$$2^a\left(2^c + 2^d - 2^a\right) \equiv 2^c.2^d \pmod{101}$$
$$\to \left(2^a - 2^c\right)\left(2^b - 2^d\right) \equiv 0 \pmod{101}$$

Suy ra, hoặc $2^a \equiv 2^c \pmod{101}$ hoặc $2^b \equiv 2^d \pmod{101}$ hoặc $a \equiv c \pmod{100}$ hoặc $b \equiv d \pmod{100}$. Khi đó , dùng $a + b \equiv c + d \pmod{100}$, suy ra : $a \equiv c \pmod{100}$ và $b \equiv d \pmod{100}$ mà theo định nghĩa tập S thì ta suy ra : $\{a; b\} = \{c; d\}$.

Vậy bài toán được chứng minh. □

Bài toán 9. *(Vietnam TST 2002) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên $m \geq 2002$ và m số nguyên dương đôi một khác nhau $a_1, a_2, a_3, ..., a_{m-1}, a_m$ sao cho số $\prod\limits_{i=1}^{m} a_i^2 - 4\sum\limits_{i=1}^{m} a_i^2$ là số chính phương.*

Lời giải. Với mỗi tập hợp hữu hạn T, ta xét $D(T) = \prod\limits_{a\in T} a - \sum\limits_{a\in T} a^2$. Xét tập hợp $A_0 = \left\{1, 2, 4, ..., 2^k, ..., 2^{2002}\right\}$. Ta thấy rằng $2^{2002} < 2^{1+2+4+...+2002} - 1$ và $D(A_0) > 0$. Xây dựng tập hợp $A_1 = A_0 \cup \left\{\prod\limits_{a\in A_0} a - 1\right\}$. Ta có

$$|A_1| = |A_0| + 1$$

và $D(A_1) = \prod\limits_{a\in A_1} a - \sum\limits_{a\in A_1} a^2 = \prod\limits_{a\in A_1} a\left(\prod\limits_{a\in A_1} a - 1\right) - \left(\sum\limits_{a\in A_1} a^2 + \left(\prod\limits_{a\in A_1} a - 1\right)^2\right) = D(A_0) - 1 > 0$. Tiếp tục xây dựng các tập hợp $A_2, A_3, A_4, ...$ theo cách tương tự (thêm vào tập hợp liền trước một phần tử là tích của tất cả các phần tử thuộc tập hợp liền trước trừ đi 1). Quá trình xây dựng này có đặc điểm là số phần tử của tập hợp A_{i+1} hơn số phần tử của tập hợp A_i là 1 đơn vị, đồng thời giá trị $D(A_{i+1})$ tương ứng lại giảm đi 1.

Do đó, tồn tại số nguyên dương k sao cho A_k là một tập hợp trong dãy trên, đồng thời

$$|A_k| > 2002 \text{ và } D(A_k) = 0.$$

Giả sử $A_k = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$ trong đó $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_m$. Suy ra a_m là nghiệm nguyên dương của phương trình $f(X) = X^2 - \left(\prod\limits_{i=1}^{m-1} a_i\right) X + \sum\limits_{i=1}^{m-1} a_i^2$, tức là biệt thức tương ứng của nó phải là số chính phương. Do đó $\left(\prod\limits_{i=1}^{m-1} a_i\right)^2 - 4\left(\sum\limits_{i=1}^{m-1} a_i^2\right)$ là số chính phương. Sự tồn tại của các giá trị $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_m$ này cho ta đpcm. □

Đây là phương pháp gen , có nhiều ứng dụng trong toán học , đặc biệt là số học. Khi đọc bài toán này, ta liên tưởng tới nhiều bài toán , và có bài toán sau:

(IMC 2013) Có tồn tại hay không tập M gồm vô hạn các số nguyên dương mà với mọi $a; b \in M; a \neq b$ ta đều có $a + b$ là số chính phương?

Mời bạn đọc hãy thử sức với bài toán trên. Tiếp theo, ta xét một tình huống khác

Bài toán 10. *(German MO 1996) Cho một viên đá đang ở vị trí $(1; 1)$ trên trục tọa độ Decar và nó được dịch chuyển theo các nguyên tắc sau*

a) Khi ở vị trí $(a; b)$ nó có thể dịch chuyển tới vị trí $(2a; b)$hoặc $(a; 2b)$.

b) Khi ở vị trí $(a; b)$nó có thể dịch chuyển tới vị trí $(a - b; b)$ nếu $a > b$ hoặc dịch chuyển tới vị trí$(a; b - a)$nếu $b > a$.

Với cặp số nguyên $(x; y)$ nào thì hòn đá có thể dịch chuyển tới?

Lời giải. Kí hiệu $\gcd(x; y)$ là ước chung lớn nhất của x và y . Ta có nhận xét

- Nếu sử dụng nguyên tắc (a) thì ước chung lớn nhất của hai số mới hoặc bằng hoặc là gấp đôi ước chung lớn nhất của hai số cũ.
- Nếu sử dụng quy tắc (b) thì ước chung lớn nhất của hai số mới vẫn bằng ước chung lớn nhất của hai số cũ.

Giả sử rằng vị trí $(x; y)$là có thể tới được khi bắt đầu từ vị trí $(a; b)$ thì do nhận xét trên thì phải tồn tại số tự nhiên n nào đó để $\gcd(x; y) = 2^n. \gcd(a; b)$ Với bài toán này thì có $a = b = 1$nên :$\gcd(x; y) = 2^n$. Bây giờ ta chứng minh rằng: Với mọi cặp số $(x; y)$ có $\gcd(x; y) = 2^n$ thì viên đá có thể dịch chuyển tới sau hữu hạn bước.

Thật vậy , trong tập hợp các vị trí ban đầu có thể tới vị trí $(x; y)$, xét vị trí $(a; b)$có $a + b$ nhỏ nhất. Nếu a hoặc b chẵn thì trước đó bắt đầu từ vị trí $\left(\frac{a}{2}; b\right)$ hoặc $\left(a; \frac{b}{2}\right)$ cũng thỏa mãn và có tổng nhỏ hơn $a + b$, điều này trái với giả sử $a + b$nhỏ nhất. Do đó, a và b cùng là số lẻ.

Nếu $a > b$hoặc $a < b$ thì trước đó ta bắt đầu từ vị trí $\left(\frac{a+b}{2}; b\right)$ hoặc $\left(a; \frac{a+b}{2}\right)$ (dùng nguyên tắc (a) rồi dùng nguyên tắc (b)) cũng thỏa mãn và có tổng nhỏ hơn $a + b$, điều này trái với giả sử $a + b$nhỏ nhất. Do đó , ta có : $a = b$. Theo nhận xét đầu tiên thì ta có

$$\exists m \in N : 2^n = \gcd(x; y) = 2^m. \gcd(a; b)$$

nhưng do a, b lẻ và $a = b$ nên

$$a = b = \gcd(a; b) = 1.$$

Điều đó , chứng tỏ rằng : ta có thể bắt đầu từ vị trí $(1; 1)$đến vị trí $(x; y)$. Như vậy , kết luận của bài toán là $\gcd(x; y) = 2^n$. □

Bài toán 11. *(Bulgarian Winter Math 2001) Ivan và Peter cùng tham gia trò chơi như sau: Lần lượt , mỗi người điền một chữ số 0 hoặc 1 lên một hàng theo thứ tự từ từ trái qua phải cho đến khi được 2001 chữ số thì dừng lại. Luật chơi là : số thu được viết trong hệ cơ số 2 không là tổng của hai số chính phương thì Peter thắng và ngược lại. Giả sử rằng , Peter là người bắt đầu trò chơi. Chứng minh rằng Peter luôn có chiến thuật để thắng Ivan.*

Lời giải. Nhận xét: Một số trong hệ cơ số 2 nếu biểu diễn được thành các nhóm mà mỗi nhóm gồm chẵn chữ số 1 liên tiếp và chẵn chữ số 0 liên tiếp thì số này không thể viết thành tổng của hai số chính phương. Giả sử nhận xét trên là đúng , ta xây dựng chiến thuật cho Peter như sau :

- Lần đầu tiên , Peter viết số 0.
- Các lần tiếp theo Ivan viết số nào thì Peter viết số đó.

Ngoại trừ một trường hợp đặc biệt , đó là các số từ vị trí 1 đến 1996 gồm toàn các chữ số 0 (khi đó còn 5 chữ số) và lượt viết của 5 chữ số cuối này là Peter (lượt 1997, 199, 2001), còn Ivan (lượt 1998,2000). Trong trường hợp này , chiến thuật Peter thay đổi như sau

- Lượt 1997, Peter viết số 1.
- Lượt 1998 , nếu Ivan viết số 0 thì : lượt 1999 và lượt 2001 , Peter đều viết số 1.
- Lượt 1998 , nếu Ivan viết số 1 thì : lượt 1999 , Peter viết số 1 ; lượt 2000 Ivan viết số nào thì lượt 2001 Peter viết lại số ở lượt 2000.

Như vậy số thu được sẽ nằm ở hai trường hợp

1. Trường hợp thường, ta thấy số thu được là số thỏa mãn nhận xét nên hiển nhiên số thu được không thể viết thành tổng của hai số chính phương. Lưu ý rằng chữ số 0 đầu tiên của Perter không làm ảnh hưởng tới nhận xét vì nó không mang giá trị khi biểu diễn trong hệ cơ số 2.

2. Trường hợp đặc biệt, kiểm tra trực tiếp , số thu được sẽ thuộc tập hợp $X = \{21; 23\} \cup \{24; 27\}$. Dễ thấy rằng, mỗi phần tử thuộc X không viết được thành tổng của hai số chính phương.

Như vậy, cả hai trường hợp đều suy ra : Peter là người thắng cuộc. Vấn đề còn lại của bài toán là chứng minh nhận xét.

Do số thu được có viết thành các nhóm chẵn chữ số 1 liên tiếp và chẵn chữ số 0 liên tiếp nên ta có thể viết số thu được thành tổng của các số dạng $1100...00_2 = 3.4^k$ (có 2k chữ số 0). Do đó , số thu được sẽ có dạng $T = (4n + 3)\,.4^m$ Bây giờ , việc còn lại là ta chứng minh $T = x^2 + y^2$ không có nghiệm nguyên.

Phản chứng , phương trình $T = x^2 + y^2$ có nghiệm nguyên. Do $T = (4n + 3)\,.4^m$ nên T có ước nguyên tố $p \equiv 3\,(\mathrm{mod} 4)$ với số mũ lẻ. Đến đây , dùng định lý Fermat nhỏ trong số học là suy ra điều vô lý. Vậy bài toán được chứng minh xong. □

Bài toán 12. *(Bulgarian MO 2003) Một tập C các số nguyên dương được gọi là tập tốt nếu với mỗi số nguyên dương k , tồn tại $a; b \in C; a \neq b$ sao cho $a + k$ và $b + k$ không nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng : nếu tổng tất cả các phần tử trong C bằng 2003 thì tồn tại $c \in C$ sao cho $C \backslash \{c\}$ cũng là tập tốt.*

Lời giải. Gọi $p_1; p_2; ...; p_n$ là tất cả các ước nguyên tố khác nhau của tập

$$\{|a - b| : a, b \in C; a \neq b\}.$$

Giả sử rằng , với mọi p_i tồn tại số nguyên $\alpha_i$sao cho $c \equiv \alpha_i\,(\mathrm{mod} p_i)$ với nhiều nhất một số $c \in C$ (*) . Theo định lý thặng dư Trung hoa , tồn tại số nguyên k để

$$k \equiv p_i - \alpha_i\,(\mathrm{mod} p_i)\,\forall i = \overline{1; n}.$$

Khi đó, do C là tập tốt nên tồn tại số j sao cho $a + k$ và $b + k$ cùng chia hết cho p_j , suy ra : $a \equiv b \equiv \alpha_j\,(\mathrm{mod} p_j)$. Điều này mâu thuẫn với $(*)$.

Do $(*)$ là sai nên ta suy ra tồn tại số nguyên tố $p \in \{p_1; p_2; ...; p_n\}$ sao cho với mọi số nguyên r, đều tồn tại ít nhất hai phần tử $a_r; b_r$ khác nhau trong C để $a_r \equiv b_r \equiv r\,(\mathrm{mod} p)$. Giả sử rằng, với mỗi r thì có đúng 2 phần tử $a_r; b_r$khác nhau trong C để $a_r \equiv b_r \equiv r\,(\mathrm{mod} p)$. Khi đó , ta có tổng tất cả các phần tử trong C là

$$pk + 2\,(0 + 1 + 2 + ... + p - 1) = p\,(k + p - 1)\,; k \geq 0.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết tổng tất cả các phần tử trong C bằng 2003 là số nguyên tố. Như vậy , tồn tại số r_0 để có ít nhất ba phần tử phân biệt

$$a_{r_0}; b_{r_0}; c_{r_0} \in C : a_{r_0} \equiv b_{r_0} \equiv c_{r_0} \equiv r_0\,(\mathrm{mod} p)\,.$$

Như vậy , ta có thể bỏ đi phần tử $c_{r_0} \in C$để thu được tập C' là tập tốt. Vậy bài toán được giải quyết hoàn toàn. □

Để kết thúc vấn đề, tác giả muốn gửi gắm bạn đọc một lời khuyên nhỏ: Dù bạn là người thông minh và có nhiều sáng tạo khi giải toán , thì việc tìm tòi và suy ngẫm những vấn đề mới phải luôn được thực hiện. Khi đó, kiến thức của bạn không chỉ sâu mà còn rộng!

Dưới đây là một bài toán bắt nguồn từ một bài thi British MO năm 1997 và nó lại xuất hiện một tờ báo "Mathematical Excabliur" năm 2012. Giả sử rằng , nếu như bạn không biết định lý giới thiệu trong bài toán , liệu bạn có lời giải khác?

Bài toán 13. *Cho tập* $S = \left\{\frac{1}{r} : r = 1; 2; 3; ....\right\}$ *. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương* $k \geq 3$ *, tồn tại trong* S *một bộ gồm k phần tử là k số hạng liên tiếp của một cấp số cộng đồng thời ; không thể tìm thêm một phần tử nào khác để cùng vớ k phần tử này tạo thành* $(k+1)$ *số hạng liên tiếp của một cấp số cộng.*

Lời giải. Trước tiên , muốn giải quyết được bài toán này , bạn cần phải biết tới một định lý rất nổi tiếng trong số học , đó là định lý Dirichlet . Bạn đừng nhầm , nó khác với nguyên lý Dirichlet trong tổ hợp, nó được phát biểu đơn giản như sau : Định lý Dirichlet :Cho $a; b \in Z$; gcd $(a; b) = 1; a > 0$ thì trong tập $\{an + b : n \in N\}$ chứa vô hạn các số nguyên tố.

Áp dụng vào bài toán : ta có với mỗi số nguyên dương k bất kì thì tồn tại số tự nhiên n để $kn+1$ là số nguyên tố. Đặt $a_1 = \frac{1}{(kn)!}; d = \frac{n}{(kn)!}$. Khi đó , với $i = \overline{2; k}$ ta xét $a_i = a_1 + (i-1)\,d$. Kiểm tra ta thấy

$$\forall i = \overline{1; k} \rightarrow a_i = \frac{1 + (i-1)\,n}{(kn)!} \in S.$$

Đồng thời, muốn có cấp số cộng có $(k+1)$ số hạng liên tiếp thì

$$a_{k+1} = \frac{kn+1}{(kn)!} \notin S\,(do\,(kn+1) \in P)$$

Như vậy, bài toán được chứng minh. □

SƠ LƯỢC VỀ CÁC HƯỚNG TIẾP CẬN ĐẠI SỐ TRONG CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC

Lê Phúc Lữ
(Lớp Cao học KHTN TPHCM)

Như chúng ta đã biết, nhắc đến phương pháp đại số, chúng ta nghĩ ngay đến một công cụ khá hữu hiệu và có lẽ đặc biệt dùng cho các bạn không có kĩ năng giải toán hình học thật sự tốt hoặc cần thiết khi giải quyết gấp các bài toán hình quá khó nào đó nếu giải theo cách truyền thống.
Các cách giải như thế chỉ đòi hỏi những biến đổi mang tính chất hệ thống cũng như những công thức đã có sẵn và chỉ cần sắp xếp lại, mọi thứ đã hoàn toàn tự nhiên. Tuy nhiên, không phải bài nào cũng có thể áp dụng cách này thành công và không phải bài nào có thể áp dụng thành công thì chúng ta cũng có thể tìm ra ngay cách giải đó. Trong phần này, ta sẽ tập trung xem xét các bài toán giải theo hai hướng tiếp cận bằng đại số chính là: cách dùng tọa độ và cách biến đổi các công thức độ dài, biến đổi góc.
Trước hết, ta phải công nhận rằng về mặt lí thuyết thì các bài toán hình học đều có thể giải bằng phương pháp tọa độ, muốn chứng minh song song thì chứng minh hệ số góc bằng nhau, chứng minh thẳng hàng thì cho vector cùng hướng, chứng minh đường thẳng đi qua điểm cố định thì viết phương trình đường thẳng đó rồi tìm nghiệm cố định của nó,... Tuy nhiên, vấn đề là chúng ta có đủ thời gian và đủ sức để biến đổi các công thức đó không.
Các bài toán về biến đổi công thức cạnh và góc cũng thế. Về lí thuyết là nếu đặt một số lượng biến thích hợp là chúng ta hoàn toàn có thể tính hết được tất cả các yếu tố trong đề bài trong đó và đưa về việc chứng minh một đẳng thức hoặc một bất đẳng thức nào đó. Nhưng quan trọng vẫn là biểu thức chúng ta thu được có dễ tính không.
Do đó, vấn đề ở đây chính là việc tự đánh giá được mức độ của bài toán và hình dung xem nếu đi theo con đường đại số thì có thuận lợi lắm không, các công thức biến đổi ra có quá cồng kềnh không và mình có đủ thời gian để xử lí nó ngay trong kì thi đó không. Công việc đó đòi hỏi phải từng làm qua bài toán dạng này rồi và cũng phải có chút kĩ năng tính toán và kiên trì chấp nhận xử lí các biểu thức phức tạp.

1. Biến đổi lượng giác

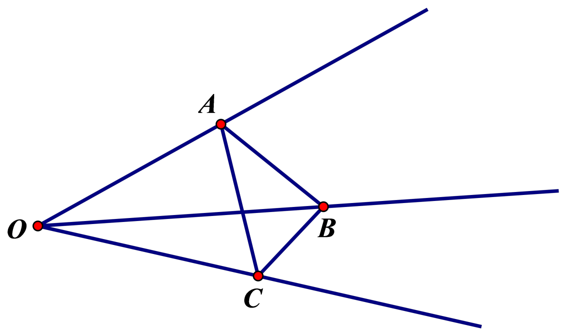
Bài toán 1. *(Việt Nam TST 1983) Trong mặt phẳng cho ba tia Ox, Oy, Oz cố định và tia Oy nằm giữa hai tia còn lại. Chứng minh rằng với mỗi số dương k, tồn tại duy nhất các điểm A, B, C theo thứ tự thuộc các tia Ox, Oy, Oz sao cho chu vi các tam giác OAB, OBC, OCA bằng nhau và đều bằng k.*

Lời giải. Đặt $OA = a, OB = b, OC = c, 0 < a + b, b + c, c + a < k$. Ta cần chứng minh tồn tại các giá trị a, b, c thỏa mãn điều kiện đề bài. Ta đặt $\angle AOB = \alpha, \angle BOC = \beta \Rightarrow \angle AOC = \alpha + \beta$. Theo định lí cosin trong các tam giác, ta tính được:

$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}, BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\beta}, CA = \sqrt{c^2 + a^2 - 2ca\cos(\alpha + \beta)}$

Do chu vi của các tam giác OAB, OBC, OCA đều bằng k nên ta có hệ sau

$$\begin{cases} a + b + \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} = k \\ b + c + \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\beta} = k \\ c + a + \sqrt{c^2 + a^2 - 2ca\cos(\alpha + \beta)} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} = k - a - b \\ \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\beta} = k - b - c \\ \sqrt{c^2 + a^2 - 2ca\cos(\alpha + \beta)} = k - c - a \end{cases}$$



Ta thấy rằng $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} = k - a - b$ nên

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = a^2 + b^2 + k^2 - 2k(a + b) + 2ab$$
$$\Leftrightarrow k^2 - 2k(a + b) + 2ab + 2ab\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{k^2}{ab} - 2k\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + 2 + 2\cos\alpha = 0$$

Nếu đặt $\frac{1}{a} = x, \frac{1}{b} = y, \frac{1}{c} = z$ thì $k^2xy - 2k(x + y) + 2 + 2\cos\alpha = 0$. Ta có hệ mới

$$\begin{cases} k^2xy - 2k(x + y) + 2 + 2\cos\alpha = 0 \\ k^2yz - 2k(y + z) + 2 + 2\cos\beta = 0 \\ k^2zx - 2k(z + x) + 2 + 2\cos(\alpha + \beta) = 0 \end{cases}$$

Từ đẳng thức thứ nhất và thứ hai, ta tính được $x = \frac{2(ky - 1 - \cos\alpha)}{k(ky - 2)}, z = \frac{2(ky - 1 - \cos\beta)}{k(ky - 2)}$. Thay vào đẳng thức thứ ba, ta có

$$\frac{4(ky - 1 - \cos\alpha)(ky - 1 - \cos\beta)}{(ky - 2)^2} - 2k \cdot \frac{2ky - 2 - \cos\alpha - \cos\beta}{k(ky - 2)} + 2 + 2\cos(\alpha + \beta) = 0$$
$$\Leftrightarrow -\frac{2k^2y^2 - 8ky + 4 + 4\cos\alpha + 4\cos\beta - 4\cos\alpha\cos\beta}{(ky - 2)^2} + 2\cos(\alpha + \beta) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{4(\cos\alpha - 1)(\cos\beta - 1)}{(ky - 2)^2} = 2 - 2\cos(\alpha + \beta)$$
$$\Leftrightarrow (ky - 2)^2 = \frac{2(\cos\alpha - 1)(\cos\beta - 1)}{1 - \cos(\alpha + \beta)} = \frac{2 \cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot 2\sin^2\frac{\beta}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha + \beta}{2}} = \left(\frac{2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha + \beta}{2}}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow ky = 2 \pm \frac{2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha + \beta}{2}} \Leftrightarrow y = \frac{2 \pm 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2}}{k\sin\frac{\alpha + \beta}{2}}$$

Ta sẽ chứng minh rằng $ky = 2 - \dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$ không thỏa mãn đề bài. Thật vậy,

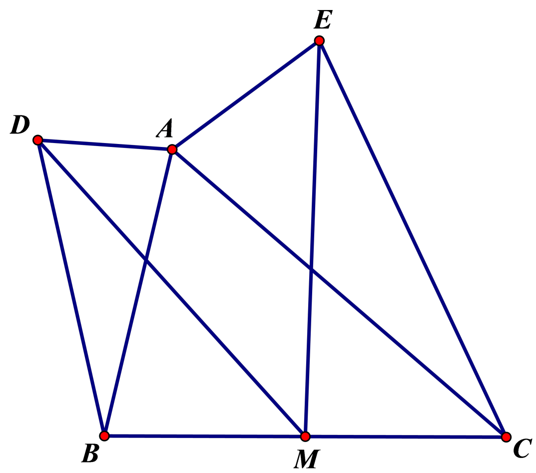
$$x = \frac{2(ky-1-\cos\alpha)}{k(ky-2)} = \frac{2\left(-\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} + 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{-k\cdot\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}} = \frac{1}{k}\frac{2\left(\sin\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{k}{2}\frac{1}{1-\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\right)} > \frac{k}{2}.$$

Tương tự $c > \frac{k}{2}$. Khi đó $a + c > k$, không thỏa. Dễ dàng chứng minh được giá trị còn lại thỏa mãn nên ta có đpcm. □

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC nhọn. Dựng phía ngoài tam giác này các tam giác cân ABD và ACE đồng dạng với nhau sao cho $BA = BD, CA = CE$]. Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh rằng $MD = ME \Leftrightarrow AB = AC$.*

Lời giải. Xét tam giác MDB, MCE, theo định lí cosin thì

$$MD^2 = BM^2 + BD^2 - 2\cdot BM\cdot BD\cdot\cos(B+\alpha)$$
$$ME^2 = CM^2 + CE^2 - 2\cdot CM\cdot CE\cdot\cos(C+\alpha)$$



Do $BM = CM = \frac{BC}{2}, BD = BA, CE = CA$ nên

$$\begin{aligned}MD^2 - ME^2 &= AB^2 - AC^2 - BC\left[AB\cos(B+\alpha) - AC\cos(C+\alpha)\right]\\ &= 4R^2\left(\sin^2 C - \sin^2 B - \sin A\left[\sin C\cos(B+\alpha) - \sin B\cos(C+\alpha)\right]\right)\end{aligned}$$

Ta cũng có

$$\begin{aligned}&\sin C\cdot\cos(B+\alpha) - \sin B\cdot\cos(C+\alpha)\\ &= \sin C\left(\cos B\cos\alpha - \sin B\sin\alpha\right) - \sin B(\cos C\cos\alpha - \sin C\sin\alpha)\\ &= \cos\alpha(\sin C\cos B - \sin B\cos C) = \cos\alpha\cdot\sin(C-B)\end{aligned}$$

Do đó $MD^2 - ME^2 = 4R^2\left(\sin^2 C - \sin^2 B + \sin A \sin(B-C)\cos\alpha\right)$ Hơn nữa

$$\sin^2 C - \sin^2 B = \frac{1-\cos 2C}{2} - \frac{1-\cos 2B}{2} = \frac{\cos 2B - \cos 2C}{2} = \sin A \sin(C-B)$$

nên suy ra

$$\begin{aligned} MD^2 - ME^2 &= 4R^2\left(\sin A \sin(C-B) + \sin A \sin(B-C)\cos\alpha\right) \\ &= 4R^2 \sin A \sin(C-B)(1-\cos\alpha). \end{aligned}$$

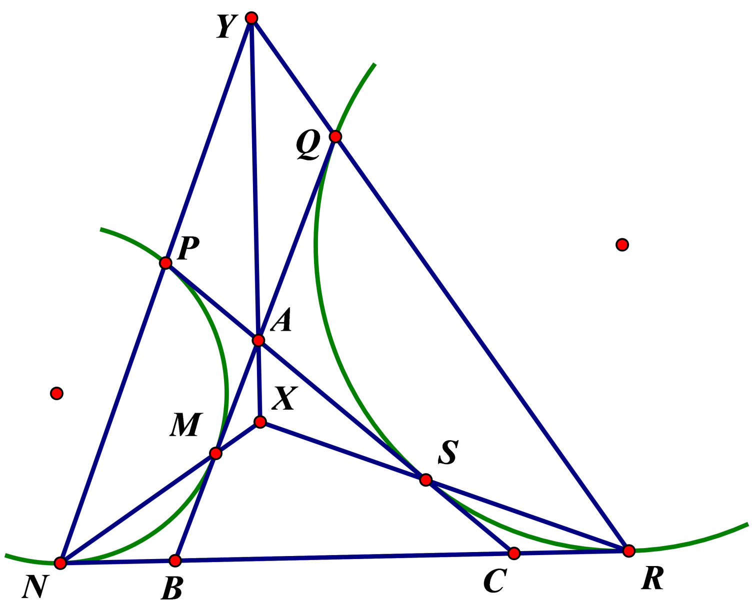
Từ đó dễ dàng suy ra đpcm. □

Bài toán 3. *Cho tam giác ABC nhọn không cân. Gọi ℓ_1 là đường thẳng đi qua hai tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A với các đường thẳng AB, AC. Định nghĩa tương tự với các đường thẳng ℓ_2, ℓ_3. Các đường thẳng này cắt nhau đôi một tạo thành tam giác MNP. Chứng minh rằng*

1. *Trực tâm của tam giác ABC là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác MNP.*
2. *Gọi I_1, I_2, I_3 lần lượt là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A, góc B, góc C lên các cạnh tương ứng. Chứng minh rằng đường thẳng qua I_i và vuông góc với ℓ_i với $i = 1, 2, 3$ đồng quy tại trực tâm của tam giác MNP.*

Lời giải. Trước hết, ta chứng minh nhận xét sau : Cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc C với các đường thẳng AB, BC, CA và Q, R, S lần lượt là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc B với các đường thẳng AB, BC, CA. Gọi X là giao điểm của MN và RS, còn Y là giao điểm của NP và RQ. Khi đó, ta có X, A, Y thẳng hàng.

Chứng minh. Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng XY vuông góc với BC.



Thật vậy, ta có

$$\angle XNB = \frac{\angle B}{2}, \angle BRY = 90^0 - \frac{\angle B}{2}$$

hay NX vuông góc với YR. Tương tự RX vuông góc với YN. Suy ra X là trực tâm của tam giác NYR hay XY vuông góc với BC. Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng X nằm trên đường cao góc A của tam giác ABC. Giả sử X' là giao điểm của đường cao góc A với MN. Theo định lí sin trong tam giác AMX' thì

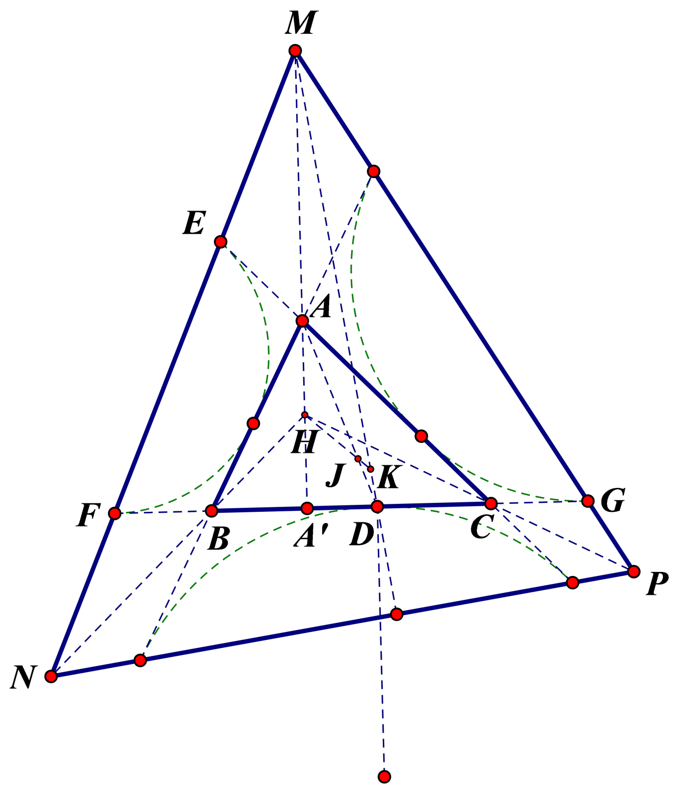
$$\frac{AX'}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{AM}{\sin AX'M} \Leftrightarrow \frac{AX'}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{AM}{\sin\left(90^0 + \frac{B}{2}\right)} \Leftrightarrow AX' = (p-b)\tan\frac{B}{2} = r.$$

Tương tự, nếu gọi X'' là giao điểm của đường cao góc A với RS thì $AX'' = r$ hay X, X', X'' trùng nhau. Bổ đề được chứng minh. □

Bằng cách biến đổi góc, ta chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP chính là trực tâm của tam giác ABC. Kí hiệu như hình vẽ bên dưới với H là trực tâm tam giác ABC. Ta có

$$\angle AME = \angle AEN - \angle EAM = \frac{180^0 - \angle C}{2} - \left(90^0 - \angle C\right) = \frac{\angle C}{2}.$$

Tương tự, ta cũng có $\angle BNF = \frac{\angle C}{2}$ nên $\angle HMN = \angle HNM \Rightarrow HM = HN$. Tương tự, ta cũng có $HN = HP$ nên H chính là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác MNP.



Tiếp theo, giả sử A' là giao điểm của AH với BC, còn D trùng với I_1 thì ta tính được

$$A'B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2a} \Rightarrow FA' = FB + A'B = \frac{(c+a-b)(b+c)}{2a}.$$

Tương tự, ta cũng có $GA' = \frac{(a+b-c)(b+c)}{2a}$. Suy ra $\frac{FA'}{GA'} = \frac{c+a-b}{a+b-c}$. Ta có $DF = DB + BF = b$ và $DG = DC + CG = c$ nên $\frac{DF}{DG} = \frac{b}{c}$. Xét tam giác MFG có

$$\angle MFG = 90^0 - \frac{\angle C}{2}, \angle MGF = 90^0 - \frac{\angle B}{2} \Rightarrow \frac{MF}{MG} = \frac{\sin \angle MGF}{\sin \angle MFG} = \frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Suy ra

$$\frac{MF^2}{MG^2} = \frac{\cos B + 1}{\cos C + 1} = \frac{(c+a-b)b}{(a+b-c)c} = \frac{FA'}{GA'}\frac{DF}{DG}$$

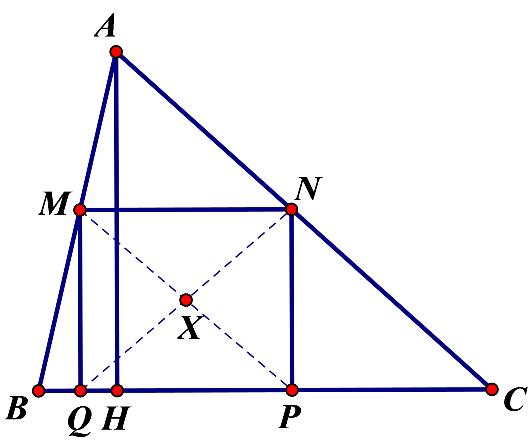
nên hai điểm A' và D đối xứng với nhau qua phân giác góc $\angle FMG$ hay MD là đường cao của tam giác MNP. Ta có đpcm. $\square$

Bài toán 4. *Cho tam giác ABC nhọn, không cân có diện tích S và có M, N lần lượt là trung điểm AB, AC. Với $x \in (0;1)$, xét điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = x$ và gọi X tâm của hình chữ nhật R_1 nội tiếp tam giác ABC với M, N là hai đỉnh của hình chữ nhật R_1 và hai đỉnh còn lại thuộc cạnh BC. Ứng với hai số thực $y, z \in (0;1)$, ta lần lượt xét các hình chữ nhật R_2, R_3 với tâm của chúng theo thứ tự là Y và Z với cách xác định tương tự.*

1. *Chứng minh rằng $S_{R_1}S_{R_2}S_{R_3} \leq \frac{1}{8}S$.*
2. *Trong trường hợp dấu đẳng thức xảy ra trong bất đẳng thức trên, chứng minh rằng các đường thẳng AX, BY, CZ không đồng quy.*

1) Giả sử hình chữ nhật tương ứng có tâm X là $MNPQ$ với P, Q thuộc cạnh BC. Theo định lí Thales thì: $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = x$ và $\frac{MQ}{AH} = \frac{BM}{AB} = 1 - \frac{AM}{AB} = 1 - x$ trong đó H là hình chiếu của A lên cạnh BC. Suy ra

$$S_{MNPQ} = MN.MQ = x(1-x).AH.BC = 2x(1-x)S.$$



Theo bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm $x, 1-x$ thì $x(1-x) \leq \frac{(x+1-x)^2}{4} = \frac{1}{4}$ nên ta có $S_{R_1} = 2x(1-x)S \leq \frac{1}{2}S$. Tương tự, ta cũng có $S_{R_2} \leq \frac{1}{2}S, S_{R_3} \leq \frac{1}{2}S$. Nhân các bất đẳng thức này lại, ta được đpcm.

2) Dễ thấy rằng dấu bằng xảy ra trong các bất đẳng thức trên khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$ hay cứ mỗi hình chữ nhật thì có một cạnh là đường trung bình của tam giác ABC.

Ta sẽ tính tỉ lệ $\frac{\sin\angle XAB}{\sin\angle XAC}$ theo độ dài các cạnh của tam giác ABC. Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$. Ta có

$$\frac{S_{AMX}}{S_{ANX}} = \frac{AM.AX.\sin\angle XAB}{AN.AX.\sin\angle XAC} \Rightarrow \frac{\sin\angle XAB}{\sin\angle XAB} = \frac{S_{AMX}}{S_{ANX}}\frac{b}{c}.$$

Hơn nữa, theo tỉ lệ diện tích các tam giác, ta có

$$S_{AMX} = \frac{1}{2}S_{AMP} = \frac{1}{4}S_{ABP} = \frac{BP}{BC}S = \frac{a - \frac{b}{2}\cos C}{4a}S = \frac{a - \frac{b}{2}\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{4a}S = \frac{3a^2 - b^2 + c^2}{16a^2}S.$$

Tương tự, ta cũng tính được $S_{ANX} = \frac{3a^2+b^2-c^2}{16a^2}S$ nên

$$\frac{\sin\angle XAB}{\sin\angle XAC} = \frac{3a^2 - b^2 + c^2}{3a^2 + b^2 - c^2} \cdot \frac{b}{c}.$$

Xây dựng các đẳng thức tương ứng về góc đối với Y và Z rồi áp dụng định lí Ceva, ta thấy điều kiện để các đoạn AX, BY, CZ đồng quy khi và chỉ khi

$$\prod_{sym}\left(\frac{3a^2 - b^2 + c^2}{3a^2 + b^2 - c^2} \cdot \frac{b}{c}\right) = 1 \Rightarrow \prod_{sym}\left(\frac{3a^2 - b^2 + c^2}{3a^2 + b^2 - c^2}\right) = 1$$
$$\Rightarrow \prod_{sym}\left(3a^2 - b^2 + c^2\right) = \prod_{sym}\left(3a^2 + b^2 - c^2\right).$$

Giả sử

$$P(a,b,c) = \prod_{sym}\left(3a^2 - b^2 + c^2\right) - \prod_{sym}\left(3a^2 + b^2 - c^2\right),$$

ta thấy rằng đây là đa thức không quá 6 và hơn nữa $P(a,t,t) = P(a,t,-t) = P(t,b,t) = P(t,b,-t) = P(t,t,c) = P(t,-t,c) = 0$ nên nó có thể phân tích thành nhân tử dạng

$$P(a,b,c) = \gamma(a-b)(b-c)(c-a)(a+b)(b+c)(c+a)$$

với γ là một số thực nào đó. Vì tam giác ABC không cân nên $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ và do đó, đẳng thức trên không thể xảy ra được. Vậy các đoạn thẳng AX, BY, CZ không đồng quy. Ta có đpcm.

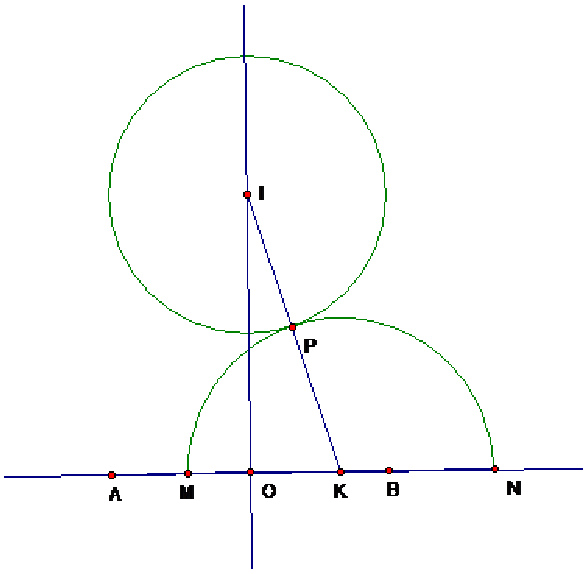
2. Tính toán độ dài đoạn thẳng

Bài toán 5. *Cho hai điểm A, B phân biệt và cố định trên đường thẳng Δ cho trước trong mặt phẳng. Với mỗi điểm M trên đường thẳng Δ, xác định mỗi điểm N nằm trên sao cho*

$$\overrightarrow{BN} = k.\overrightarrow{BA}, k = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}.$$

Trên đường thẳng bờ Δ, dựng nửa đường tròn (α) đường kính MN. Chứng minh rằng khi M di động trên đường thẳng thì nửa đường tròn (α) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Lời giải. Gọi O là trung điểm của AB. Trong hệ trục Oxy với $Ox \equiv \Delta$, ta xét các điểm $A(-1;0), B(1;0), I(0;2)$. Điểm M di động trên $Ox: M(x;0), x \in \mathbb{R}$.



Ta có $\overline{MA} = -(x+1),\ \overline{MB} = 1-x$ và $k = \dfrac{-(x+1)}{1-x} = \dfrac{x+1}{x-1}$. Suy ra

$$\overrightarrow{BN} = \frac{x+1}{x-1}.\overrightarrow{BA} \Rightarrow x_N - 1 = \frac{-2(x+1)}{x-1}$$
$$\Rightarrow x_N = \frac{-(x+3)}{x-1} \Rightarrow N\left(\frac{-(x+3)}{x-1};0\right).$$

Tọa độ trung điểm K của MN là $K\left(\dfrac{x^2-2x-3}{2(x-1)};0\right)$. Xét nửa đường tròn (α) tâm K, đường kính MN nằm phía trên Ox. Ta sẽ chứng minh (α) luôn tiếp xúc với đường tròn $(I;1)$ với mọi x. Thật vậy, ta có

$$IK^2 = \left|\frac{x^2-2x-3}{2(x-1)}\right|^2 + 4 = \frac{\left[(x-1)^2-4\right]^2 + 16(x-1)^2}{4(x-1)^2} = \frac{\left[(x-1)^2+4\right]^2}{4(x-1)^2}$$
$$\Rightarrow IK = \frac{(x-1)^2+4}{2|x-1|}$$

Độ dài MN là $MN = \dfrac{x^2+3}{|x-1|}$ còn bán kính của (α) là $R = \dfrac{x^2+3}{2|x-1|}$. Xét các trường hợp

1. Nếu $x > 1$ thì $IK = \dfrac{(x-1)^2+4}{2(x-1)}$,$R = \dfrac{x^2+3}{2(x-1)}$, suy ra

$$R - 1 = \frac{x^2+3}{2(x-1)} - 1 = \frac{x^2-2x+5}{2(x-1)} = \frac{(x-1)^2+4}{2(x-1)} = IK.$$

   Suy ra (α) và $(I;1)$ tiếp xúc trong với nhau.

2. Nếu $x < 1$ thì $IK = \dfrac{(x-1)^2+4}{2(1-x)}$,$R = \dfrac{x^2+3}{2(1-x)}$, suy ra

$$R + 1 = \frac{x^2+3}{2(1-x)} + 1 = \frac{x^2-2x+5}{2(1-x)} = \frac{(x-1)^2+4}{2(1-x)} = IK.$$

   Suy ra (α) và $(I;1)$ tiếp xúc ngoài với nhau.

3. Nếu $x = 1$ thì (α) suy biến thành một tia gốc B, vuông góc Ox, hướng theo chiều dương của Oy; đó cũng chính là tiếp tuyến của $(I;1)$.

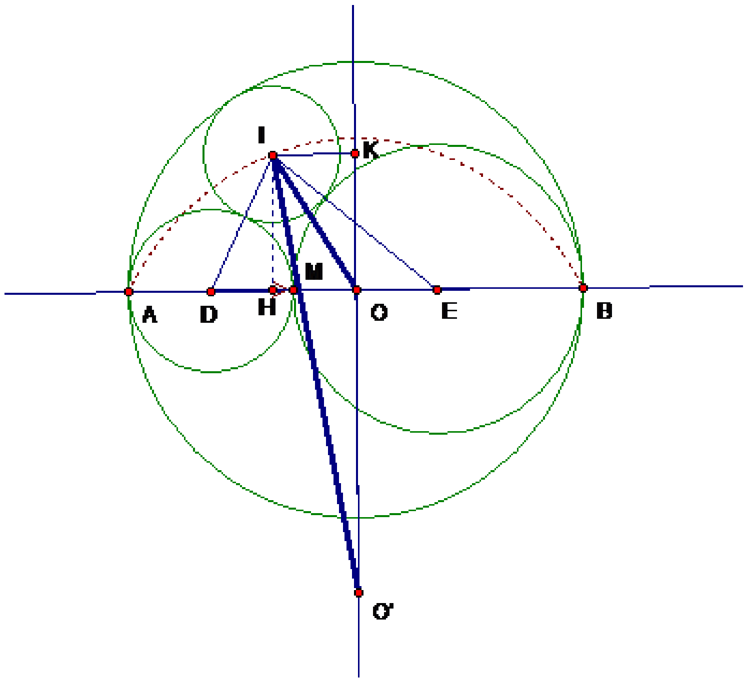
Vậy nửa đường tròn (α) luôn tiếp xúc với đường tròn $(I;1)$ cố định. Ta có đpcm. □

Bài toán 6. *Giả sử M là một điểm nằm trên đoạn thẳng AB cho trước. Về một phía của đường thẳng AB, dựng ba nửa đường tròn có đường kính lần lượt là AM, BM, AB. Gọi I, r lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác cong ABM (có cạnh cong là các nửa đường tròn vừa dựng). Chứng minh rằng khi M chuyển động trên AB thì quỹ tích của I là một cung của elip mà dây của nó đi qua một trong hai tiêu điểm của elip đó.*

Lời giải. Gọi O, D, E lần lượt là tâm của các nửa đường tròn đường kính AB, AM, BM. Không mất tính tổng quát, giả sử$AM \leq BM$. Đặt $AB = 2a,\ AM = 2x$,$0 \leq 2x \leq a$. Ta tính được

$$BM = 2a - 2x,\ ME = a - x,\ DE = \frac{1}{2}AB = a,\ OM = a - 2x, OD = a - x,\ OE = x$$

Ta sẽ tính r theo a và x.



Gọi H là hình chiếu của I trên AB. Gọi O' là điểm nằm trên đường trung trực của AB, khác phía với các nửa đường tròn và $OO' = \frac{4a}{3}$; K là hình chiếu của I lên đường trung trực của AB. Rõ ràng, O' là điểm cố định. Theo định lí Pythagores, ta có

$$HE^2 - HD^2 = IE^2 - ID^2 \Leftrightarrow (HE + HD)(HE - HD) = (r + a - x)^2 - (r + x)^2$$

$$\Leftrightarrow DE(HE - HD) = (a - 2x)(a + 2r) \Leftrightarrow HE - HD = \frac{(a - 2x)(a + 2r)}{a}$$

và

$$HD^2 - HO^2 = ID^2 - IO^2 \Leftrightarrow (HD + HO)(HD - HO) = (x + r)^2 - (a - r)^2$$

$$\Leftrightarrow OD(HD - HO) = (x + a)(x + 2r - a) \Leftrightarrow HD - HO = \frac{(x + a)(x + 2r - a)}{a - x}$$

Suy ra

$$OE = HE - HO = \frac{(a - 2x)(a + 2r)}{a} + \frac{(x + a)(x + 2r - a)}{a - x},$$

mà $OE = x$ nên ta có đẳng thức

$$\frac{(a - 2x)(a + 2r)}{a} + \frac{(x + a)(x + 2r - a)}{a - x} = x$$

$$\Leftrightarrow (a - 2x) + \frac{2r(a - 2x)}{a} - (x + a) + \frac{2r(x + a)}{a - x} = x$$

$$\Leftrightarrow 2r\left[\frac{a - 2x}{a} + \frac{x + a}{a - x}\right] = 4x$$

$$\Leftrightarrow r.\left[\frac{2a^2 - 2ax + 2x^2}{a(a - x)}\right] = 2x$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{ax(a - x)}{a^2 - ax + x^2}$$

Do đó
$$IO = a - r = a - \frac{ax(a-x)}{a^2 - ax + x^2} = \frac{a(a^2 - 2ax + 2x^2)}{a^2 - ax + x^2}.$$
Ta có
$$IK = HO = \frac{1}{2}\left[(HO + HD) - (HD - HO)\right] = \frac{1}{2}\left[(a-x) - \frac{(x+a)(x+2r-a)}{a-x}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[(a-x) - \frac{(x+a)\left(x - a + \frac{2ax(a-x)}{a^2-ax+x^2}\right)}{a-x}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[(a-x) - (x+a)\left(\frac{2ax}{a^2-ax+x^2} - 1\right)\right] = \frac{a^2(a-2x)}{a^2-ax+x^2}$$
$$\Rightarrow OK^2 = IO^2 - IK^2 = \left[\frac{a(a^2-2ax+2x^2)}{a^2-ax+x^2}\right]^2 - \left[\frac{a^2(a-2x)}{a^2-ax+x^2}\right]^2 = \frac{4a^2x^2(a-x)^2}{(a^2-ax+x^2)^2}$$
$$\Rightarrow OK = \frac{2ax(a-x)}{a^2-ax+x^2}$$
Do đó
$$O'K = OK + OO' = \frac{2ax(a-x)}{a^2-ax+x^2} + \frac{4a}{3} = \frac{6ax(a-x) + 4a(a^2-ax+x^2)}{3\left(a^2-ax+x^2\right)} = \frac{2a(2a^2+ax-x^2)}{3\left(a^2-ax+x^2\right)}$$
Suy ra:
$$IO'^2 = O'K^2 + IK^2 = \left[\frac{2a(2a^2+ax-x^2)}{3\left(a^2-ax+x^2\right)}\right]^2 + \left[\frac{a^2(a-2x)}{(a^2-ax+x^2)}\right]^2$$
$$= \frac{4a^2(2a^2+ax-x^2)^2 + 9a^4(a-2x)^2}{9(a^2-ax+x^2)^2}$$
$$= \frac{4a^2(4a^4+x^4+4a^3x-3a^2x^2-2ax^3) + 9a^4(a^2-4ax+4x^2)}{9(a^2-ax+x^2)^2}$$
$$= \frac{a^2(25a^4+4x^4+24a^2x^2-20a^3x-8ax^3)}{9(a^2-ax+x^2)^2}$$
$$= \frac{a^2(5a^2-2ax+2x^2)^2}{9(a^2-ax+x^2)^2} \Rightarrow IO' = \frac{5a^2-2ax-2x^2}{3(a^2-ax+x^2)}$$
Từ đó, ta được
$$IO + IO' = \frac{a(a^2-2ax+2x^2)}{a^2-ax+x^2} + \frac{a(5a^2-2ax+2x^2)}{3(a^2-ax+x^2)}$$
$$= \frac{3a(a^2-2ax+2x^2) + a(5a^2-2ax+2x^2)}{3(a^2-ax+x^2)} = \frac{8a(a^2-ax+x^2)}{3(a^2-ax+x^2)} = \frac{8a}{3}$$
là không đổi. Do O, O' cố định và tổng khoảng cách từ I đến hai điểm này không đổi nên I thuộc elip có hai tiêu điểm là O và O'. Hơn nữa, ta thấy I luôn nằm trong nửa đường tròn (O); khi M trùng với A hay B thì $r = 0$ nên I chỉ di động trên cung AB nằm trong nửa đường tròn của elip, dây của cung elip này chính là AB nên rõ ràng nó đi qua O.

Vậy quỹ tích của I là cung elip có dây cung đi qua một trong hai tiêu điểm của nó (đpcm). $\square$

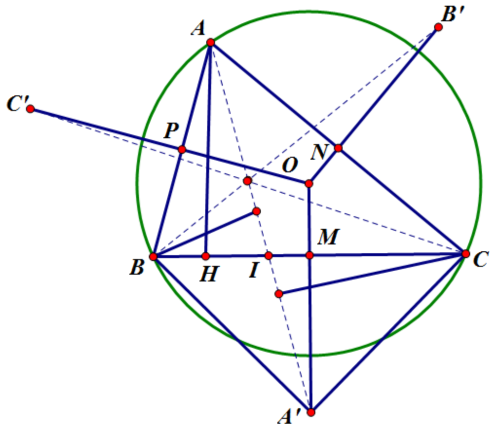
Bài toán 7. *Cho tam giác ABC nhọn không cân có cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Các điểm A', B', C' lần lượt trên các đường OM, ON, OP sao cho cặp vector sau đồng thời cùng hướng hoặc ngược hướng $\left(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA'}\right), \left(\overrightarrow{NO}, \overrightarrow{NB'}\right), \left(\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PC'}\right)$ và độ dài của các vector $\overrightarrow{MA'}, \overrightarrow{MB'}, \overrightarrow{MC'}$ bằng nhau và bằng $k \geq 0$. Xác định tất cả các giá trị của k để các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm.*

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a > b > c$. Ta sẽ giải bài toán trong hai trường hợp:

1. Nếu các vector $\left(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA'}\right), \left(\overrightarrow{NO}, \overrightarrow{NB'}\right), \left(\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PC'}\right)$ đồng thời ngược hướng.

   Gọi H là hình chiếu của A lên BC, khi đó, H nằm giữa B và M. Ta tính được

$$HB = AB.\cos B = \frac{c(c^2+a^2-b^2)}{2ca} = \frac{c^2+a^2-b^2}{2a}.$$



   Tương tự, ta cũng có $HC = \frac{c^2+b^2-a^2}{2a}$, suy ra $HM = HC - MC = \frac{b^2-c^2}{2a}$. Gọi I là giao điểm của AA' với BC thì I nằm giữa H và M. Theo định lí Thales, ta có

$$\frac{IH}{IM} = \frac{AH}{MA'} \Rightarrow \frac{IH}{IM} = \frac{h_a}{k} \Rightarrow IH = \frac{MH \cdot h_a}{k+h_a}.$$

   Ta cũng có $IM = \frac{MH \cdot k}{k+h_a}$. Ta tính được

$$IB = MB - IM = \frac{a}{2} - \frac{MH \cdot k}{k+h_a} = \frac{ka + ah_a - 2k \cdot HM}{2(k+h_a)}.$$

   Tương tự

$$IC = a - \frac{ka + ah_a - 2k \cdot HM}{2(k+h_a)} = \frac{ka + ah_a + 2k \cdot HM}{2(k+h_a)}$$

   Suy ra:

$$\frac{IB}{IC} = \frac{ka + ah_a - 2k \cdot HM}{ka + ah_a + 2k \cdot HM} = \frac{2S + k\left(a - \frac{b^2-c^2}{a}\right)}{2S + k\left(a + \frac{b^2-c^2}{a}\right)} = \frac{2aS + k(a^2+c^2-b^2)}{2aS + k(a^2+b^2-c^2)}.$$

Nếu đặt $t_a = b^2 + c^2 - a^2, t_b = c^2 + a^2 - b^2, t_c = a^2 + b^2 - c^2$thì đẳng thức trên viết lại ở dạng rút gọn là

$$\frac{IB}{IC} = \frac{2aS + kt_b}{2aS + kt_c}.$$

Hoàn toàn tương tự, nếu gọi J và K lần lượt là giao điểm của BB', CC' với AC, AB thì ta có

$$\frac{JC}{JA} = \frac{2bS + kt_c}{2bS + kt_a}, \frac{KA}{KB} = \frac{2cS + kt_a}{2cS + kt_b}.$$

Theo định lí Ceva, các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy khi và chỉ khi

$$\frac{IB}{IC}\frac{JC}{JA}\frac{KA}{KB} = 1 \Leftrightarrow \frac{2aS + kt_b}{2aS + kt_c}\frac{2bS + kt_c}{2bS + kt_a}\frac{2cS + kt_a}{2cS + kt_b} = 1.$$

Đẳng thức trên tương đương

$$(2aS + kt_b)(2bS + kt_c)(2cS + kt_a) = (2aS + kt_c)(2bS + kt_a)(2cS + kt_b).$$

Đặt $P(a, b, c) = (2aS+kt_b)(2bS+kt_c)(2cS+kt_a)-(2aS+kt_c)(2bS+kt_a)(2cS+kt_b)$ thì ta thấy $P(t, t, c) = P(t, c, t) = P(c, t, t) = P(a, b, -a - b) = 0$ nên đa thức trên có thể phân tích thành nhân tử có dạng

$$P(a, b, c) = (a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)Q(a, b, c).$$

Thực hiện phép tách và rút gọn, ta tìm được $Q(a, b, c) = kS(ka + kb + kc + S)$ nên đẳng thức ở trên tương đương với

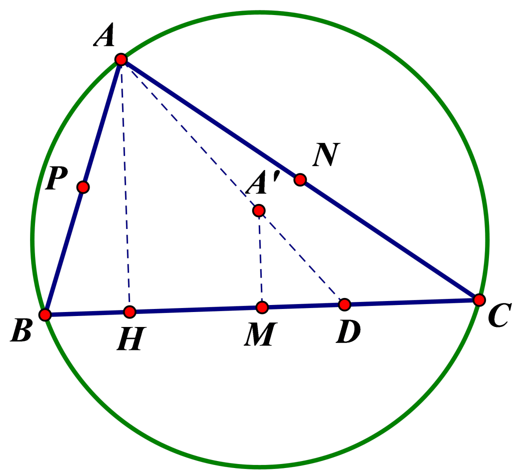
$$kS(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)(ka + kb + kc + S) = 0.$$

Do tam giác này nhọn không cân nên $(a - b)(b - c)(c - a) \neq 0$ và do đó, chỉ có $k = 0$ là thỏa mãn. Dễ thấy khi đó, các đoạn AA', BB', CC' chính là các đường trung tuyến của tam giác nên chúng phải đồng quy.

2. Nếu các vector $\left(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA'}\right), \left(\overrightarrow{NO}, \overrightarrow{NB'}\right), \left(\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PC'}\right)$ đồng thời cùng hướng.

   Ta xét trường hợp các điểm A', B', C' đều nằm trong tam giác. Giả sử D là giao điểm của AA' với cạnh BC. Ta sẽ tính tỉ lệ $\frac{DB}{DC}$. Tương tự trên, ta cũng có

$$\frac{MD}{HD} = \frac{k}{h_a} \Rightarrow \frac{MD}{HM} = \frac{k}{h_a - k} \Rightarrow MD = \frac{k}{h_a - k}\frac{b^2 - c^2}{2a} = \frac{k(b^2 - c^2)}{2a(h_a - k)}.$$



Suy ra
$$DB = \frac{k(b^2-c^2)}{2a(h_a-k)} + \frac{a}{2} = \frac{2aS - k(c^2+a^2-b^2)}{2a(h_a-k)}.$$
Tương tự, ta cũng tính được
$$DC = \frac{a}{2} - \frac{k(b^2-c^2)}{2a(h_a-k)} = \frac{2aS - k(b^2+a^2-c^2)}{2a(h_a-k)}.$$
Do đó $\frac{DB}{DC} = \frac{2aS-kt_b}{2aS-kt_c}$. Giả sử E, F lần lượt là giao điểm của BB', CC' với các cạnh đối diện. Tương tự trên, ta cũng tính được
$$\frac{EC}{EA} = \frac{2bS-kt_c}{2bS-kt_a}, \frac{FA}{FB} = \frac{2cS-kt_a}{2cS-kt_b}.$$
Nhân tương ứng các đẳng thức này lại để tìm điều kiện của các đoạn thẳng AD, BE, CFđồng quy, ta có
$$\frac{2aS-kt_b}{2aS-kt_c} \cdot \frac{2bS-kt_c}{2bS-kt_a} \cdot \frac{2cS-kt_a}{2cS-kt_b} = 1$$
$$\Leftrightarrow (2aS-kt_b)(2bS-kt_c)(2cS-kt_a) = (2aS-kt_c)(2bS-kt_a)(2cS-kt_b)$$
Phân tích biểu thức này thành nhân tử tương tự như trên, ta có
$$4kS(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)(ka+kb+kc-2S) = 0.$$
Dễ thấy rằng $S(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ và $k=0$ đã xét ở trên nên $ka+kb+kc-2S=0$ hay $k = \frac{2S}{a+b+c} = r$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta thấy rằng trường hợp các đoạn thẳng nằm ngoài tam giác cũng được xử lí tương tự bằng cách dùng độ dài đại số hoặc xét các trường hợp.

Khi đã kiểm tra hết các trường hợp, ta có kết luận sau:

- Nếu $\left(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA'}\right), \left(\overrightarrow{NO}, \overrightarrow{NB'}\right), \left(\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PC'}\right)$ đồng thời cùng hướng thì $k=r$.
- Nếu $\left(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA'}\right), \left(\overrightarrow{NO}, \overrightarrow{NB'}\right), \left(\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PC'}\right)$ đồng thời ngược hướng thì $k=0$.

□

3. Vận dụng việc dựng hệ trục tọa độ

Bài toán 8. *(Việt Nam TST 1995) Cho tam giác ABC có $AB=c, BC=a, CA=b$. Lấy sáu điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ phân biệt không trùng với A, B, C và các điểm A_1, A_2thuộc đường thẳng BC, B_1, B_2thuộc đường thẳng CA, các điểm C_1, C_2thuộc đường thẳng AB. Gọi α, β, γ là các số thực xác định bởi*
$$\overrightarrow{A_1A_2} = \frac{\alpha}{a}\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{B_1B_2} = \frac{\beta}{b}\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{C_1C_2} = \frac{\gamma}{c}\overrightarrow{AB}.$$

Xét các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AB_1C_1, AB_2C_2, BC_1A_1, BC_2A_2, CA_1B_1, CA_2B_2$ và gọi d_A, d_B, d_Clần lượt là các trục đẳng phương của cặp đường tròn đi qua A, B, C. Chứng minh rằng: d_A, d_B, d_C đồng quy khi và chỉ khi $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$.

Lời giải. Trước hết, ta nêu định nghĩa sau: Cho tam giác ABC và điểm M bất kì, khoảng cách đại số từ M đến BC là khoảng cách từ M đến BC nhận thêm dấu + nếu M cùng phía với A so với BC và nhận thêm dấu – trong trường hợp ngược lại. Tương tự với khoảng cách từ M đến CA và AB. Dễ thấy các số α, β, γ đã cho khác 0 do các điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$là phân biệt.

Xét cặp đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_1C_1, AB_2C_2; ta sẽ chứng minh rằng trục đẳng phương của chúng chính là tập hợp các điểm có khoảng cách đại số đến BC và CA tỉ lệ với γ, β.

Thật vậy, trong hệ trục tọa độ vuông góc Oxy lấy điểm $A(0;0)$, B thuộc chiều dương của Ox và $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \alpha,\ 0^0 < \alpha < 180^0$. Khi đó: $\frac{\overrightarrow{AB}}{c} = (1,0), \frac{\overrightarrow{AC}}{b} = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$. Đặt $B_1(b_1\cot\varphi, b_1),\ B_2(b_2\cot\varphi, b_2),\ C_1(c_1, 0),\ C_2(c_2, 0),\ b_1, b_2 \neq 0, b_1 \neq b_2, c_1, c_2 \neq 0, c_1 \neq c_2$. Mà $\overrightarrow{B_1B_2} = \frac{\beta}{b}\overrightarrow{CA} \Rightarrow (b_2 - b_1)\cot\varphi; b_2 - b_1) = \beta(-\cos\varphi; \sin\varphi) \Rightarrow b_2 - b_1 = \beta\sin\varphi$ $\overrightarrow{C_1C_2} = \frac{\gamma}{c}\overrightarrow{AB} \Rightarrow (c_2 - c_1; 0) = \gamma(1;0) \Rightarrow c_2 - c_1 = \gamma$. Đường tròn (AB_1C_1) đi qua hai điểm A và $C-1$ nên phương trình có dạng là

$$x^2 + y^2 - c_1x - \lambda_1 y = 0, \lambda_1 \in \mathbb{R},$$

nó cũng đi qua B_1 nên

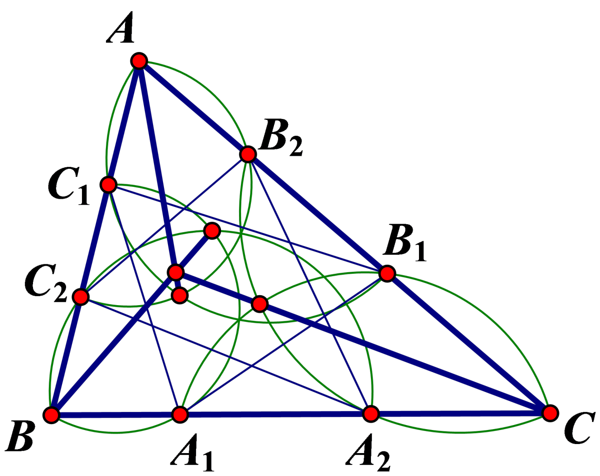
$$\lambda_1 = \frac{b_1 - c_1\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Hoàn toàn tương tự, (AB_2C_2) có phương trình là

$$x^2 + y^2 - c_1x - \lambda_2 y = 0 \text{ với } \lambda_1 = \frac{b_2 - c_2\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Trục đẳng phương của hai đường tròn này là:

$$(c_2 - c_1)x + (\lambda_2 - \lambda_1)y = 0 \Leftrightarrow \gamma x - \frac{\beta + \gamma\cos\varphi}{\sin\varphi}y = 0 \Rightarrow \frac{y}{x\sin\varphi - y\cos\varphi} = \frac{\gamma}{\beta}.$$



Hơn nữa, y chính là khoảng cách đại số từ $M(x, y)$ đến AB; còn $x\sin\varphi - y\cos\varphi$ chính là khoảng cách đại số từ $M(x, y)$ đến AC. Tức là quỹ tích các điểm có khoảng cách đại số đến AB và AC tỉ lệ với $\frac{\gamma}{\beta}$ là trục đẳng phương của AB_1C_1, AB_2C_2. Nhận xét trên được chứng minh.

Với mỗi điểm M trong mặt phẳng, kí hiệu X, Y, Zlà khoảng cách đại số từ M đến các cạnh BC, CA, AB thì dễ thấy rằng, ta luôn có $aX + bY + cZ = 2S$(với S là diện tích tam giác ABC) và ngược lại, mỗi bộ(X, Y, Z) thỏa mãn $aX + bY + cZ = 2S$ xác định duy nhất 1 điểm M.

Do đó, trục đẳng phương của các cặp đường tròn là:

$$(d_A) : \frac{Y}{\beta} = \frac{Z}{\gamma},\ (d_B) : \frac{Z}{\gamma} = \frac{X}{\alpha},\ (d_C) : \frac{X}{\alpha} = \frac{Y}{\beta}.$$

Suy ra, điểm chung của ba đường thẳng d_A, d_B, d_C(nếu có) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} aX + bY + cZ = 2S \\ \dfrac{X}{\alpha} = \dfrac{Y}{\beta} = \dfrac{Z}{\gamma} \end{cases} \Rightarrow \frac{X}{\alpha} = \frac{Y}{\beta} = \frac{Z}{\gamma} = \frac{2S}{a\alpha + b\beta + c\gamma}.$$

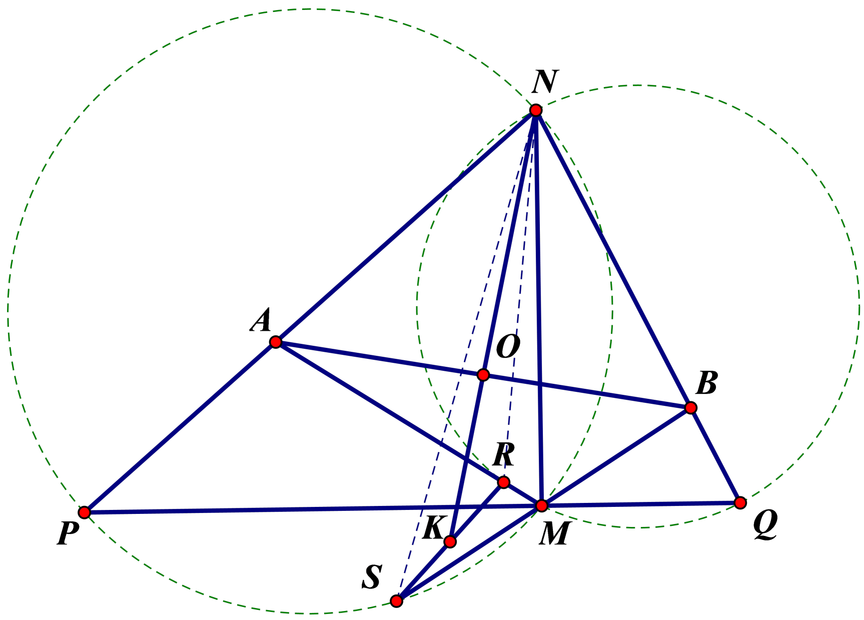
Hệ này có nghiệm khi và chỉ khi $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$ hay ba đường thẳng d_A, d_B, d_Cđồng quy khi và chỉ khi $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$. Ta có đpcm. □

Bài toán 9. *(Tổng quát của bài Việt Nam TST 2009) Trên mặt phẳng cho đoạn thẳng AB cố định và M là một điểm không nằm trên đường thẳng đi qua A và B. Gọi N là một điểm bất kì trên phân giác của góc AMB. Đường phân giác ngoài góc AMB cắt các đường thẳng NA, NB lần lượt tại P, Q. Đường thẳng MA cắt đường tròn đường kính NQ tại R, đường thẳng MB cắt đường tròn đường kính NP tại S và R, S khác M. Chứng minh rằng đường trung tuyến ứng với đỉnh N của tam giác NRS luôn đi qua một điểm cố định với mọi vị trí của M và N.*

Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ với gốc tọa độ trùng với M và đường thẳng PQ chính là trục hoành.

Đặt $P(-b; 0), Q(c; 0), N(0; a)$ với $a, b, c > 0$. Do MN là phân giác của góc $\angle AMB$ nên MA đối xứng với MB qua trục tung MN. Suy ra ta có thể gọi $\overrightarrow{u_1} = (d; 1)$vector chỉ phương của đường thẳng đi qua M và cắt NQ ở B, $\overrightarrow{u_2} = (-d; 1)$là vector chỉ phương của đường thẳng đi qua M và cắt NP ở A. Phương trình đường thẳng NP là $\frac{x}{c} + \frac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow ax + cy = ca$, phương trình đường thẳng qua M và có vector chỉ phương là $\overrightarrow{u_1} = (d; 1)$ là $x = dy$. Tọa độ của B chính là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} ax + cy = ca \\ x = dy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (ad + c)y = ca \\ x = dy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{ca}{ad + c} \\ x = \dfrac{cda}{ad + c} \end{cases}$$



Do đó, tọa độ của B là $B\left(\frac{cda}{ad+c}; \frac{ca}{ad+c}\right)$. Tương tự, ta tính được $A\left(\frac{-bda}{ad+b}; \frac{ba}{ad+b}\right)$. Phương trình đường tròn đường kính NP là

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+bx-ay=0.$$

Giao điểm S của đường thẳng MB với đường tròn này có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2+bx-ay=0 \\ x=dy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d^2y^2+y^2+bdy-ay=0 \\ x=dy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{a-bd}{d^2+1} \\ x=\dfrac{d(a-bd)}{d^2+1} \end{cases}$$

Do đó, tọa độ của S là $S\left(\frac{d(a-bd)}{d^2+1}; \frac{a-bd}{d^2+1}\right)$. Tương tự, tọa độ giao điểm R là $R\left(\frac{d(-a+cd)}{d^2+1}; \frac{a-cd}{d^2+1}\right)$. Tọa độ trung điểm I của AB chính là

$$I\left(\frac{1}{2}\left[\frac{cda}{ad+c}-\frac{bda}{ad+b}\right]; \frac{1}{2}\left[\frac{ca}{ad+c}+\frac{ba}{ad+b}\right]\right)$$

hay

$$I\left(\frac{a^2d^2(c-b)}{2(ad+b)(ad+c)}; \frac{a(abd+acd+2bc)}{2(ad+b)(ad+c)}\right).$$

Ta có

$$\overrightarrow{NI}=\left(\frac{a^2d^2(c-b)}{2(ad+b)(ad+c)}; \frac{-a^2d(b+c+2ad)}{2(ad+b)(ad+c)}\right) \parallel \left(d(c-b); -(b+c+2ad)\right).$$

Gọi K là trung điểm RS thì tọa độ của K là $K\left(\frac{d^2(c-b)}{d^2+1}; \frac{2a-bd-dc}{d^2+1}\right)$. Ta cũng có

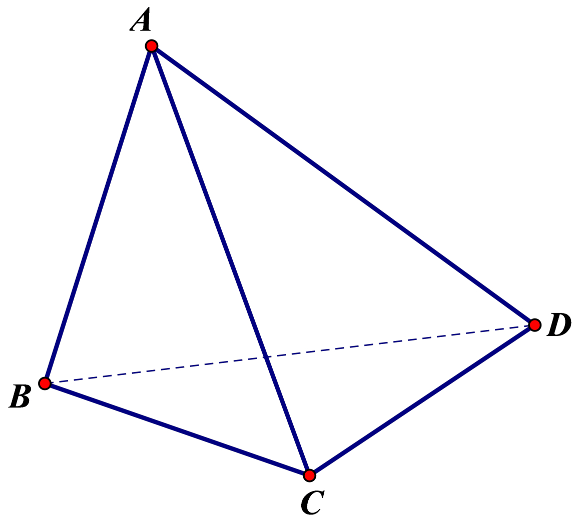
$$\overrightarrow{NK}=\left(\frac{d^2(c-b)}{2(d^2+1)}; \frac{-d(2ad+b+c)}{2(d^2+1)}\right) \parallel \left(d(c-b); -(2ad+b+c)\right).$$

Dễ thấy rằng $\overrightarrow{NI}$ cùng phương với $\overrightarrow{NK}$ nên ba điểm N, I, K thẳng hàng. Ta có đpcm. □

Bài toán 10. *(Việt Nam TST 1990) Cho tứ diện mà mỗi cặp cạnh đối đều có tích độ dài là ℓ. Gọi góc giữa các cặp cạnh đó là α, β, γ và các bán kính của các cặp đường tròn ngoại tiếp các mặt của tứ diện là R_1, R_2, R_3, R_4. Chứng minh rằng:* $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \geq \frac{\ell}{\sqrt{R_1R_2R_3R_4}}$.

Lời giải. Xét tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ và kí hiệu $a_{ij} = |A_{ij}|, 1 \leq i, j \leq 4, i \neq j$. Gọi α, β, γ lần lượt là các góc tạo bởi các cặp cạnh chéo nhau là A_1A_2, A_3A_4; A_1A_3, A_2A_4; A_1A_3, A_2A_4; S_1, S_2, S_3, S_4 và R_1, R_2, R_3, R_4 lần lượt là diện tích và bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác $A_2A_3A_4, A_3A_4A_1, A_4A_1A_2, A_1A_2A_3$. Trước hết, ta sẽ chứng minh đẳng thức sau:

$$4(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2) = (a_{12}.a_{34}.\sin\alpha)^2 + (a_{13}.a_{24}.\sin\beta)^2 + (a_{13}.a_{24}.\sin\gamma)^2.$$



Thật vậy, trong không gian $Oxyz$, xét tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có tọa độ các đỉnh là

$$A_1(a_1, 0, 0), A_2(0, a_2, 0), A_3(0, 0, a_3), A_4(x, y, z).$$

Khi đó $\overrightarrow{A_1A_2} = (-a_1, a_2, 0), \overrightarrow{A_1A_3} = (-a_1, 0, -a_3)$, suy ra

$$4S_4^2 = S_{A_1A_2A_3}^2 = \left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right| = a_1^2a_2^2 + a_2^2a_3^2 + a_3^2a_1^2.$$

Ta cũng có $\overrightarrow{A_1A_4} = (x - a_1, y, z), \overrightarrow{A_2A_4} = (x, y - a_2, z)$, suy ra

$$\overrightarrow{A_1A_4} \times \overrightarrow{A_2A_4} = (yz - z(y - a_2), (x - a_1)z - zx, (x - a_1)(y - a_2) - xy) = (za_2, -za_1, -a_1y - a_2x + a_1a_2).$$

Do đó

$$\Rightarrow 4S_3^2 = S_{A_1A_2A_4}^2 = \left|\overrightarrow{A_1A_4} \times \overrightarrow{A_2A_4}\right|^2 = z^2(a_1^2 + a_2^2) + (xa_2 + ya_1 - a_1a_2)^2.$$

Tương tự, ta có

$$\Rightarrow 4S_2^2 = S_{A_1A_3A_4}^2 = \left|\overrightarrow{A_2A_4} \times \overrightarrow{A_3A_4}\right|^2 = y^2(a_3^2 + a_1^2) + (xa_3 + za_1 - a_1a_3)^2$$

và

$$\Rightarrow 4S_1^2 = S_{A_1A_2A_4}^2 = \left|\overrightarrow{A_1A_4} \times \overrightarrow{A_2A_4}\right|^2 = x^2(a_2^2 + a_3^2) + (ya_3 + za_2 - a_2a_3)^2.$$

Từ $a_1a_2.a_3a_4 = a_1a_3.a_2a_4 = a_1a_4.a_2a_3 = \ell$, ta có:

$$\ell^2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) = 4(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2) =$$
$$= 4\left[\left(\frac{a_1a_2.a_2a_3.a_3a_1}{4R_4}\right)^2 + \left(\frac{a_2a_3.a_3a_4.a_4a_2}{4R_1}\right)^2 + \left(\frac{a_3a_4.a_4a_1.a_1a_3}{4R_2}\right)^2 + \left(\frac{a_4a_1.a_1a_2.a_2a_4}{4R_3}\right)^2\right]$$
$$\geq \sqrt[4]{\left(\frac{a_1a_2.a_2a_3.a_3a_1}{4R_4}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_2a_3.a_3a_4.a_4a_2}{4R_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_3a_4.a_4a_1.a_1a_3}{4R_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_4a_1.a_1a_2.a_2a_4}{4R_3}\right)^2} =$$
$$= \frac{\sqrt[4]{(a_1a_2 \cdot a_2a_3 \cdot a_3a_4 \cdot a_4a_1 \cdot a_1a_3 \cdot a_2a_4)^4}}{\sqrt{R_1R_2R_3R_4}} = \frac{\ell^3}{\sqrt{R_1R_2R_3R_4}}$$

Do đó: $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \geq \frac{\ell}{\sqrt{R_1R_2R_3R_4}}$. Đây chính là điều phải chứng minh. □

4. Biến đổi vector

Bài toán 11. *(Việt Nam TST 1990) Trong mặt phẳng cho đa giác lồi $M_0M_1M_2...M_{2n}(n \geq 1)$ mà $2n + 1$cùng nằm trên một đường tròn (C) có bán kính R. Giả sử điểm A nằm trong đa giác lồi đó sao cho các góc $\widehat{M_0AM_1}, \widehat{M_1AM_2}, \widehat{M_2AM_3}, ..., \widehat{M_{2n}AM_0}$ đều bằng nhau và bằng $\frac{2\pi}{2n+1}$. Cho M là một điểm bất kì nằm trong đường tròn không trùng với tâm của (C) và B là điểm nằm trong (C) sao cho AB vuông góc với đường kính của (C) đi qua A. Chứng minh rằng:*

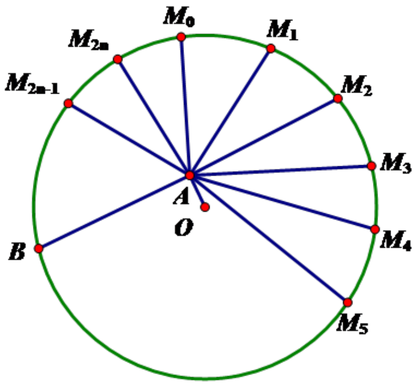
$$\frac{2n+1}{\frac{1}{AM_0} + \frac{1}{AM_1} + \frac{1}{AM_2} + ... + \frac{1}{AM_{2n+1}}} < AB < \frac{AM_0 + AM_1 + AM_2 + ... + AM_{2n}}{2n+1} < R$$

Lời giải. Do các góc $\widehat{M_0AM_1}, \widehat{M_1AM_2}, ..., \widehat{M_{2n}AM_0}$ đều bằng nhau và bằng $\frac{2\pi}{2n+1}$ nên nếu xét các vector đơn vị $AM'_0, AM'_1, AM'_2, ..., AM'_{2n}$lần lượt đặt trên các đoạn tương ứng là $AM_0, AM_1, AM_2, ..., AM_{2n}$ thì đa giác $M'_0M'_1M'_2...M'_{2n}$ là đều và có A là trọng tâm. Do đó

$$\overrightarrow{AM'_0} + \overrightarrow{AM'_1} + \overrightarrow{AM'_2} + ... + \overrightarrow{AM'_{2n}} = \overrightarrow{0}$$

hay

$$\frac{\overrightarrow{AM_0}}{AM_0} + \frac{\overrightarrow{AM_1}}{AM_1} + \frac{\overrightarrow{AM_2}}{AM_2} + ... + \frac{\overrightarrow{AM_{2n}}}{AM_{2n}} = \overrightarrow{0}.$$



Ta có:

$$OM_0 + OM_1 + \ldots + OM_{2n} = OM_0.\frac{AM_0}{AM_0} + OM_1.\frac{AM_1}{AM_1} + \ldots + OM_{2n}.\frac{AM_{2n}}{AM_{2n}}$$
$$\geq \frac{\overrightarrow{OM_0}.\overrightarrow{AM_0}}{AM_0} + \frac{\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{AM_1}}{AM_1} + \frac{\overrightarrow{OM_2}.\overrightarrow{AM_2}}{AM_2} + \ldots + \frac{\overrightarrow{OM_{2n}}.\overrightarrow{AM_{2n}}}{AM_{2n}} =$$
$$= \frac{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_0})\overrightarrow{AM_0}}{AM_0} + \frac{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_1})\overrightarrow{AM_1}}{AM_1} + \frac{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_2}).\overrightarrow{AM_2}}{AM_2} + \ldots + \frac{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_{2n}}).\overrightarrow{AM_{2n}}}{AM_{2n}} =$$
$$= \overrightarrow{OA}.\left(\frac{\overrightarrow{AM_0}}{AM_0} + \frac{\overrightarrow{AM_1}}{AM_1} + \frac{\overrightarrow{AM_2}}{AM_2} + \ldots + \frac{\overrightarrow{AM_{2n}}}{AM_{2n}}\right) + \left(\frac{AM_0^2}{AM_0} + \frac{AM_1^2}{AM_1} + \frac{AM_2^2}{AM_2} + \ldots + \frac{AM_{2n}^2}{AM_{2n}}\right) =$$
$$= AM_0 + AM_1 + AM_2 + \ldots + AM_{2n}.$$

Suy ra

$$(2n+1)R > AM_0 + AM_1 + AM_2 + \ldots + AM_{2n} \Leftrightarrow R > \frac{AM_0 + AM_1 + AM_2 + \ldots + AM_{2n}}{2n+1}.$$

Tiếp theo, từ đẳng thức

$$\frac{\overrightarrow{AM_0}}{AM_0} + \frac{\overrightarrow{AM_1}}{AM_1} + \frac{\overrightarrow{AM_2}}{AM_2} + \ldots + \frac{\overrightarrow{AM_{2n}}}{AM_{2n}} = \overrightarrow{0},$$

ta thấy rằng

$$\overrightarrow{OA}\left(\frac{1}{AM_0} + \frac{1}{AM_1} + \ldots + \frac{1}{AM_{2n}}\right) = \frac{\overrightarrow{OM_0}}{AM_0} + \frac{\overrightarrow{OM_1}}{AM_1} + \ldots + \frac{\overrightarrow{OM_{2n}}}{AM_{2n}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{AM_i} = \sum_{i=0}^{2n}\frac{\overrightarrow{OM_i}}{AM_i}.$$

Bình phương hai vế của đẳng thức này, ta được

$$OA^2\left(\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{AM_i}\right)^2=\left(\sum_{i=0}^{2n}\frac{\overrightarrow{OM_i}}{AM_i}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow OA^2\left(\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{AM_i^2}+2\sum_{0\le i<j\le 2n}\frac{1}{AM_i.AM_j}\right)=R^2\left(\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{AM_i^2}\right)+2\sum_{0\le i<j\le 2n}\frac{\overrightarrow{OM_i}.\overrightarrow{OM_j}}{AM_i.AM_j}$$

$$\Leftrightarrow (R^2-OA^2)\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{AM_i^2}=2\left(\sum_{0\le i<j\le 2n}\frac{OA^2}{AM_i.AM_j}-\sum_{0\le i<j\le 2n}\frac{\overrightarrow{OM_i}.\overrightarrow{OM_j}}{AM_i.AM_j}\right)$$

$$\Leftrightarrow AB^2\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{AM_i^2}=2\left(\sum_{0\le i<j\le 2n}\frac{OA^2}{AM_i.AM_j}-\sum_{0\le i<j\le 2n}\frac{\overrightarrow{OM_i}.\overrightarrow{OM_j}}{AM_i.AM_j}\right)\ (*)$$

Ta sẽ rút gọn tổng $\sum\limits_{0\le i<j\le 2n}\frac{\overrightarrow{OM_i}.\overrightarrow{OM_j}}{AM_i.AM_j}$. Ta vẫn sử dụng các tính chất của tích vô hướng:

$$2\sum_{0\le i<j\le 2n}\frac{\overrightarrow{OM_i}.\overrightarrow{OM_j}}{AM_i.AM_j}=\sum_{0\le i<j\le 2n}\frac{OM_i^2+OM_j^2-M_iM_j^2}{AM_i.AM_j}$$
$$=\sum_{0\le i<j\le 2n}\frac{2R^2}{AM_i.AM_j}-\sum_{0\le i<j\le 2n}\frac{M_iM_j^2}{AM_i.AM_j}$$
$$=\sum_{0\le i<j\le 2n}\frac{2R^2}{AM_i.AM_j}-\sum_{0\le i<j\le 2n}\frac{AM_i^2+AM_j^2-2AM_i.AM_j.\cos M_iAM_j}{AM_i.AM_j}$$
$$=\sum_{0\le i<j\le 2n}\frac{2R^2}{AM_i.AM_j}-\sum_{0\le i,j\le 2n,i\ne j}\frac{AM_i}{AM_j}+2\sum_{0\le i<j\le 2n}\cos M_iAM_j$$

Ta sẽ chứng minh rằng $\sum\limits_{0\le i<j\le 2n}\cos M_iAM_j=-\frac{2n+1}{2}$ (**). Thật vậy, Ta thấy rằng $C_{2n+1}^2=n(2n+1)$ góc $M_iAM_j, 0\le i<j\le 2n$ có thể chia thành $2n+1$ bộ, trong đó, mỗi bộ gồm các góc $\frac{k2\pi}{2n+1}, 1\le k\le n$. Hơn nữa

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k2\pi}{2n+1}\sin\frac{\pi}{2n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2n+1}\right)-\sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{2n+1}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi(2n+1)}{2n+1}-\sin\frac{\pi}{2n+1}\right)$$
$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k2\pi}{2n+1}\sin\frac{\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2n+1}\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k2\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}$$

Do đó, (**) được chứng minh. Do đó, tổng $\sum\limits_{0\le i<j\le 2n}\frac{\overrightarrow{OM_i}.\overrightarrow{OM_j}}{AM_i.AM_j}$ chính là

$$2\sum_{0\le i<j\le 2n}\frac{\overrightarrow{OM_i}.\overrightarrow{OM_j}}{AM_i.AM_j}=\sum_{0\le i<j\le 2n}\frac{2R^2}{AM_i.AM_j}-\sum_{0\le i,j\le 2n,i\ne j}\frac{AM_i}{AM_j}-(2n+1)$$
$$=\sum_{0\le i<j\le 2n}\frac{2R^2}{AM_i.AM_j}-\left(\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{AM_i}\right)\left(\sum_{i=0}^{2n}AM_i\right)$$

Thay vào đẳng thức (*), ta được

$$AB^2\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{AM_i^2}=2\sum_{0\le i<j\le 2n}\frac{OA^2}{AM_i.AM_j}-\sum_{0\le i<j\le 2n}\frac{2R^2}{AM_i.AM_j}+\left(\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{AM_i}\right)\left(\sum_{i=0}^{2n}AM_i\right)$$

$$\Leftrightarrow AB^2\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{AM_i^2}+2\sum_{0\le i<j\le 2n}\frac{AB^2}{AM_i.AM_j}=\left(\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{AM_i}\right)\left(\sum_{i=0}^{2n}AM_i\right)$$

$$\Leftrightarrow AB^2\left(\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{AM_i}\right)^2=\left(\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{AM_i}\right)\left(\sum_{i=0}^{2n}AM_i\right)\Leftrightarrow AB^2=\frac{\sum\limits_{i=0}^{2n}AM_i}{\sum\limits_{i=0}^{2n}\frac{1}{AM_i}}$$

Đến đây, ta thấy hai bất đẳng thức cần chứng minh khá hiển nhiên vì

$$\left(\frac{2n+1}{\sum\limits_{i=0}^{2n}\frac{1}{AM_i}}\right)^2<AB^2<\left(\frac{\sum\limits_{i=0}^{2n}AM_i}{2n+1}\right)^2\Leftrightarrow\left(\frac{2n+1}{\sum\limits_{i=0}^{2n}\frac{1}{AM_i}}\right)^2<\frac{\sum\limits_{i=0}^{2n}AM_i}{\sum\limits_{i=0}^{2n}\frac{1}{AM_i}}<\left(\frac{\sum\limits_{i=0}^{2n}AM_i}{2n+1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(\sum_{i=0}^{2n}AM_i\right)\left(\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{AM_i}\right)>(2n+1)^2.$$

Bất đẳng thức này đúng theo bất đẳng thức Cauchy. Vậy ta có đpcm. □

Bài toán 12 (Sharygin 2017). *Các cevians của tam giác ABC là AA', BB', CC' đồng quy tại P. Đường tròn $(PA'B')$ cắt CA, CB theo thứ tự tại M, N. Đường tròn $(PC'B')$ cắt CA ở K và đường tròn $(PC'A')$ cắt CB ở L. Đường thẳng c đi qua trung điểm của MN và KL. Các đường thẳng a, b được định nghĩa tương tự. Chứng minh rằng a, b, c đồng quy.*

Lời giải. Do 4 điểm C', P, A', L cùng thuộc đường tròn, C là giao điểm của $C'P$và$A'L$ nên:

$$\overline{CC'}.\overline{CP}=\overline{CA'}.\overline{CL}$$

Ta cũng có tứ giác $KC'B'P$ nội tiếp có C là giao điểm của $B'K$ và $C'P$nên:

$$\overline{CC'}.\overline{CP}=\overline{CK}.\overline{CB'}$$

Từ đó suy ra:

$$\overline{CA'}.\overline{CL}=\overline{CK}.\overline{CB'}$$

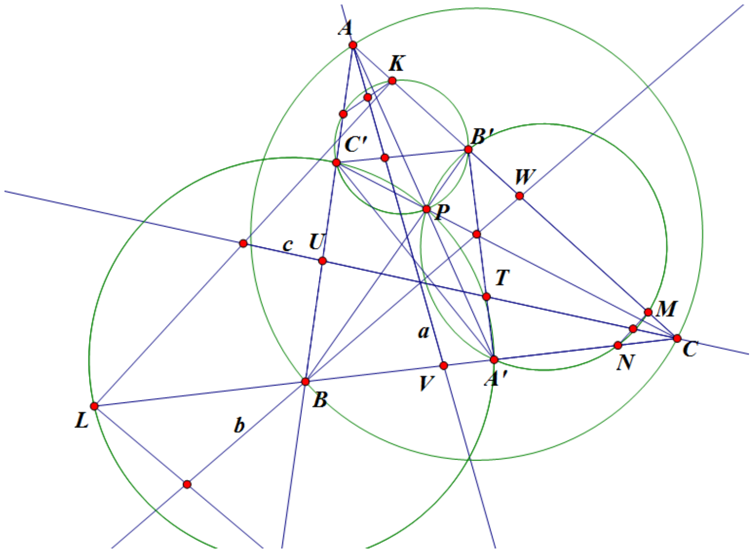
nên tứ giác $KB'A'L$ nội tiếp $\Rightarrow\ \angle KLA'=\angle A'B'C$ Do tứ giác $MNA'B'$ nội tiếp nên: $\angle A'B'C=\angle MNC\,(4)$. Từ đó suy ra

$$\angle A'B'C=\angle MNC\Rightarrow MN\parallel KL.$$

Vậy nên c là đi qua C và trung điểm MN. Mặt khác do $A'B'$ và MN là hai đường đối song nên c chính là đường đối trung của tam giác $CA'B'$ tại đỉnh C.

Gọi T, U lần lượt là giao điểm của c và $B'A', AB$. Do CT là đường đối trung của tam giác $CA'B'$ nên $\frac{TA'}{TB'} = \left(\frac{CA'}{CB'}\right)^2$. Ta có

$$\overrightarrow{CT} = \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{B'T} = \overrightarrow{CB'} + \frac{B'T}{B'A'}\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{CB'} + \frac{B'T}{B'A'}\left(\overrightarrow{CA'} - \overrightarrow{CB'}\right) = \frac{A'T}{A'B'}\overrightarrow{CB'} + \frac{B'T}{B'A'}\overrightarrow{CA'}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{CT} = \frac{A'T}{A'B'}\overrightarrow{CB'} + \frac{B'T}{B'A'}\overrightarrow{CA'} = \frac{A'T}{A'B'}.\frac{CB'}{CB}\overrightarrow{CB} + \frac{B'T}{B'A'}.\frac{CA'}{CA}\overrightarrow{CA}\,(*)$$



Xét phép chiếu vecto theo phương CU xuống đường thẳng AB cho $(*)$ ta có: $\overrightarrow{0} = \frac{A'T}{A'B'}.\frac{CB'}{CB}\overrightarrow{UB} + \frac{B'T}{B'A'}.\frac{CA'}{CA}\overrightarrow{UA}$ Do U, A, Bthẳng hàng nên

$$\frac{\overline{UA}}{\overline{UB}} = \frac{\overrightarrow{UA}}{\overrightarrow{UB}} = -\left(\frac{\frac{A'T}{A'B'}.\frac{CB'}{CB}}{\frac{B'T}{B'A'}.\frac{CA'}{CA}}\right) = -\left(\frac{CA'}{CB'}\right)^2.\frac{CB'}{CA'}.\frac{CA}{CB} = -\frac{CA'}{CB'}.\frac{CA}{CB}$$

Gọi V là giao điểm của a với BC, W là giao điểm của b và AC. Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được

$$\frac{\overline{WC}}{\overline{WA}} = -\frac{BC'}{BA'}.\frac{BC}{BA} \text{ và } \frac{\overline{VB}}{\overline{VC}} = -\frac{AB'}{AC'}.\frac{AB}{AC}$$

Mặt khác do ba đường AA', BB', CC' đồng quy nên theo định lý Ceva cho tam giác ABC:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}.\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1 \Rightarrow \frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Như vậy:

$$\frac{\overline{UA}}{\overline{UB}}\cdot\frac{\overline{WC}}{\overline{WA}}\cdot\frac{\overline{VB}}{\overline{VC}} = \left(-\frac{\overline{CA'}}{\overline{CB'}}\cdot\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}\right)\cdot\left(-\frac{\overline{BC'}}{\overline{BA'}}\cdot\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}\right)\cdot\left(-\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}\cdot\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\right) = -1$$

Vậy theo định lý Ceva cho tam giác ABC với ba đường AV, BW, CU ta được AV, BW, CUđồng quy hay a, b, c đồng quy. □

5. Các bài tập áp dụng.

1. Cho tam giác ABC có AM, AN lần lượt là trung tuyến và phân giác. Đường thẳng vuông góc với AN ở N cắt đường thẳng AM, AB lần lượt tại P và Q. Đường thẳng qua P vuông góc với AB cắt đường thẳng AN ở O. Chứng minh OQ vuông góc với BC.

2. Cho tam giác ABC có $\angle B = 2\angle C$, đường thẳng vuông góc với AC tại C cắt AB ở D. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{AB} - \frac{1}{BD} = \frac{2}{BC}.$$

3. Cho tam giác ABC có AD là đường cao. Một đường thẳng qua D cắt các đường thẳng vuông góc với AB, AC ở A lần lượt tại E và F. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và EF. Chứng minh rằng tam giác AMN vuông tại N.

4. Chứng minh đường tròn Euler tiếp xúc trong với đường tròn nội tiếp và tiếp xúc ngoài với cả ba đường tròn bàng tiếp.

5. Cho tam giác ABC nhọn có M, N lần lượt là trung điểm AB, AC. Gọi P là hình chiếu của N lên BC và X là trung điểm của MP. Các điểm Y và Z xác định tương tự. Chứng minh rằng nếu các đường thẳng AX, BY, CZ đồng quy thì tam giác ABC cân.

6. Cho tam giác ABC có AH là đường cao cố định và các điểm BC di động trên đường thẳng qua H, vuông góc với AH sao cho góc $\angle BAC = 90^0$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh AB, AC. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BEFC$ luôn đi qua hai điểm cố định.

7. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau ở O. Hai điểm A, B lần lượt thay đổi trên a và b sao cho $OA.OB = k^2$ không đổi. Tìm quỹ tích trung điểm đoạn thẳng AB.

8. Cho ba tam giác $A_iB_iC_i, i = 1, 2, 3$, thỏa mãn
$$\begin{aligned}&A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3,\\&B_1C_1 + C_1A_1 = B_2C_2 + C_2A_2 = B_3C_3 + C_3A_3,\\&\angle C_1 = \angle C_2 = \angle C_3.\end{aligned}$$
Chứng minh ba tam giác này bằng nhau.

9. Cho tam giác ABC nhọn không cân nội tiếp (O) và có AD, BE, CF là các phân giác trong và AM, BN, CP là các đường cao. Chứng minh rằng
   i) Chứng minh rằng trung trực của các đoạn thẳng DM, EN, FP thì KHÔNG đồng quy.
   ii) Chứng minh rằng đường thẳng nối hai trực tâm của hai tam giác DEF và MNP thì đi qua O.

TAM GIÁC CÓ ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA HAI TÂM NỘI TIẾP NGOẠI TIẾP SONG SONG MỘT CẠNH

Lê Viết Ân
(Giáo viên PTNK TPHCM)

Tóm tắt. Trong bài viết này, chúng tôi xin giới thiệu về một loại tam giác với một điều kiện đặc biệt và khảo sát các tính chất liên quan đến nó, đặc biệt là các tính chất hình học. Đó là lớp tam giác có đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp song song với một cạnh của tam giác.

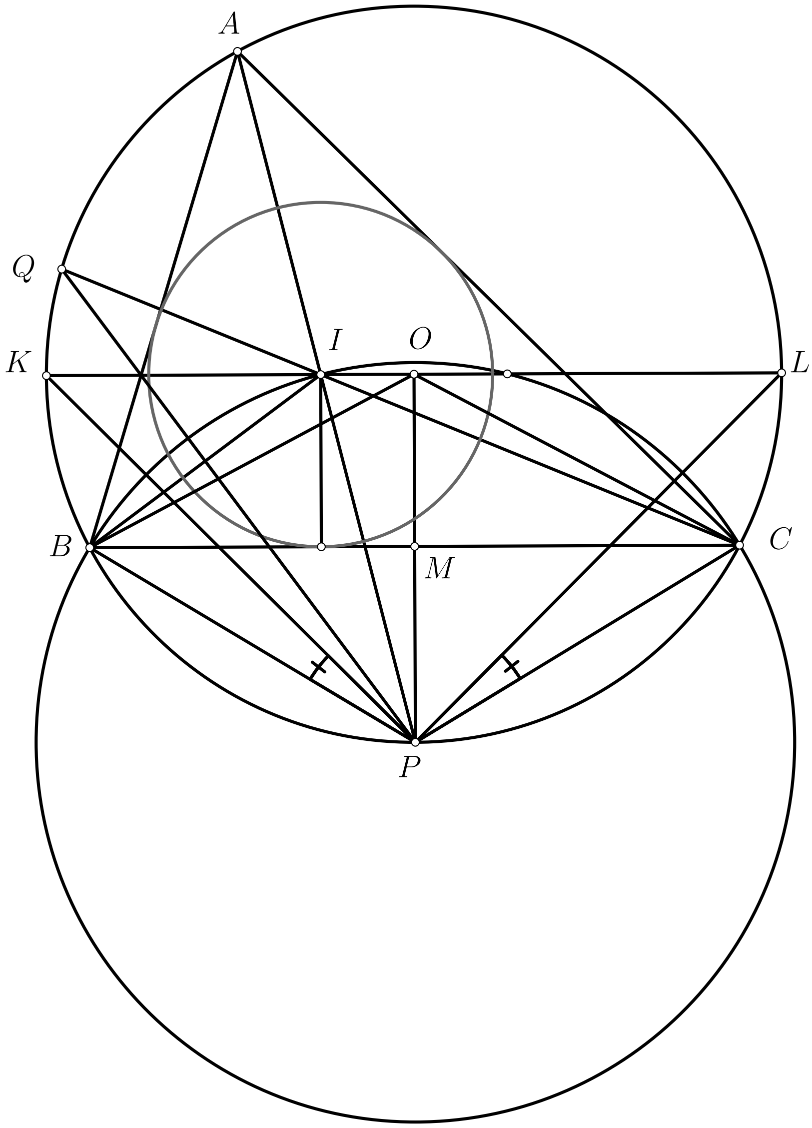
1. Giới thiệu và các kết quả cơ bản

Cho tam giác nhọn ABC có các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, nội tiếp đường tròn $(O; R)$ và ngoại tiếp đường tròn $(I; r)$. Các đường cao AD, BE và CF của tam giác đồng quy tại trực tâm H, và M là trung điểm cạnh BC. Trong phần này sẽ nêu ra một số điều kiện cần và đủ để $OI \parallel BC$.

Xin nêu ra một cách dựng được một tam giác ABC (không đều) thỏa mãn điều kiện $OI \parallel BC$ như sau

• Dựng một đường tròn $(O; R)$;
• Dựng một đường tròn $(P; r')$ với tâm P thuộc (O) và $R < r' < \sqrt{2}R$;
• Dựng dây cung chung BC của (O) và (P);
• Dựng đường thẳng đi qua O và song song với BC cắt (P) tại hai điểm. Gọi I là một trong hai giao điểm đó;
• Dựng giao điểm A khác P của PI và (O). Nối AB và AC ta được tam giác ABC (h.1).

Lời giải. Vì $r' > R$ nên O nằm trong đường tròn (P), suy ra điểm I luôn tồn tại.
Không mất tính tổng quát, giả sử $\widehat{B} > \widehat{C}$. Khi đó $\widehat{C} < 90°$. Dễ thấy I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Đường thẳng OI cắt (O) tại K và L sao cho B, K, L và C nằm trên (O) theo thứ tự đó.
Ta có $OI \parallel BC \perp OP$ và $OK = OP = R$ nên tam giác OKP vuông cân tại O. Do đó $PK = \sqrt{2}R > r' = PB$ nên B nằm trong cung PK (không chứa C) của (O). Do đó A và O nằm cùng phía so với BC nên $\widehat{A} < 90°$. Hơn nữa, $\widehat{KIB} = \widehat{IBC} = \frac{\widehat{B}}{2} < \frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2} = \widehat{QIB}$. Suy ra tia IK nằm giữa hai tia IB và IQ. Do đó điểm K thuộc cung BQ (không chứa C) của (O).



Hình 1

Chú ý rằng Q là trung điểm cung AB của (O). Do đó bốn điểm B, K, Q và A nằm trên (O) theo thứ tự đó. Hệ quả là cung AK lớn hơn cung AQ và cung AQ lớn hơn cung BK. Suy ra $\widehat{APK} > \widehat{APQ} > \widehat{BPK}$. Từ đó với chú ý rằng KL là đường kính của (O) và hai cung BK và CL bằng nhau, ta có

$$\widehat{B} = \widehat{ABC} = \widehat{APC} = \widehat{APL} + \widehat{CPL} = \widehat{APL} + \widehat{BPK} < \widehat{APL} + \widehat{APK} = \widehat{LPK} = 90^\circ.$$

Do đó ABC là tam giác nhọn. $\square$

Nhận xét. Qua phép chứng minh, ta có thể suy ra rằng: nếu tam giác ABC có $OI \parallel BC$ thì tam giác ABC nhọn và không cân tại A.

Trước hết là các kết quả biểu diễn dạng lượng giác sau

Kết quả 1. *Các điều kiện sau đây là tương đương nhau:*
(i) $OI \parallel BC$;
(ii) $\cos A = \frac{r}{R}$;
(iii) $\cos B + \cos C = 1$.

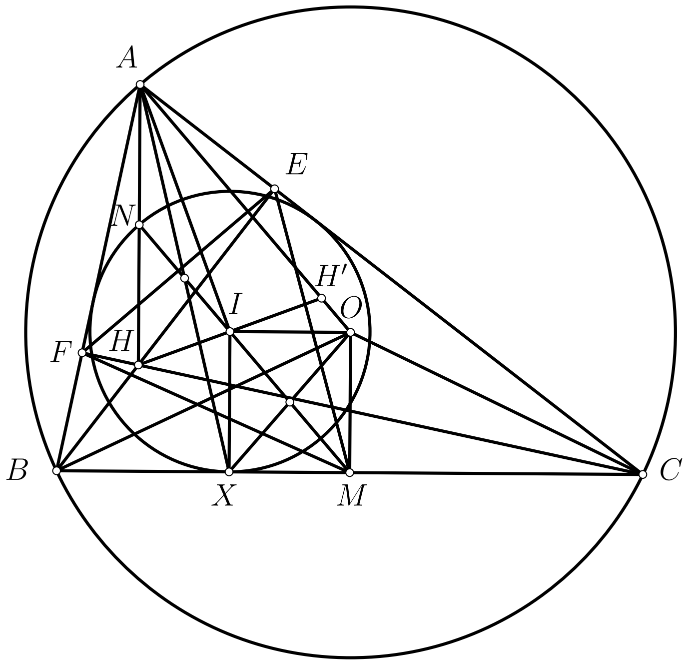
Lời giải. Gọi M là trung điểm của BC(xem h.1 hoặc xem h.2).
Khi đó $\widehat{BOM} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \widehat{A}$. Do đó

$$OM = BO.\cos\widehat{BOM} = R.\cos A.$$

Chú ý hệ thức cơ bản

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{r}{R} + 1.$$

Suy ra $OI \parallel BC \Leftrightarrow OM = r \Leftrightarrow R.\cos A = r \Leftrightarrow \cos A = \frac{r}{R} \Leftrightarrow \cos B + \cos C = 1$. □



Hình 2

Tiếp theo là hệ thức biểu diễn liên quan đến độ dài các cạnh của tam giác

Kết quả 2. *$OI \parallel BC$ khi và chỉ khi $(b+c)(a+b-c)(a-b+c) = 2abc$.*

Lời giải. Sử dụng định lí cosin trong tam giác và (iii) của kết quả 1, ta suy ra

$$OI \parallel BC \Leftrightarrow \cos B + \cos C = 1 \Leftrightarrow \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = 1$$
$$\Leftrightarrow (b+c)(a+b-c)(a-b+c) = 2abc.$$

□

Các kết quả sau liên quan đến R và r:

Kết quả 3. *Các điều kiện sau đây là tương đương nhau:*
(i) *$OI \parallel BC$;*
(ii) *$AH = 2r$;*
(iii) *$IM = R - r$;*
(iv) *$(b-c)^2 = 4R^2 - 8Rr$;*
(v) *$a^2 = 4R^2 - 4r^2$;*
(vi) *$EF = \frac{ar}{R}$.*

Lời giải. (xem h.2). Gọi $(I; r)$ cắt BC tại X.
Theo công thức Euler, ta có

$$OI^2 = R^2 - 2Rr \text{ và } R \geq 2r. \tag{1}$$

Ta có các kết quả quen thuộc cơ bản như sau:

$$AH = 2OM, \tag{2}$$
$$XM = \frac{|b-c|}{2}, \tag{3}$$
$$R^2 = OB^2 = OM^2 + BM^2 = OM^2 + \frac{a^2}{4}, \tag{4}$$
$$IM^2 = OM^2 + OI^2 \overset{(1)}{=} OM^2 + R^2 - 2Rr. \tag{5}$$

Ngoài ra chú ý bất đẳng thức cơ bản của hình thang vuông thì ta có

$$OI \geq XM \text{ và dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } OI \parallel BC. \tag{6}$$

Và vì hai tam giác ABC và AEF đồng dạng nhau nên

$$\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \cos A \Longrightarrow EF = a\cos A. \tag{7}$$

Do đó

$$OI \parallel BC \Longleftrightarrow OM = IM = r \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} AH = 2r,$$
$$OI \parallel BC \Longleftrightarrow OM = r \overset{(5)}{\Longleftrightarrow} IM^2 = r^2 + R^2 - 2Rr \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} IM = R - r,$$
$$OI \parallel BC \overset{(6)}{\Longleftrightarrow} OI^2 = XM^2 \overset{(1),(3)}{\Longleftrightarrow} (b-c)^2 = 4R^2 - 8Rr,$$
$$OI \parallel BC \Longleftrightarrow OM = r \overset{(4)}{\Longleftrightarrow} a^2 = 4R^2 - 4r^2.$$

Cuối cùng, áp dụng (ii) của kết quả 1, ta có $OI \parallel BC \Longleftrightarrow \cos A = \frac{r}{R} \overset{(7)}{\Longleftrightarrow} EF = \frac{ar}{R}$. □

Các kết quả tiếp theo là liên quan đến các tính chất hình học

Kết quả 4. *(Leon Bankoff, [9]) $OI \parallel BC$ khi và chỉ khi $\widehat{AIH} = 90°$.*

Lời giải. Gọi HI cắt AO tại H' (xem h.2).
Điều kiện cần. Nếu $OI \parallel BC$. Khi đó $OIXM$ là hình chữ nhật nên MI đi qua trung điểm của OX. Ta có một kết quả kinh điển là MI đi qua trung điểm của AX. Do đó IM là đường trung bình của tam giác AOX. Suy ra $MI \parallel AO \perp EF$. Chú ý rằng $ME = MF$ nên MI là trung trực của EF. Do đó nếu $N = MI \cap AH$ thì N là trung điểm của AH. Từ đó vì $IH \parallel AO$ nên I là trung điểm HH'. Chú ý rằng AI là phân giác góc $\widehat{HAO}$ nên tam giác AHH' cân tại A và $AI \perp HH'$. Suy ra $\widehat{AIH} = 90°$.

Điều kiện đủ. Nếu $\widehat{AIH} = 90°$. Gọi N là trung điểm của AH. Khi đó dễ thấy $ANMO$ là hình bình hành nên $MN \parallel AO$.

Lại vì $AI \perp HH'$ và $\widehat{HAI} = \widehat{IAO} = \widehat{IAH'}$ nên tam giác AHH' cân tại A và I là trung điểm HH'. Suy ra $IN \parallel AH' \equiv AO \parallel MN$. Do đó ba điểm M, N, I thẳng hàng.

Lại theo kết quả quen thuộc, MI đi qua trung điểm AX. Kết hợp $MI \parallel AO$, suy ra MI là đường trung bình của tam giác AOX. Do đó MI đi qua trung điểm của OX. Từ đó do $OM \parallel IX$ $(\perp BC)$, suy ra $OIXM$ là hình bình hành và $OI \parallel XM \equiv BC$. □

Nhận xét. Từ chứng minh, dễ dàng thấy rằng trung điểm N của AH là điểm Feurbach của tam giác ABC.

Kết quả 5. *$OI \parallel BC$ khi và chỉ khi $BF + CE = BC$.*

Lời giải. Vì tam giác ABC nhọn (xem h.2), ta có

$$\cos B = \frac{BF}{BC} \text{ và } \cos C = \frac{CE}{BC}.$$

Do đó, theo (iii) của kết quả 1, ta có

$$OI \parallel BC \iff \cos B + \cos C = 1 \iff \frac{BF}{BC} + \frac{CE}{BC} = 1 \iff BF + CE = BC.$$

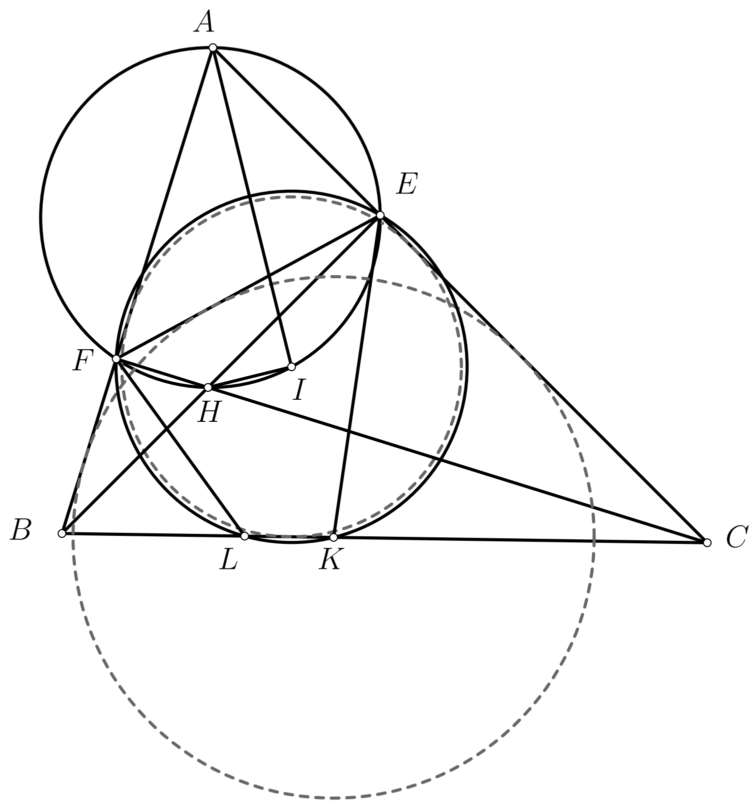
□

2. Một số ví dụ áp dụng

Ví dụ 1. *Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao BE và CF. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC nằm trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác AEF khi và chỉ khi tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác AEF nằm trên cạnh BC.*

Lời giải. Bỏ qua trường hợp tam giác $AB = AC$.
Xét trường hợp $AB < AC$ (xem h.3): gọi H, I thứ tự là trực tâm và tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Khi đó theo kết quả 4 và kết quả 5, ta có

$$I \in \odot(AEF) \iff \widehat{AIH} = 90^\circ \iff BF + CE = BC.$$



Hình 3

Điều kiện cần. Nếu $I \in \odot(AEF)$. Từ (8), suy ra có điểm L nằm trên cạnh BC sao cho $BL = BF$ và $CL = CE$. Gọi K là giao điểm khác L của BC và $\odot(EFL)$.
Vì $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$ nên tứ giác $BCEF$ nội tiếp. Chú ý tam giác BFL cân tại B. Do đó

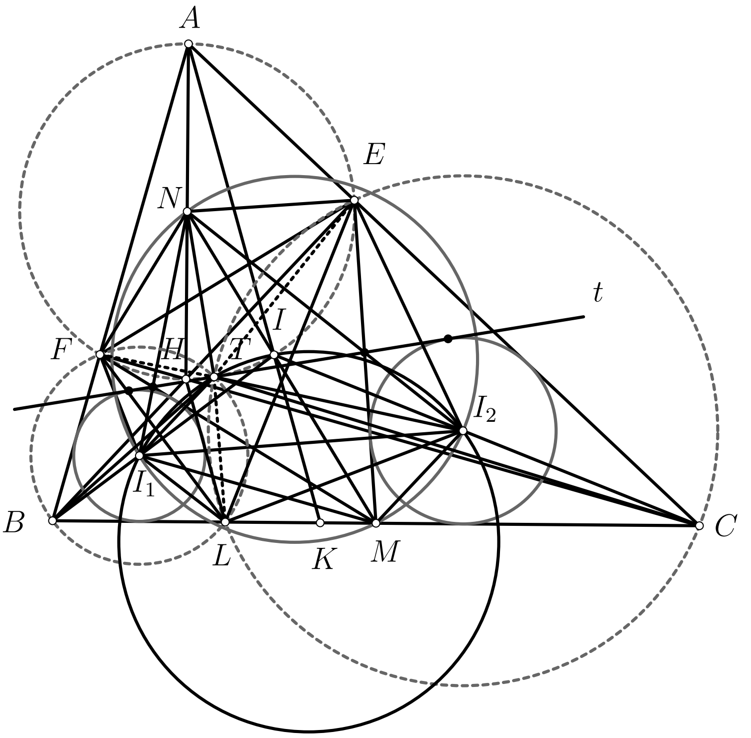
$$\widehat{KEF} = \widehat{BLF} = 90^\circ - \frac{\widehat{CBF}}{2} = 90^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{CEF}}{2} = \frac{\widehat{CEF}}{2}. \qquad (8)$$

Suy ra EK là phân giác của $\widehat{CEF}$.
Chứng minh tương tự, FK là phân giác của $\widehat{BFE}$. Do đó K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác AEF.

Điều kiện đủ. Xin dành cho bạn đọc. □

Ví dụ 2. *Cho tam giác nhọn ABC không cân tại A ngoại tiếp đường tròn (I), có các đường cao BE và CF. M là trung điểm BC. (I_1) và (I_2) thứ tự là đường tròn nội tiếp các tam giác MBF và MCE. Gọi t là tiếp tuyến chung ngoài của (I_1) và (I_2) khác BC. Biết rằng đường tròn (N) ngoại tiếp của tam giác AEF đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.*

(a) *Chứng minh rằng hai tam giác ABC và NI_1I_2 đồng dạng nhau.*
(b) *Chứng minh rằng t tiếp xúc với (N).*
(c) *Chứng minh rằng trực tâm tam giác NI_1I_2 nằm trên t.*
(d) *Chứng minh rằng tiếp điểm của t và (N) là liên hợp đẳng giác của I trong tam giác NI_1I_2.*



Hình 4

Lời giải. (xem h.4).
(a) Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Vì I nằm trên $\odot(AEF)$. Suy ra $\widehat{AIH} = 90°$. Do đó, theo kết quả 4 và kết quả 5, ta có $BF + CE = BC$. Suy ra tồn tại điểm L trên cạnh BC sao cho $BL = BF$ và $CL = CE$. Dễ thấy $\triangle HBF \sim \triangle HCE$ (g.g), suy ra

$$\frac{BL}{CL} = \frac{BF}{CE} = \frac{HB}{HC}.$$

Suy ra HL là phân giác trong của $\widehat{BHC}$. Do đó nếu gọi K là giao của AI và BC thì:

$$\widehat{BLH} = \frac{1}{2}\widehat{BHC} + \widehat{BCH} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{A} + 90° - \widehat{B} = \widehat{C} + \frac{1}{2}\widehat{A} = \widehat{BKA}.$$

Suy ra $HL \parallel AK$. Áp dụng định lí Miquel cho tam giác ABC với ba điểm $L \in BC$, $E \in CA$ và $F \in AB$ ta có $T := \odot(AEF) \cap \odot(BFL) \cap \odot(CEL)$.

Lại có $MB = MF$ và $BF = BL$. Suy ra $I_1L = I_1B = I_1F$ nên I_1 là tâm của $\odot(BFL) \equiv \odot(BFTL)$. Tương tự I_2 là tâm của $\odot(CEL) \equiv \odot(CETL)$.

Do đó NI_1, NI_2 theo thứ tự là trung trực của các đoạn thẳng TF và TE. Vì vậy

$$\widehat{I_1NI_2} = 180^\circ - \widehat{EHF} = \widehat{A}. \tag{9}$$

Mặt khác, vì $MI_1 \perp AB \parallel HC$ và $MI_2 \perp AC \parallel HB$ nên $\widehat{I_1MI_2} = \widehat{BHC} = 180^\circ - \widehat{A}$. Do đó kết hợp với (9), suy ra tứ giác MI_1NI_2 nội tiếp. Từ đó, chú ý rằng $MN \perp EF$ và $MI_2 \perp AC$, ta có

$$\widehat{NI_1I_2} = \widehat{NMI_2} = \widehat{AEF} = \widehat{B}.$$

Lại kết hợp với (9), suy ra $\triangle ABC \sim \triangle NI_1I_2$ (g.g).

(b) Vì $I_1L = I_1T$ và $I_2L = I_2T$ nên I_1I_2 là trung trực của TL. Suy ra T nằm trên t.
Gọi t_1 là đối xứng của MF qua NI_1. Qua phép đối xứng trục NI_1, ta có t_1 tiếp xúc với (I_1). Và chú ý MF tiếp xúc với (N) nên t_1 tiếp xúc với (N) tại T.
Tương tự, nếu t_2 là đối xứng của ME qua NI_2, ta cũng có t_2 tiếp xúc với (N) tại T. Do đó $t_1 \equiv t_2 \equiv t$. Tức là t tiếp xúc với (N) tại T.

(c) Vì t đối xứng với MF qua NI_1 nên đối xứng của M qua NI_1 thuộc t. Tương tự đối xứng của M qua NI_2 cũng thuộc t. Chú ý rằng $M \in \odot(NI_1I_2)$ nên t là đường thẳng Steiner của M đối với tam giác NI_1I_2. Theo kết quả về đường thẳng Steiner, trực tâm của tam giác NI_1I_2 phải nằm trên t.

(d) Trước hết xin phát biểu một bổ đề sau:
Bổ đề. ([5],[6]) *Cho điểm P nằm bên trong tam giác ABC. Gọi Q là điểm liên hợp đẳng giác của P đối với tam giác ABC. Khi đó $AP = AQ$ khi và chỉ khi bốn điểm B, C, P, Q đồng viên.*
Việc chứng minh bổ đề xin dành lại cho bạn đọc như một bài tập nhỏ.

Quay trở lại ví dụ 2. Ta có

$$\widehat{TBC} = \widehat{TBL} = \frac{1}{2}\widehat{TI_1L} = \widehat{TI_1I_2}.$$

Tương tự, $\widehat{TCB} = \widehat{TI_2I_1}$. Suy ra $\triangle TBC \sim \triangle TI_1I_2$ (g.g). Do đó

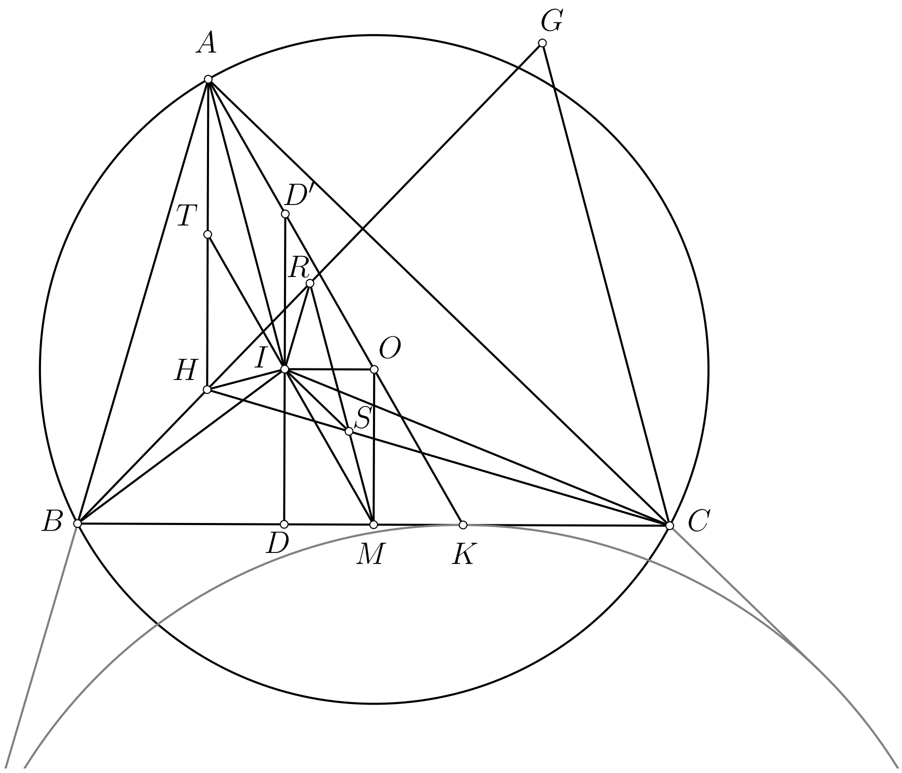
$$\begin{aligned}\widehat{I_1TI_2} &= \widehat{BTC} = \widehat{BTL} + \widehat{CTL} = \widehat{BFL} + \widehat{CEL} = 90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2} + 90^\circ - \frac{\widehat{C}}{2} \\ &= 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2} = \widehat{BCI} = \widehat{I_1II_2}.\end{aligned}$$

Suy ra bốn điểm I_1, I_2, T, I đồng viên. Kết hợp với $NI = NT$ nên theo bổ đề, ta có I và T đẳng giác đối với tam giác NI_1I_2. □

Nhận xét. Các tính chất khác từ cấu hình của ví dụ 2, bạn đọc có thể xem thêm ở phần bài tập đề nghị.

Ví dụ 3. *(**Nguyễn Văn Linh**). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), với I là tâm đường tròn nội tiếp. Gọi R và S theo thứ tự là đối xứng của O qua BI và CI. Chứng minh rằng RS chia đôi BC khi và chỉ khi $OI \parallel BC$.*

Lời giải. (xem h.5).
Chiều thuận. Giả sử RS chia đôi BC. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, M là trung điểm của BC.



Hình 5

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác BCH với cát tuyến $\overline{RSM}$ ta có

$$\frac{\overline{RH}}{\overline{RB}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{SC}}{\overline{SH}} = 1,$$

từ đó chú ý rằng $BR = BC = R_{(O)}$, ta thu được $SH = RH$.
Lại có $IR = IO = IS$ nên $\triangle RHI = \triangle SHI$ (c.c.c).
Suy ra HI là phân giác ngoài góc của $\widehat{BHC}$. Suy ra $\widehat{AIH} = 90°$.
Gọi T là trung điểm AH, D là hình chiếu của I trên BC, ID cắt AO tại D'.
Ta có $TA = TI = TH$, suy ra $\widehat{TIA} = \widehat{TAI} = \widehat{OAI}$, suy ra $IT \parallel AD'$. Suy ra $ATID'$ là hình bình hành.
Ta thu được $ID' = AT = \frac{1}{2}AH = OM$. Suy ra $D'O =\parallel IM$, từ đó T, I, M thẳng hàng hay $IM \parallel AO$, hay AO đi qua tiếp điểm K của đường tròn bàng tiếp góc A với BC.
Lại có $MK = MD$ nên $OM = ID' = ID$. Vậy $OI \parallel BC$.

Chiều đảo. Giả sử $OI \parallel BC$. Xin đưa ra hai cách giải như sau:
• **Cách 1.** Gọi D' là đối xứng của D qua I. Ta có $OM = ID = \frac{1}{2}DD'$ nên $D'O \parallel IM$.
Lại có AD' đi qua tiếp điểm K của đường tròn bàng tiếp góc A với BC và $MI \parallel D'K$, suy ra O thuộc AK.

Gọi T là giao điểm của MI và AH. Ta có $ATID'$ là hình bình hành có AI là phân giác $\widehat{TAD'}$ nên nó là hình thoi. Suy ra $TA = TI = ID' = OM = \frac{1}{2}AH$. Suy ra $\widehat{AIH} = 90°$.
Từ đó HI là phân giác ngoài của $\widehat{BHC}$.
Ta có $\widehat{IRH} = \widehat{IOB} = \widehat{OBC} = \widehat{ABH}$. Tương tự, $\widehat{ISH} = \widehat{ACH}$, suy ra $\widehat{IRH} = \widehat{ISH}$.
Từ đó, dễ thấy $\triangle HIR = \triangle HIS$ (g.c.g).
Suy ra $HR = HS$. Qua C kẻ đường song song với RS cắt BH tại G. Từ đó tam giác HRS cân tại H nên tam giác HGC cân tại H, suy ra $BR = CS = RG$. Vậy RS là đường trung bình tam giác BGC, suy ra RS chia đôi BC.
• **Cách 2.** Gọi J là điểm đối xứng của I qua O; và Y, Z, M theo thứ tự là trung điểm của IB, IC, BC.
Do $OI \parallel BC$ và $OB = OC$ nên $BIJC$ là hình thang cân.
Xét phép vị tự $\mathcal{H}_I^{\frac{1}{2}}$, tâm I với tỉ số $\frac{1}{2}$. Ta có

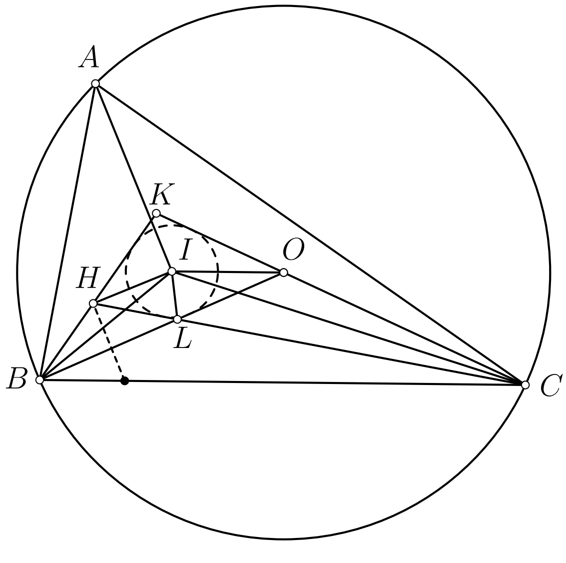
$$\mathcal{H}_I^{\frac{1}{2}} : B \mapsto Y, C \mapsto Z, J \mapsto O.$$

Ta thu được $IOZY$ là hình thang cân, suy ra O nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác IYZ. Ta có R, S, M lần lượt là điểm đối xứng của của O qua IY, IZ, YZ nên R, S, M thẳng hàng trên đường thẳng Steiner của O ứng với tam giác IYZ. Vậy R, S, M thẳng hàng (đpcm). □

Nhận xét. I là trực tâm của tam giác HRS (chứng minh xem như bài tập). Hơn nữa, ví dụ 3 còn có liên quan đến bài tập 11.

Ví dụ 4. *Cho tam giác nhọn ABC với H, O và I thứ tự là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp. Gọi $K = BH \cap CO$ và $L = CH \cap CO$. Chứng minh rằng $OI \parallel BC$ khi và chỉ khi tứ giác $OKHL$ ngoại tiếp.*

Lời giải. (xem h.6)



Hình 6

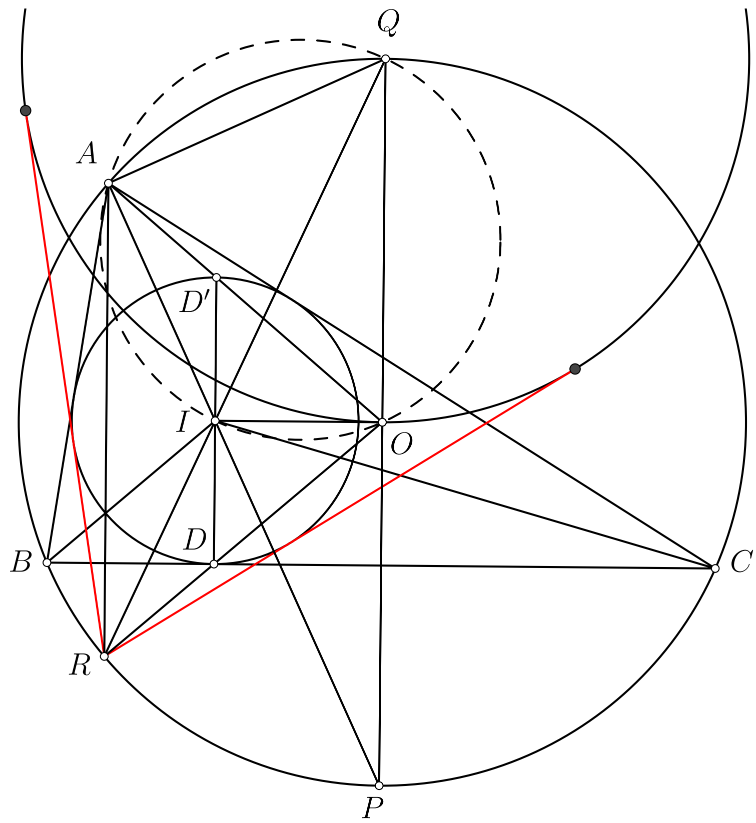
Chiều thuận. Giả sử $OI \parallel BC$. Chú ý rằng tam giác OBC cân tại O nên OI là phân giác ngoài của $\widehat{BOC}$. Ta lại có BI là phân giác $\widehat{OBH} \equiv \widehat{OBL}$, và CI là phân giác $\widehat{OCH} \equiv \widehat{OCL}$. Suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác OBK và là tâm đường bàng tiếp góc C của tam giác OCL. Từ đó suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác $OKHL$ hay tứ giác $OKHL$ ngoại tiếp.

Chiều đảo. Giả sử tứ giác $OKHL$ ngoại tiếp. Khi đó tâm đường tròn nội tiếp của tứ giác $OKHL$ phải thuộc các phân giác của các góc OBH và OCH. Suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp của tứ giác $OKHL$. Từ đó IO là phân giác ngoài của $\widehat{BOC}$. Kết hợp với $OB = OC$ suy ra $OI \parallel BC$. □

Nhận xét. Từ ví dụ 4, chúng ta suy ra kết quả sau đây: $OI \parallel BC$ khi và chỉ khi $HB + HC = 2R_{(O)}$. Hơn nữa, dựa vào ví dụ 4, chúng ta sẽ có chứng minh khác cho kết quả 4: $OI \parallel BC$ khi và chỉ khi $\widehat{AIH} = 90°$.

Ví dụ 5. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) thỏa mãn $OI \parallel BC$. Gọi Q là trung điểm cung lớn BC của (O). Kí hiệu (Q) là đường tròn tâm Q và đi qua O. Chứng minh rằng các tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (I) và (Q) cắt nhau trên (O).*

Lời giải. Gọi P là giao của AI và (O) khác A; (I) tiếp xúc với BC tại D; và D' đối xứng của D qua I; đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác cắt lại (O) tại R (xem h. 7).



Hình 7

Ta có D' thuộc (I) và hơn nữa, theo như ví dụ 3, ta có D' thuộc AO. Chú ý rằng $OI \parallel BC \perp AR$ nên OI là trung trực của AR. Từ đó D đối xứng với D qua OI. Qua phép đối xứng OI, từ $D' \in AO$, suy ra $D \in RO$.
Lại có PQ là trung trực của BC nên $QO \parallel ID$ $(\perp BC)$.
Cuối cùng, dễ thấy tứ giác $AQOI$ nội tiếp đường tròn đường kính QI nên $\widehat{OQI} = \widehat{OAI} = \widehat{IAR} = \widehat{PAR} = \widehat{PQR}$. Do đó hai đường thẳng QI và QR trùng nhau hay QI đi qua R. Vì vậy theo định lí Thales, ta có

$$\frac{\overline{RI}}{\overline{RQ}} = \frac{\overline{ID}}{\overline{QO}} = \frac{ID}{QO} = \frac{R_{(I)}}{R_{(O)}}.$$

Do đó R là tâm vị tự ngoài của hai đường tròn (I) và (O). Từ đó ta có kết luận cho ví dụ 5. □

Nhận xét. Từ cách chứng minh, ta cũng có được R là tiếp điểm của đường tròn A-mixtilinear nội và đường tròn (O) của tam giác ABC. Bạn đọc hãy tự kiểm chứng điều này. Hơn nữa, dễ dàng nhận thấy mô hình ví dụ này có tính chất nhận đường thẳng OI làm trục đối xứng, điều này suy ra đường tròn tâm P bán kính PO tiếp xúc với hai đường thẳng AB và AC.

Ví dụ 6. *Cho tam giác ABC không cân tại A, nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) thỏa mãn $OI \parallel BC$. Các điểm P, Q khác A, theo thứ tự thuộc CA, AB sao cho $BP = BA$ và $CQ = CA$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của CP và BQ. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác AMN đi qua I.*

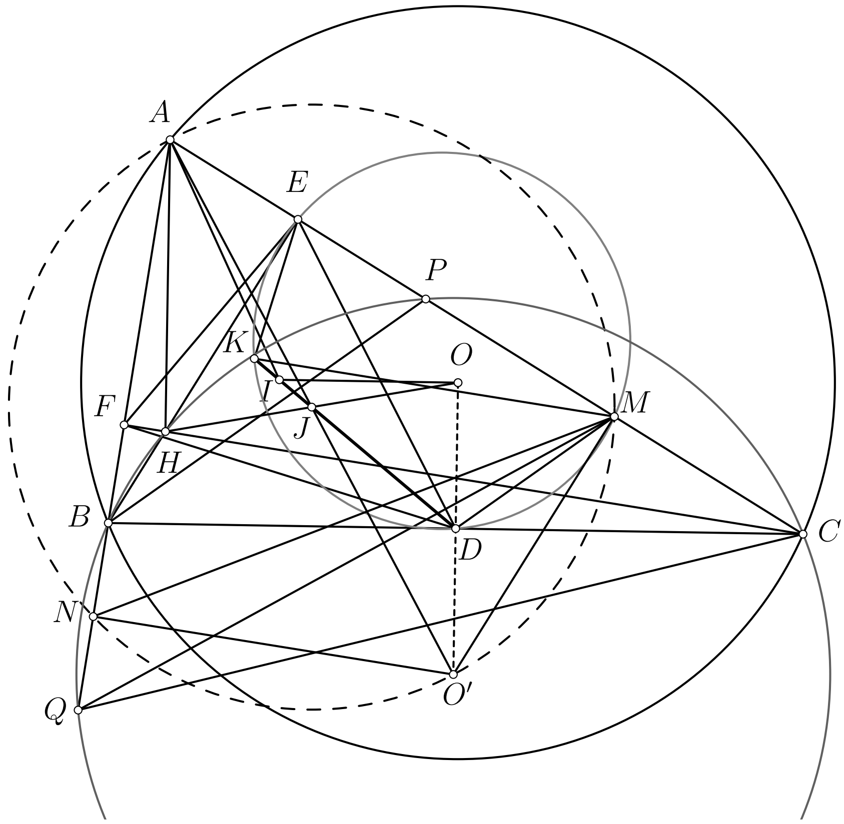
Lời giải. Giả sử các đường BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H; gọi D là trung điểm BC; O' đối xứng với O qua BC; J là trung điểm của OH cũng là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC; và gọi K là trực tâm của tam giác DEF (xem h.8).
Ta có $\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AH}$. Do đó J cũng là trung điểm của AO'.
Ta có kết quả quen thuộc sau đây: DE, DF là các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp của tam AEF. Suy ra $\widehat{DFE} = \widehat{FAE}$. Chú ý rằng $DM \parallel BP$, $BP = AB$ và K là trực tâm của tam giác DEF. Ta có

$$\widehat{DME} = \widehat{BPA} = \widehat{BAP} = \widehat{FAE} = \widehat{DFE} = 180^\circ - \widehat{DKE}.$$

Suy ra tứ giác $DMEK$ nội tiếp. Chú ý rằng $DK \perp EF$ Từ đó

$$\widehat{AMK} = \widehat{EMK} = \widehat{EDK} = 90^\circ - \widehat{DFE} = 90^\circ - \widehat{FAM}.$$

Suy ra $MK \perp AF \equiv AN$. Tương tự, $NK \perp AM$. Từ đó K cũng là trực tâm của tam giác AMN.



Hình 8

Mặt khác, $\widehat{BPA} = \widehat{CQB} = \widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{BHC}$ nên các điểm P, Q cùng nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BCH. Hơn nữa theo kết quả quen thuộc thì O' là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác BCH. Từ đó vì M, N là trung điểm của các đoạn thẳng CP và BQ nên $OM \perp AM$ và $O'N \perp AN$. Từ đó chú ý J là trung điểm AO'. Ta nhận được J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.
Từ đó KJ là đường thẳng Euler của tam giác AMN. Chú ý tam giác DEF cân tại D nên $D \in KJ$ hay nói cách khác đường trung trực của tam giác AMN chính là trung trực của EF.
Mà chú ý rằng $AI \perp HI$ nên I thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và do AI là phân giác của $\widehat{EAF}$ nên $IE = IF$.
Vậy nên I nằm trên trung trực của EF hay đường thẳng Euler của tam giác AMN đi qua điểm I (đpcm). $\square$

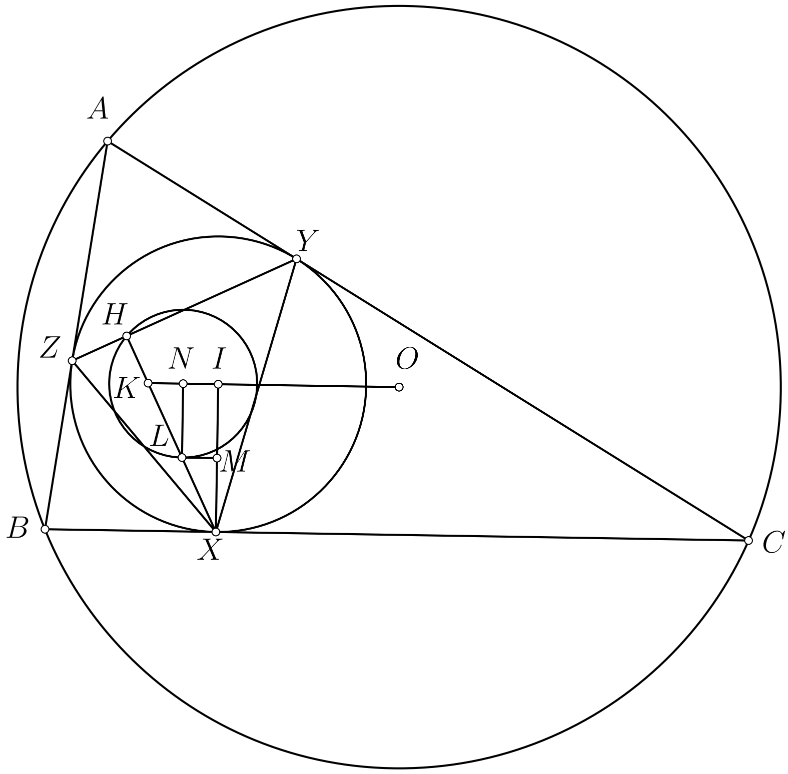
Nhận xét. Thực chất ta có bài toán tổng quát trong tam giác ABC bất kì là đường thẳng Euler của tam giác AMN chia đôi đoạn BC. Từ đó, đường thẳng Euler của tam giác AMN đi qua I khi và chỉ khi $OI \parallel BC$. Ngoài ra, đổi mô hình, chúng ta sẽ nhận được bài tập 14.

Ví dụ 7. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) thỏa mãn $OI \parallel BC$. Gọi X, Y, Z thứ tự là tiếp điểm của BC, CA, AB và (I). Chứng minh rằng đường tròn Euler của tam giác XYZ tiếp xúc với trung trực của IX.*

Lời giải. Gọi $(N), K$ theo thứ tự là đường tròn Euler và trực tâm của tam giác XYZ; và gọi L, M thứ tự là trung điểm của KX và IX (xem h.9).

Ta có các kết quả quen thuộc sau: L nằm trên (N); và OI là đường thẳng Euler của tam giác XYZ.
Do đó $K \in OI$. Suy ra $ML \parallel IK \equiv OI \parallel BC \perp IX$ và $NL \parallel XM \perp OI \equiv KI$. Do đó LM là trung trực của IX và $NL \perp ML$. Điều này chứng tỏ trung trực của IX tiếp xúc với (N) tại L, ta có đpcm. □

Nhận xét. Bạn đọc hãy chứng minh chiều ngược lại của ví dụ 7 vẫn đúng.



Hình 9

Bài viết được tác giả lấy cảm hứng từ một bài G3 IMOSL 2012 [8], sau đó qua tìm hiểu được biết về lớp tam giác này đã được Leon Bankoff đề xuất lần đầu tiên. Các bạn có thể tìm hiểu thêm một số hệ thức liên quan đến lớp tam giác này tại bài viết tại [7] của tác giả Chris Fisher. Qua đây, tác giả bài viết cũng xin cảm ơn người em Nguyễn Văn Linh đã trao đổi nhiều với tác giả về lớp tam giác này để tác giả có thể phát hiện được nhiều hơn các tính chất hình học của nó. Và đặc biệt tác giả xin cảm ơn thầy Trần Nam Dũng đã dìu dắt, tạo điều kiện để tác giả giới thiệu bài viết đến với mọi người.

Cuối cùng tác giả đề xuất thêm các kết quả hình học khác ở phần bài tập đề nghị để các bạn tìm hiểu thêm.

3. Bài tập đề nghị

Bài tập 1. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi R, r và r_a theo thứ tự là các bán kính đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A của tam giác ABC. Chứng minh rằng $OI \parallel BC$ khi và chỉ khi $r + r_a = 2R$.*

Bài tập 2. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) thỏa mãn $OI \parallel BC$. Đường kính AA' của O cắt BC tại W. Chứng minh rằng $A'W$ bằng bán kính của (I).*

Bài tập 3. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) thỏa mãn $OI \parallel BC$. Gọi H là trực tâm và I_a là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Chứng minh rằng đường thẳng Eule tam giác BCI_a song song với HI.*

Bài tập 4. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) ngoại tiếp đường tròn (I), có các đường cao BE và CF cắt nhau tại H. M là trung điểm cạnh BC của tam giác. I_1 và I_2 thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác MBF và MCE. Biết rằng $\widehat{AHI} = 90°$. Chứng minh rằng đường thẳng nối trung điểm của HI và I_1I_2 đi qua M.*

Bài tập 5. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có các đường cao BE và CF. M là trung điểm cạnh BC của tam giác. I_1 và I_2 thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác MBF và MCE. N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF; và P là tâm đường tròn bàng tiếp góc N của tam giác NI_1I_2. Biết rằng tâm đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A của tam giác AEF nằm trên cạnh BC. Chứng minh rằng P nằm trên (O) và trực tâm tam giác PI_1I_2 nằm trên BC.*

Bài tập 6. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) thỏa mãn $OI \parallel BC$. BE và CF là các đường cao, và M là trung điểm cạnh BC của tam giác. I_1 và I_2 thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác MBF và MCE. P là trung điểm cung nhỏ BC của (O). Đường tròn ngoại tiếp các tam giác PBI_1 và PCI_2 theo thứ tự cắt AB và AC tại R và S khác A. Chứng minh rằng RS là đường thẳng Euler của tam giác PI_1I_2.*

Bài tập 7. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) thỏa mãn $OI \parallel BC$. BE và CF là các đường cao, và M là trung điểm cạnh BC của tam giác. I_1 và I_2 thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác MBF và MCE. Chứng minh rằng giao điểm của EF và BC nằm trên dây cung chung của (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác II_1I_2.*

Bài tập 8. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) thỏa mãn $OI \parallel BC$. (I) tiếp xúc CA và AB thứ tự tại Y và Z. Gọi P là trung điểm cung nhỏ BC của (O). Các tiếp tuyến kẻ từ P tới (I) cắt (O) thứ tự tại U và V khác P. Chứng minh rằng đường thẳng UV đi qua trực tâm của tam giác AYZ.*

Bài tập 9. *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Các đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H. Gọi (J_1) và (J_2) thứ tự là đường tròn nội tiếp các tam giác BDF và CDE. Biết rằng $\widehat{AIH} = 90°$. Chứng minh rằng H nằm trên tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (J_1) và (J_2).*

Bài tập 10. *Cho tam giác nhọn ABC không cân tại A ngoại tiếp đường tròn (I), có các đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H. Gọi (K_1), (K_2), (K_3) theo thứ tự là đường tròn nội tiếp*

các tam giác AEF, BFD, CDE. Biết rằng tâm đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A của tam giác AEF nằm trên cạnh BC.
(a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác HI_1I_2 tiếp xúc với (O).
(b) Chứng minh rằng H nằm trên một tiếp tuyến chung của (K_2) và (K_3).
(c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $K_1K_2K_3$ tiếp xúc với BC.

Bài tập 11. *Cho tam giác nhọn ABC ngoại tiếp đường tròn (I) và trực tâm H của tam giác thỏa mãn $\widehat{AIH} = 90°$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Đường thẳng IM cắt BH, CH thứ tự tại P và Q. Gọi J là tâm đường tròn bàng tiếp góc H của tam giác HPQ. Chứng minh rằng $JB = JC$ và trực tâm tam giác JPQ nằm trên OI.*

Bài tập 12. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) thỏa mãn $OI \parallel BC$. Gọi H là trực tâm của tam giác và D là tiếp điểm của (I) với BC. Chứng minh rằng tứ giác $AHDO$ là hình thang ngoại tiếp.*

Bài tập 13. *Cho tam giác nhọn ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Các đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua A song song với BC cắt ME và MF thứ tự tại K và L. Biết $AI \perp HI$, chứng minh rằng tiếp tuyến chung khác KL của đường tròn nội tiếp các tam giác AEK và AFL tiếp xúc với (I).*

Bài tập 14. *Cho tam giác nhọn ABC với H và I là trực tâm và tâm đường tròn nội tiếp của tam giác. Gọi K, L thứ tự là đối xứng của H qua CA, AB; và gọi M, N thứ tự là trung điểm của HK và HL. Biết rằng $\widehat{AIH} = 90°$, chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác HMN đi qua I.*

Bài tập 15. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) với I, J theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp và bàng tiếp đối diện đỉnh A của tam giác thỏa mãn $OI \parallel BC$. Giả sử AO cắt BC tại R và cắt lại (O) tại A'. Gọi K là giao điểm của AI và BC. Gọi (S) là đường tròn qua J đồng thời tiếp xúc với BC tại K; và gọi (R) là đường tròn tâm R và đi qua A'. Chứng minh rằng các tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (R) và (S) cắt nhau trên (O).*

Tài liệu

[1] AoPS, topic: *Line IO parallel to a side*,
https://artofproblemsolving.com/community/c6h593759p3521145.

[2] AoPS, topic: *Two parallel lines*,
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1140457p5352993.

[3] AoPS, topic: *Geometry where incenter and circumcenter is parallel*,
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1652476p10457516.

[4] AoPS, topic: *AD+BC=AB in a cyclic quadrilateral*,
https://artofproblemsolving.com/community/c6h60782p366584.

[5] AoPS, topic: *Problem 5 (Second Day)*,
https://artofproblemsolving.com/community/c6h14092p99759.

[6] AoPS, topic: *Geolympiad Summer 2015, p5: Isogonal Conjugates Property*, https://artofproblemsolving.com/community/c7419h1138166_geolympiad_summer_2015_5_isogonal_conjugates_property.

[7] J. Chris Fisher, *Triangles for Which OI Is Parallel to a Side*, Crux Mathematicorum, Vol. 38(4), April 2012.

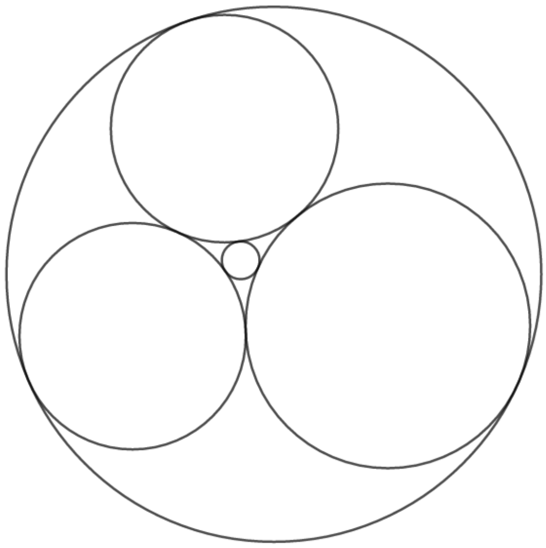
[8] AoPS, topic: *IMO Shortlist 2012, Geometry 3*, https://artofproblemsolving.com/community/c6h546177p3160579.

[9] R. Sivaramakrishnan, Problem 758, *Mathematics Magazine*, **43**:5 (Nov. 1970) 285-286. Solution by Leon Bankoff. (Appeared in Mar. 1970.)

VỀ ĐƯỜNG TRÒN SODDY

Nguyễn Minh Khang
(Lớp Chuyên Tin PTNK TPHCM 2017-2020)

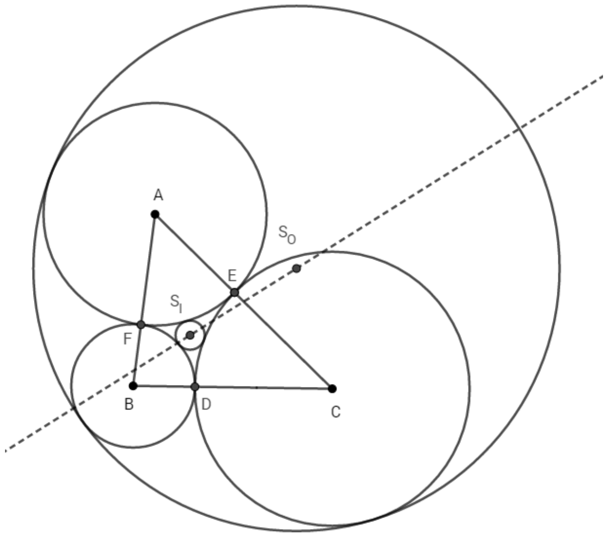
Tóm tắt. Với ba đường tròn đôi một tiếp xúc ngoài nhau thì luôn tồn tại một đường tròn tiếp xúc ngoài và một đường tròn tiếp xúc trong với cả ba đường tròn đã cho. Các đường tròn đó được gọi là đường tròn Soddy. Bài viết sau sẽ giới thiệu các tính chất và các bài toán hình học liên quan đến đường tròn này.



1. Định nghĩa và tính chất cơ bản

Frederick Soddy, một nhà hóa học phóng xạ người Anh, nhận giải Nobel Hóa học vào năm 1921 nhờ công trình nghiên cứu về sự biến đổi của các nguyên tố hóa học và chứng minh sự xuất hiện đồng vị của các nguyên tố phóng xạ. Ngoài ra, ông đã nghiên cứu định lí Descartes về 4 đường tròn đôi một tiếp xúc nhau và đưa ra kết quả sau vào năm 1936:

Định nghĩa 1 (Đường tròn Soddy, 1936). *Cho tam giác ABC có I là tâm nội tiếp. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của I lên các cạnh BC, CA, AB. Khi đó tồn tại duy nhất 1 đường tròn tiếp xúc ngoài với 3 đường tròn $(A; AF), (B; BD), (C; CE)$ và tồn tại duy nhất 1 đường tròn tiếp xúc trong với 3 đường tròn $(A; AF), (B; BD), (C; CE)$. Các đường tròn này lần lượt gọi là đường tròn Soddy ngoại tiếp và nội tiếp.*

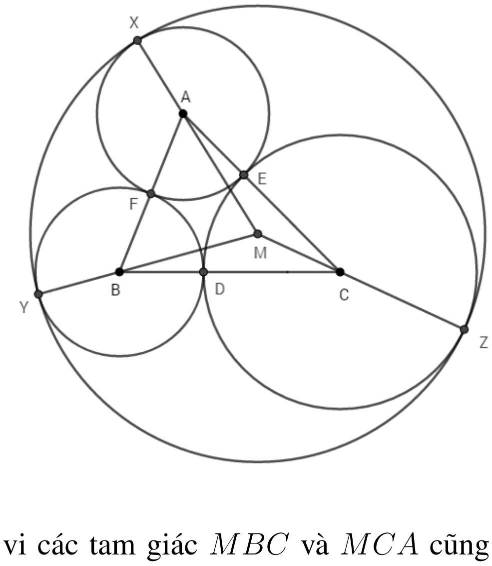


Tính chất 1. *Tâm đường tròn Soddy ngoại tiếp là điểm đẳng cự (isoperimetric) của ΔABC, nghĩa là chu vi các tam giác MAB, MBC, MCA bằng nhau.*

Ví dụ 1. *Cho tam giác ABC. Hãy tìm một điểm M trên mặt phẳng sao cho các tam giác MAB, MBC, MCA có chu vi bằng nhau.*

Lời giải. Dựng các đường tròn tâm A, B, C đôi một tiếp xúc ngoài nhau. Gọi M là tâm đường tròn Soddy ngoại tiếp các đường tròn tâm A, B, C với X, Y, Z là các tiếp điểm tương ứng. Ta có được:

$$\begin{aligned} P_{MAB} = MA + AB + BM &= MA + AF + FB + MB \\ &= MA + AX + BY + BM = MX + MY = 2R_M. \end{aligned}$$



Tương tự, ta cũng có chu vi các tam giác MBC và MCA cũng bằng 2 lần bán kính đường tròn Soddy ngoại tiếp. Vậy điểm M là tâm đường tròn Soddy ngoại tiếp để chu vi các tam giác MAB, MBC, MCA bằng nhau. □

Tính chất 2. *Đường tròn Soddy ngoại tiếp tồn tại khi và chỉ khi* $\dfrac{1}{\sqrt{r_b}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_c}} > \dfrac{1}{\sqrt{r_a}}$ *hay* $a + b + c > 4R + r$.

Tính chất 3. *Tâm đường tròn Soddy nội tiếp là điểm "equal tour" của tam giác* ABC. *Tâm đường tròn Soddy ngoại tiếp cũng là điểm "equal tour" của tam giác* ABC *khi* $\dfrac{1}{\sqrt{r_b}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_c}} < \dfrac{1}{\sqrt{r_a}}$ *hay* $a + b + c < 4R + r$.

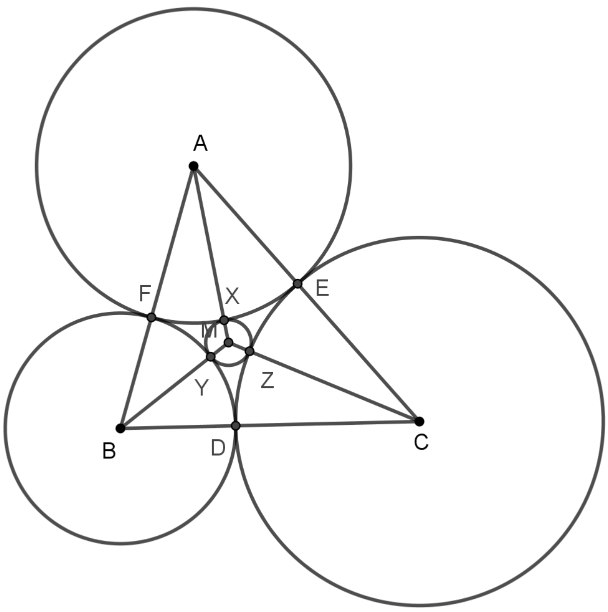
Ví dụ 2. *Cho* ABC *và điểm* M, *kí hiệu* $\ell_{AB} = AM + MB - AB$. *Tìm vị trí điểm* M *sao cho* $\ell_{AB} = \ell_{BC} = \ell_{CA}$.

Lời giải. Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: $a + b + c > 4R + r$.
Dựng các đường tròn tâm A, B, C đôi một tiếp xúc ngoài nhau. Gọi M là tâm đường tròn Soddy nội tiếp các đường tròn tâm A, B, C với X, Y, Z là các tiếp điểm tương ứng. Ta có được:

$$\ell_{AB} = AM + MB - AB = AX + XM + MX + XB - AF - FA = 2R_M.$$

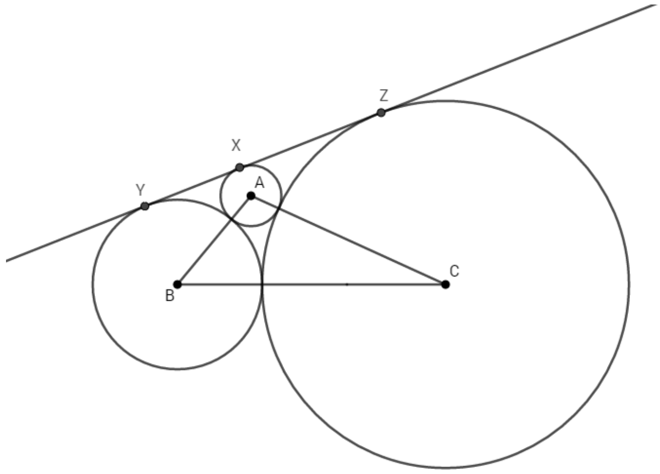
Tương tự, ta cũng có $\ell_{BC} = \ell_{CA} = 2R_M$. Vậy M là tâm đường tròn Soddy nội tiếp để $\ell_{AB} = \ell_{BC} = \ell_{CA}$.



Trường hợp 2: $a + b + c < 4R + r$.
Giải tương tự với trường hợp trên. □

Tính chất 4. *Đường tròn Soddy ngoại tiếp có thể suy biến thành tiếp tuyến chung ngoài của 3 đường tròn. Khi đó* $\dfrac{1}{\sqrt{r_b}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_c}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_a}}$ *hay* $a + b + c = 4R + r$.

Tính chất 5. *Cho tam giác ABC thỏa $a + b + c = 4R + r$ hay ba đường tròn $(A), (B), (C)$ thỏa $\frac{1}{\sqrt{r_b}} + \frac{1}{\sqrt{r_c}} = \frac{1}{\sqrt{r_a}}$ thì $XY = 2\sqrt{r_a r_b}, YZ = 2\sqrt{r_b r_c}, ZX = \sqrt{r_c r_a}$.*



2. Sự tồn tại của đường tròn Soddy

Ví dụ 3. *Cho tam giác ABC.*

a) Chứng minh tồn tại duy nhất bộ 3 đường tròn có tâm lần lượt tại A, B, C đôi một tiếp xúc ngoài nhau.

b) Chứng minh tồn tại duy nhất 1 đường tròn tiếp xúc ngoài với 3 đường tròn trên và tồn tại duy nhất 1 đường tròn tiếp xúc trong với 3 đường tròn trên.

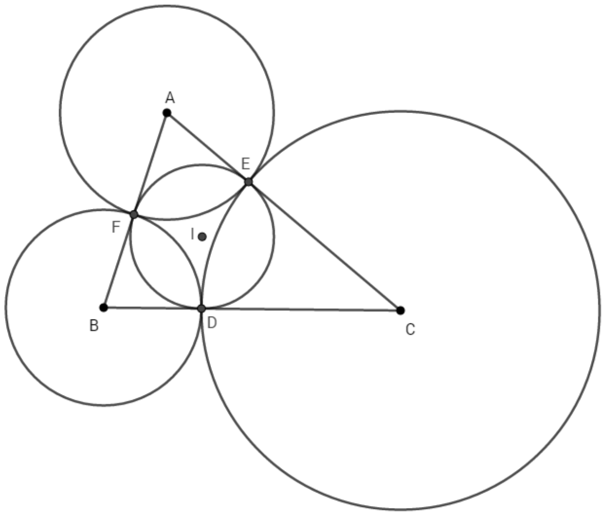
Lời giải.

a) Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F thì ta có $(A; AF), (B; BD), (C; CE)$ đôi một tiếp xúc ngoài nhau.

Xét bộ ba đường tròn $(A; R_1), (B; R_2), (C; R_3)$ cũng đôi một tiếp xúc ngoài nhau. Với D', E', F' lần lượt là tiếp điểm của các cặp đường tròn $(B; R_2)$ và $(C; R_3)$, $(C; R_3)$ và $(A; R_1)$, $(A; R_1)$ và $(B; R_2)$, ta có được:

$$AE' = \frac{AB + AC - BC}{2}.$$

Suy ra E' là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với AC. Suy ra điểm E' trùng với E.

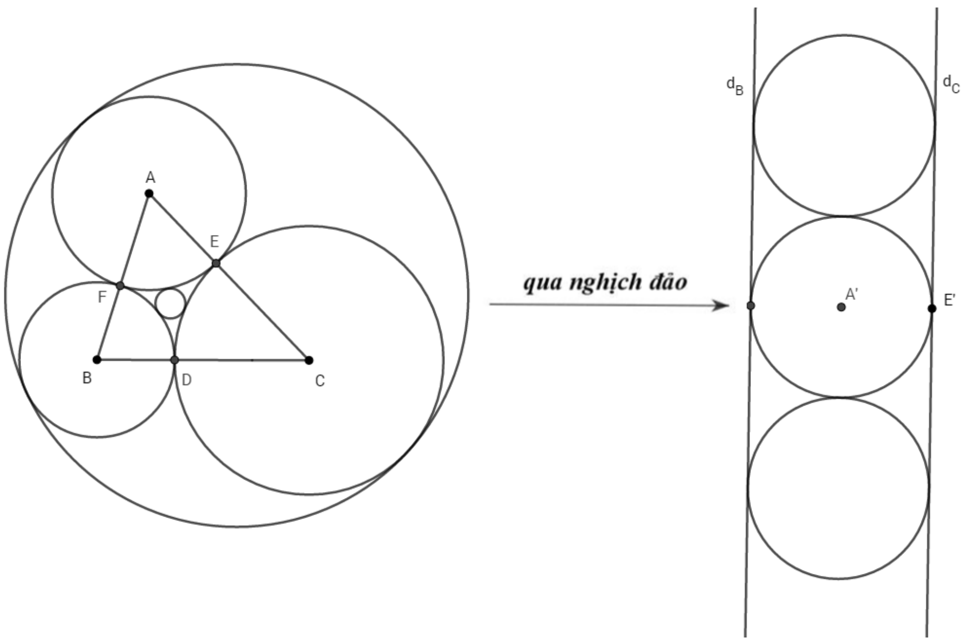


Tương tự, ta cũng có $D' \equiv D$ và $F' \equiv F$. Vậy $(A; AF), (B; BD), (C; CE)$ trùng với $(A; R_1), (B; R_2), (C; R_3)$.
Vậy chỉ tồn tại duy nhất bộ 3 đường tròn có tâm lần lượt tạiA, B, C đôi một tiếp xúc ngoài nhau.

b) Xét phép nghịch đảo cực D phương tích $k > 0$, ta có:

$$\begin{cases} (A; AF) \leftrightarrow \Omega \\ (B; BD) \leftrightarrow d_B \\ (C; CE) \leftrightarrow d_C \end{cases}$$

Mà do $(B; BD)$ và $(C; CE)$ tiếp xúc nhau nên d_B song song với d_C, $(A : AF)$ tiếp xúc với $(sB; BD)$ và $(C; CE)$ nên Ω vừa tiếp xúc với d_B và d_C.



Sau khi đổi mô hình bài toán, dễ thấy chỉ tồn tại duy nhất 2 đường tròn ω và ω' vừa tiếp xúc với Ω , d_B và d_C, nghĩa là chỉ tồn tại duy nhất 1 đường tròn tiếp xúc ngoài và tồn tại duy nhất 1 đường tròn tiếp xúc trong với 3 đường tròn $(A; AF), (B; BD), (C; CE)$.

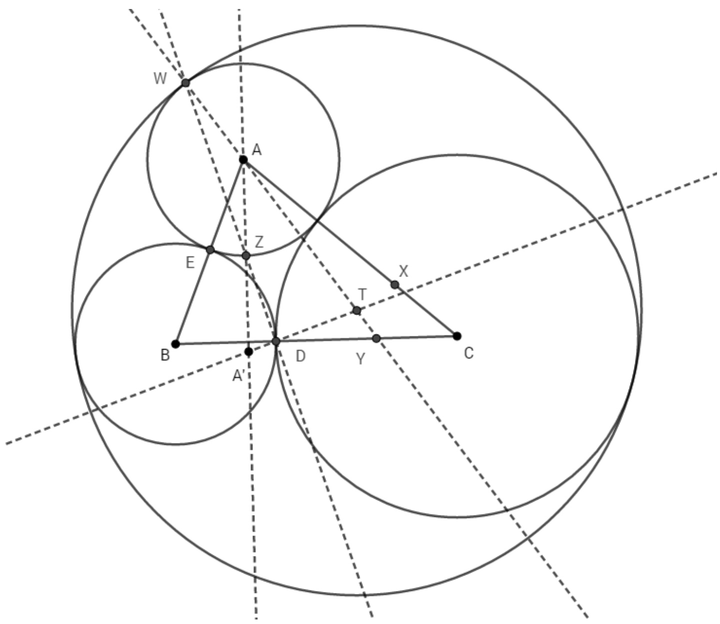
□

3. Cách dựng đường tròn Soddy

3.1. Dựng đường tròn Soddy ngoại tiếp

Cho tam giác ABC, không mất tính tổng quát giả sử rằng AB là cạnh nhỏ nhất trong 3 cạnh của tam giác ABC.

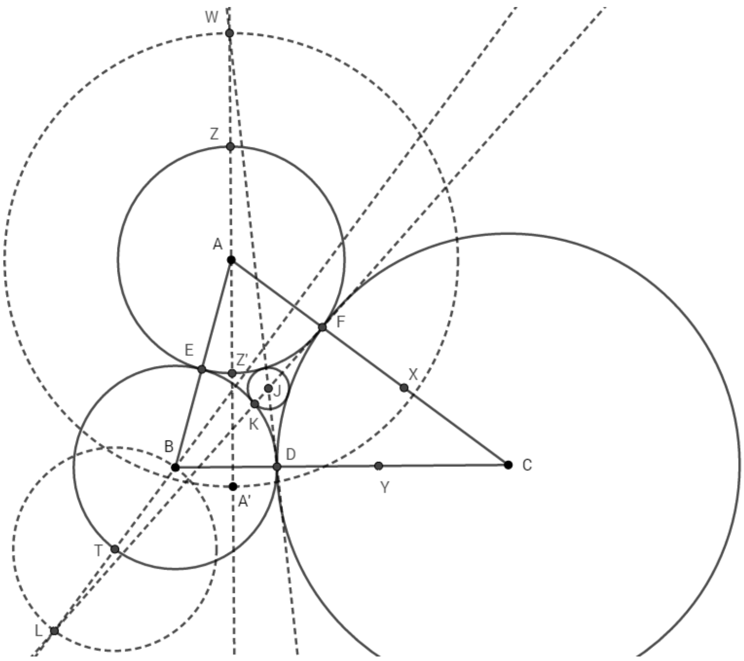
1. Lấy điểm X trên cạnh AC sao cho $AX = AB$.
2. Lấy điểm Y trên cạnh BC sao cho $CY = CX$.
3. Gọi D là trung điểm BY, lấy điểm E trên cạnh AB sao cho $BE = BD$.
4. Gọi Z là giao điểm của đường cao hạ từ A của tam giác ABC với đường tròn tâm A bán kính AE sao cho Z gần với BC nhất có thể.
5. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua Z, và W là giao điểm khác Z của DZ với $(A; AE)$.
6. Gọi T là giao điểm của AW với $A'D$. Đường tròn tâm T bán kính TW chính là đường tròn Soddy ngoại tiếp của các đường tròn $(A; AE)$, $(B; BE)$ và $(C; CD)$.



3.2. Dựng đường tròn Soddy nội tiếp

Cho tam giác ABC, không mất tính tổng quát giả sử rằng AB là cạnh nhỏ nhất trong 3 cạnh của tam giác ABC.

1. Lấy điểm X trên cạnh AC sao cho $AX = AB$.
2. Lấy điểm Y trên cạnh BC sao cho $CY = CX$.
3. Gọi D là trung điểm BY, lấy điểm E trên cạnh AB sao cho $BE = BD$.
4. Gọi Z và Z' là giao điểm của đường cao hạ từ A của tam giác ABC với đường tròn tâm A bán kinh AE sao cho Z xa BC nhất có thể.
5. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua Z'.
6. Gọi W là điểm đối xứng của của A' qua A.
7. Đường cao hạ từ B của tam giác ABC cắt đường tròn tâm B bán kinh BE tại T.
8. Gọi L là điểm đối xứng với B qua T, F là giao điểm của $(A; AE)$ với AC.
9. LF cắt $(B; BE)$ tại K, cắt WD tại J. Đường tròn tâm J bán kính JK chính là đường tròn Soddy nội tiếp của các đường tròn $(A; AE)$, $(B; BE)$ và $(C; CD)$.



4. Bán kính của đường tròn Soddy

Định lý 1. *Bán kính của đường tròn Soddy ngoại tiếp là*

$$\frac{r_1r_2r_3}{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1+2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}.$$

Bán kính của đường tròn Soddy nội tiếp là

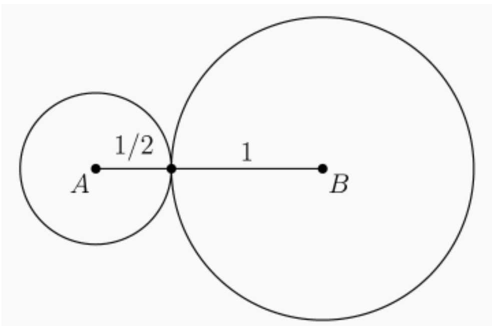
$$\frac{r_1r_2r_3}{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1-2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}.$$

Sử dụng công thức Descartes liên hệ giữa bán kính 4 đường tròn.

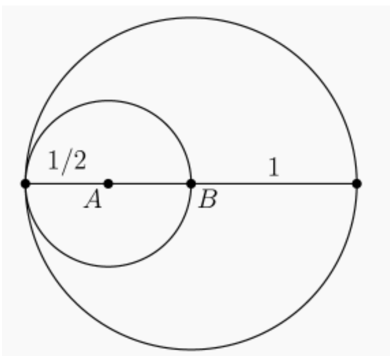
Bổ đề (Công thức Descartes, 1643)**.** *Công thức Descartes đưa ra sự liên hệ giữa các bán kính của 4 đường tròn đôi một tiếp xúc nhau:*

$$(k_1+k_2+k_3+k_4)^2 = 2(k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_4^2) \text{ với } k_i = \pm\frac{1}{r_i}$$

Ta xét các ví dụ sau



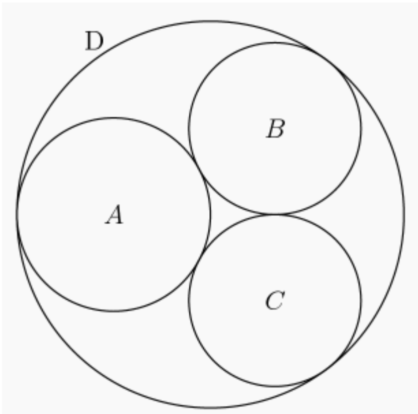
Đường tròn A và B tiếp xúc ngoài nhau nên $k_A = \frac{1}{r_A} = 2$ và $k_b = \frac{1}{r_B} = 1$.



Đường tròn A tiếp xúc trong với đường tròn B nên $k_A = \frac{1}{r_A} = 2$ và $k_b = -\frac{1}{r_B} = -1$.

Ví dụ 4 (AMC 2004)**.** *Cho đường tròn A, B, C đôi một tiếp xúc ngoài nhau và cùng tiếp xúc trong với đường tròn D. Biết rằng đường tròn B và C bằng nhau, đường tròn A có bán kính là 1 và đi qua tâm của đường tròn D. Tính bán kính của đường tròn B.*

Lời giải. Áp dụng công thức Descartes liên hệ giữa 4 bán kính đường tròn có bán kính lần lượt là $2, 1, r$ và r.



$$\left(-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\right)^2 = 2\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2}\right)$$

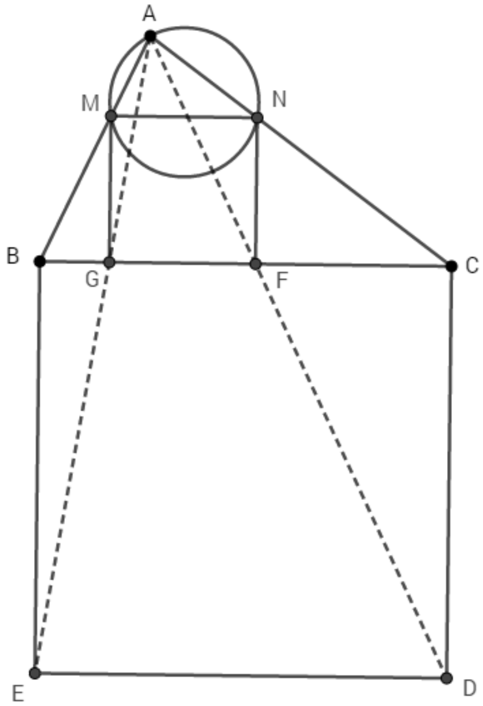
Suy ra $\frac{1}{4}+\frac{2}{r}+\frac{4}{r^2}=\frac{5}{2}+\frac{4}{r^2}$, rút gọn 2 vế ta có $\frac{9}{4}=\frac{2}{r}$, suy ra $r=\frac{8}{9}$. □

5. Các đường tròn có mô hình tương tự đường tròn Soddy

5.1. Đường tròn Lucas, 1879

Cho tam giác ABC. Dựng bên ngoài tam giác ABC hình vuông $BCDE$. BC cắt AE và AD lần lượt tại G và F. Đường vuông góc với BC tại G cắt cạnh AB tại M, đường vuông góc với BC tại F cắt cạnh AC tại N. Khi đó đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN được gọi là đường tròn Lucas đỉnh A của tam giác ABC.

Tương tự, đường tròn Lucas đỉnh B và đường tròn Lucas đỉnh C của tam giác ABC được xác định tương tự.



5.2. Bán kính đường tròn Lucas

Ví dụ 5. *Bán kính của đường tròn Lucas đỉnh A là $\dfrac{R.bc}{bc+2a.R}$. Tương tự bán kính của đường tròn Lucas đỉnh B, đỉnh C lần lượt là $\dfrac{R.ca}{ca+2b.R}$ và $\dfrac{R.ab}{ab+R.c}$.*

Lời giải. Xét phép vị tự tâm A tỉ số $\dfrac{h_a}{h_a+a}$ và $h_a = \dfrac{2S}{a}$ nên ta có $\dfrac{h_a}{h_a+a} = \dfrac{2S}{2S+a^2}$. Suy ra:.

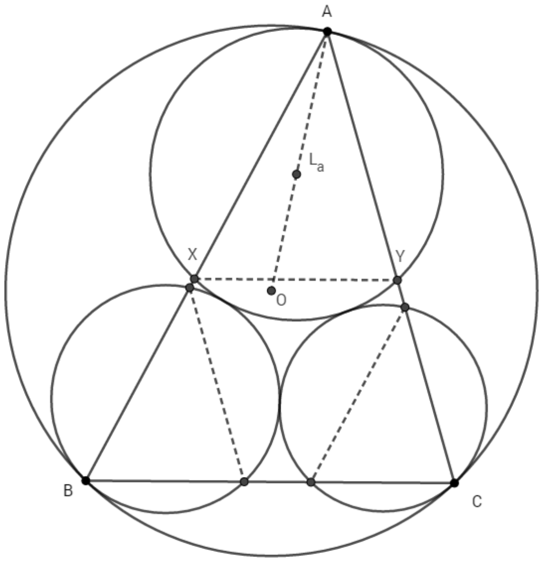
$$R_A = R \cdot \frac{2S}{2S+a^2} = \frac{abc}{4S} \cdot \frac{2S}{2S+a^2} = \frac{abc}{4S+2a^2} = \frac{abc}{\dfrac{abc}{R}+2a^2} = \frac{R.bc}{bc+2a.R}.$$

□

Ví dụ 6. *: [Paul Yiu – Hatzipolakis, 2001] Chứng minh các đường tròn Lucas đỉnh A, B, C của tam giác ABC tiếp xúc nhau từng đôi một và tiếp xúc trong với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*

Lời giải. Vì tam giác AXY đồng dạng với tam giác ABC nên xét phép vị tự biến tam giác AXY thành tam giác ABC thì:

$$(AXY) \leftrightarrow (ABC) \text{ và } L_a \leftrightarrow O.$$



Suy ra các điểm A, L_a, O thẳng hàng nên ta có $OL_a = R - R_a = \dfrac{abc}{4S} - \dfrac{R.bc}{bc + 2a.R} = \dfrac{2a.R^2}{bc + 2a.R} = \dfrac{2a.R}{bc} \cdot R_a$.

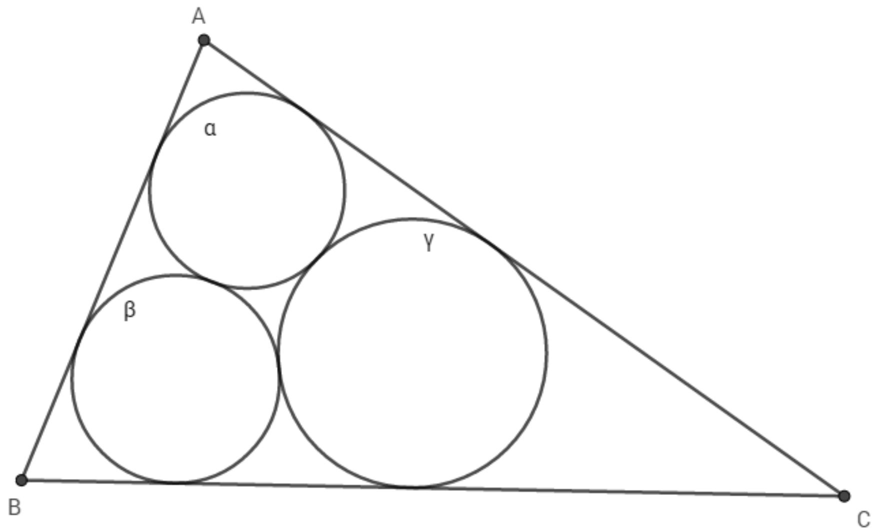
Tương tự, ta cũng có: $OL_b = \dfrac{2b.R}{ca} \cdot R_b$. Hơn nữa $\widehat{L_aOL_b} = 2\widehat{C}$, nên áp dụng định lí cosine cho $\triangle L_aOL_b$:

$$\begin{aligned}
L_aL_b^2 &= OL_a^2 + OL_b^2 - 2.OL_a.OL_b.\cos\widehat{L_aOL_b}\\
&= (R - R_a)^2 + (R - R_b)^2 - 2(R - R_a)(R - R_b)\cos 2\widehat{C}\\
&= (R - R_a)^2 + (R - R_b)^2 - 2(R - R_a)(R - R_b)\left(1 - 2\sin^2\widehat{C}\right)\\
&= (R_a - R_b)^2 + 4(R - R_a)(R - R_b)\sin^2\widehat{C}\\
&= (R_a - R_b)^2 + 4R_aR_b\frac{4R^2\sin^2\widehat{C}}{c}\\
&= (R_a + R_b)^2.
\end{aligned}$$

Suy ra đường tròn Lucas đỉnh A và đường tròn Lucas đỉnh B tiếp xúc ngoài với nhau.
Tương tự, ta có được các đường tròn Lucas đều đôi một tiếp xúc ngoài nhau. Hơn nữa, các điểm A, L_a, O thẳng hàng nên tương tự các điểmB, L_b, O thẳng hàng và C, L_c, O thẳng hàng. Dẫn đến các đường tròn Lucas đều tiếp xúc trong đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vậy các đường tròn Lucas đỉnh A, B, C của tam giác ABC tiếp xúc nhau từng đôi một và tiếp xúc trong với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. □

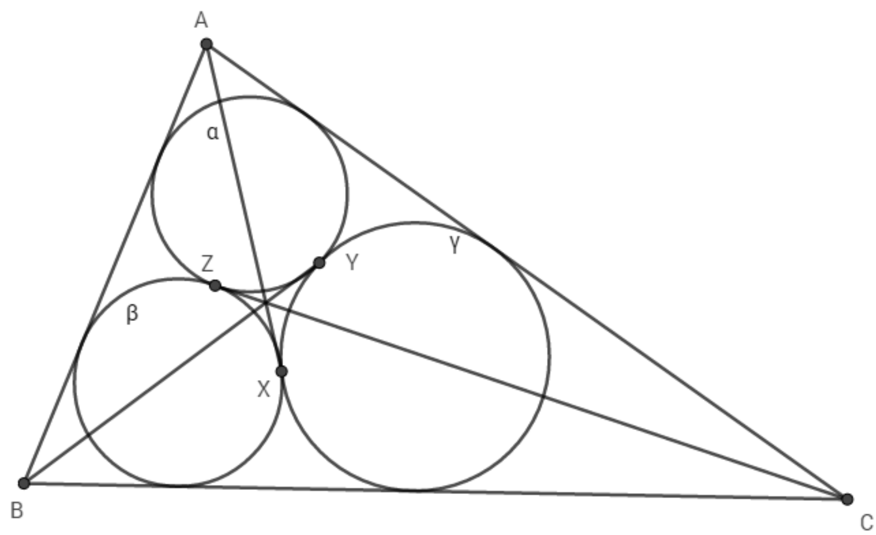
5.3. Đường tròn Malfatti, 1803

Cho tam giác ABC, đường tròn α tiếp xúc với AB, AC, đường tròn β tiếp xúc với BA, BC, đường tròn γ tiếp xúc với CA, CB và ba đường tròn α, β, γ đôi một tiếp xúc với nhau. Các đường α, β, γ được gọi là các đường tròn Malfatti.



Ví dụ 7. *Cho tam giác ABC, đường tròn α tiếp xúc với AB, AC, đường tròn β tiếp xúc với BA, BC, đường tròn γ tiếp xúc với CA, CB; β, γ tiếp xúc nhau tại X; γ, α tiếp xúc nhau tại Y, α, β tiếp xúc nhau tại Z. Chứng minh AX, BY, CZ đồng qui. Điểm đồng qui được gọi là điểm Ajima – Malfatti của tam giác ABC.*

Lời giải. Gọi K, L, M lần lượt là tâm vị tự ngoài của các cặp đường tròn (β, γ) . (γ, α) và (α, β).
Áp dụng định lí Monge – D'Alembert, ta có được các điểm K, L, M thẳng hàng; K, Z, Y thẳng hàng; L, X, Z thẳng hàng và M, X, Y thẳng hàng. Mà BC, CA, AB lần lượt là các tiếp tuyến chung ngoài của các cặp đường tròn (β, γ) . (γ, α) và (α, β) nên K, L, M lần lượt thuộc các đường thẳng BC, CA, AB.
Áp dụng định lí Desargues cho tam giác ABC và tam giác XYZ, suy ra AX, BY, CZ đồng qui.



□

6. Đường thẳng Soddy

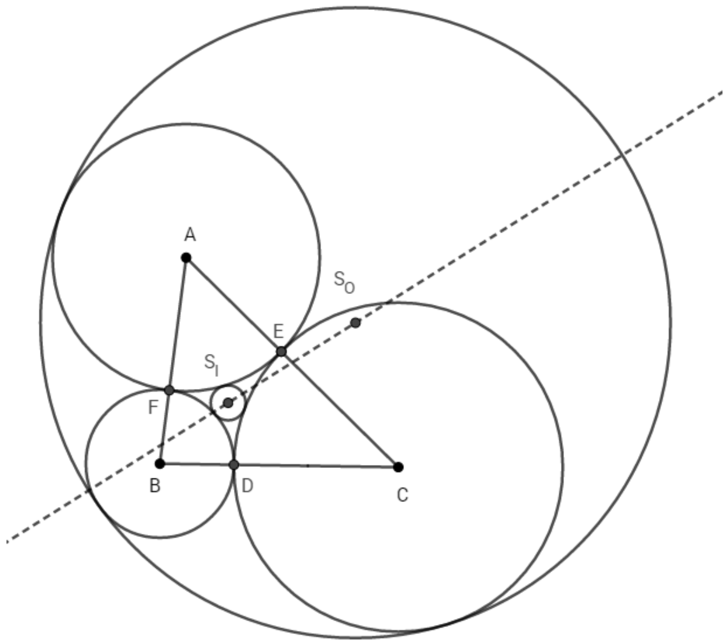
Định nghĩa 2 (Đường thẳng Soddy). *Tâm 2 đường Soddy này là 2 điểm Soddy, đường thẳng nối 2 điểm Soddy được gọi là đường thẳng Soddy.*

Định lý 2 (Điểm Gergonne). *Cho tam giác ABC, D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với BC, CA, AB. Khi đó các đường thẳng AD, BE, CF đồng qui tại điểm Gergonne của tam giác ABC.*

Chứng minh. Sử dụng định lí Ceva đảo. □

Định lý 3 (Đường thẳng Gergonne). *Cho tam giác ABC, D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với BC, CA, AB. DE cắt AB tại X, DF cắt AC tại Y, EF cắt BC tại Z. Khi đó X, Y, Z thẳng hàng và đường thẳng đó được gọi là đường thẳng Gergonne.*

Chứng minh. Sử dụng định lí Desargues cho tam giác ABC và DEF.



□

Tính chất 6. *Đường thẳng Soddy đi qua tâm nội tiếp, điểm Gergonne, điểm de Longchamps và hai điểm Eppstein của tam giác ABC.*

Tính chất 7. *Điểm và tâm đường tròn nội tiếp của ABC chia điều hòa đoạn nối hai điểm Soddy.*

Tính chất 8. *Đường thẳng Soddy vuông góc với đường thẳng Gergonne của tam giác ABC tại điểm Fletcher.*

7. Các định lý hình học và bài toán liên quan

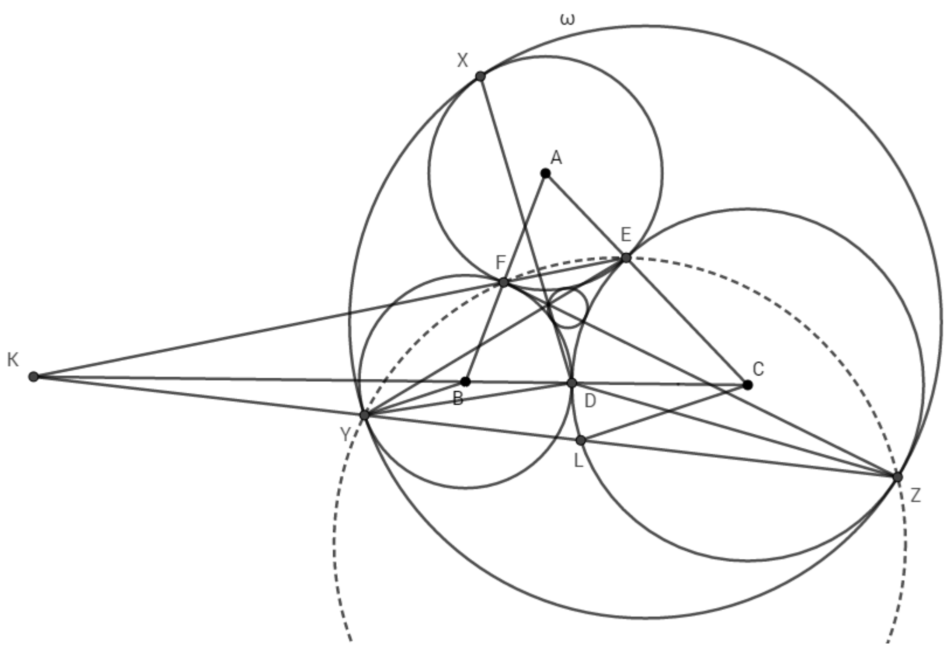
7.1. Đường tròn Soddy kết hợp với định lí Monge – D'Alembert

Định lý 4 (Monge – D'Alembert)**.** *Cho 3 đường tròn $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ phân biệt trên mặt phẳng. Khi đó tâm vị tự ngoài của các đường tròn này thẳng hàng. Hai tâm vị tự trong của hai trong ba cặp đường tròn trên và tâm vị tự ngoài của đường tròn còn lại thẳng hàng.*

Bài toán 1. *Cho ba đường tròn $(A), (B), (C)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau và tiếp xúc trong với đường tròn ω. Tiếp điểm của (B) và (C) là D, tiếp điểm của (C) và (A) là E, tiếp điểm của (A) và (B) là F, (A) và ω tiếp xúc nhau ở X, (B) và ω tiếp xúc nhau ở Y, (C) và ω tiếp xúc nhau ở Z. Chứng minh các đường thẳng XD, YE, ZF đồng qui.*

Lời giải. Gọi K là tâm vị tự ngoài của (B) và (C). KZ cắt (C) ở L, suy ra BY song song với CL. Dẫn đến:

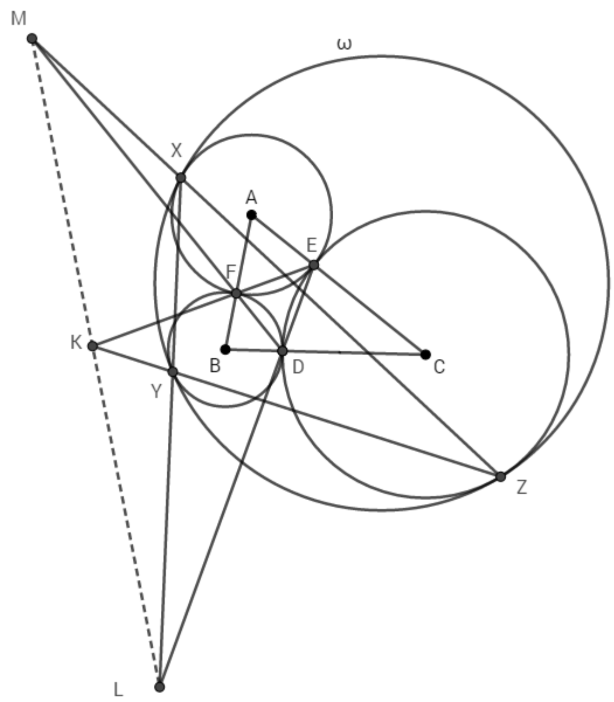
$$\widehat{KDY} = \frac{1}{2}\widehat{KBY} = \frac{1}{2}\widehat{KCL} = \widehat{KZD}.$$



Áp dụng định lí Monge – D'Alembert, ta có K, E, F thẳng hàng và K, Y, Z thẳng hàng.
Do đó, $KD^2 = KY.KZ$, tương tự, ta cũng có $KD^2 = KE.KF$, nên suy ra $KY.KZ = KE.KF$ hay $EFYZ$ nội tiếp.
Tương tự như trên, ta cũng có $DFXZ, DEXY$ đều là các tứ giác nội tiếp. Chú ý rằng XD, YE, ZF lần lượt là các trục đẳng phương của các cặp đường tròn $(DFXZ), (DEXY)$; $(EFYZ), (DEXY)$; $(EFYZ), (DFFXZ)$. Suy ra chúng đồng qui tại tâm đẳng phương của 3 đường tròn đó. $\square$

Bài toán 2. *Cho ba đường tròn $(A), (B), (C)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau và tiếp xúc trong với đường tròn ω. Tiếp điểm của (B) và (C) là D, tiếp điểm của (C) và (A) là E, tiếp điểm của (A) và (B) là F, (A) và ω tiếp xúc nhau ở X, (B) và ω tiếp xúc nhau ở Y, (C) và ω tiếp xúc nhau ở Z. EF cắt YZ tại K, ED cắt XY tại L, DF cắt XZ tại M. Chứng minh K, L, M thẳng hàng.*

Lời giải. Gọi K' là tâm vị tự ngoài của (B) và (C). Áp dụng định lí Monge – D'Alembert, ta có K', E, F thẳng hàng và K', Y, Z thẳng hàng nên K trùng với K'.



Khi đó, K là tâm vị tự ngoài của (B) và (C), L là tâm vị tự ngoài của (A) và (B) , M là tâm vị tự ngoài của (A) và (C) nên áp dụng định lí Monge – D'Alembert một lần nữa ta sẽ có đượcK, L, M thẳng hàng. □

Bài toán 3. *Cho ba đường tròn $(A), (B), (C)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau và tiếp xúc trong với đường tròn ω. Tiếp điểm của (B) và (C) là D, tiếp điểm của (C) và (A) là E, tiếp điểm của (A) và (B) là F, (A) và ω tiếp xúc nhau ở X, (B) và ω tiếp xúc nhau ở Y, (C) và ω tiếp xúc nhau ở Z.*

(a) Chứng minh các đường tròn ngoại tiếp tam giác XEZ, XFY, YDZ và DEF đôi một tiếp xúc với nhau.

(b) Gọi K, L lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác XFY, YDZ. Chứng minh AC, DF, XZ, KL đồng qui.

Lời giải. (a) Xét tam giác DEF, lấy nghịch đảo đối xứng tâm D phương tích $DE.DF$ thì các đường tròn (B) và (C) biến thành các đường thẳng qua E, F vuông góc với EF, đường tròn

(A) biến thành đường tròn đường kính EF, đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF biến thành EF, đường tròn ngoại tiếp DZY biến thành YZ.

Sau khi đổi mô hình bài toán, suy ra các đường tròn ngoại tiếp tam giác XEZ, XFY, YDZ và DEF đôi một tiếp xúc với nhau.

(b) Tương tự *Bài 2* với S là tâm vị tự ngoài của đường tròn (A) và (C) thì S, A, C thẳng hàng, S, X, Z thẳng hàng và S, F, D thẳng hàng.
Dễ thấy đường tròn ngoại tiếp tam giác DFY cũng là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác IKL với I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi S' là tâm vị tự ngoài của đường tròn (K) và (L) thì S', K, L thẳng hàng, S', X, Z thẳng hàng và S', F, D thẳng hàng nên suy ra S và S' trùng nhau.
Vậy các đường thẳng AC, KL, DF, XZ đồng qui.

□

7.2. Đường tròn Soddy kết hợp với định lí Casey

Định lý 5 (Casey)**.** *Cho 4 đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3), (O_4)$. Gọi t_{ik} là độ dài tiếp tuyến chung của (O_i) và (O_k). Khi đó 4 đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3), (O_4)$ cùng tiếp xúc với đường tròn (O) khi và chỉ khi:*

$$t_{12}.t_{34} \pm t_{14}.t_{23} \pm t_{13}.t_{24} = 0.$$

t_{ik} là độ dài tiếp tuyến chung ngoài của (O_i) và (O_k) khi và chỉ khi (O_i) và (O_k) cùng tiếp xúc trong hay cùng tiếp xúc ngoài với (O).
t_{ik} là độ dài tiếp tuyến chung trong của (O_i) và (O_k) khi và chỉ khi (O_i) và (O_k) có một đường tròn tiếp xúc trong và một đường tròn tiếp xúc ngoài với (O) . Dấu của $t_{ik}.t_{mn}$ là dấu "+" khi và chỉ khi đoạn thẳng t_{ik} không cắt đoạn thẳng t_{mn} và là dấu "–" khi ngược lại.

Bài toán 4. *Cho ba đường tròn $(A), (B), (C)$ có bán kính bằng nhau, đôi một tiếp xúc ngoài và tiếp xúc trong với đường tròn ω. Cho điểm U di động trên đường tròn ω, kí hiệu $P(I)$ là độ dài của tiếp tuyến từ U tới đường tròn (I). Chứng minh tồn tại 1 trong 3 giá trị $P(A), P(B), P(C)$ có giá trị bằng tổng 2 giá trị còn lại.*

Chứng minh. Gọi X là tiếp điểm của (A) với ω , các điểm Y, Z được xác định tưởng tự. Không mất tính tổng quát, giả sử U thuộc cung YZ không chứa X. Gọi bán kính của 3 đường tròn là r. Áp dụng định lí Casey cho đường tròn điểm U và ba đường tròn $(A), (B), (C)$ và *Tính chất 5*, ta có:

$$P(A).2\sqrt{r.r} = P(B).2\sqrt{r.r} + P(C).2\sqrt{r.r}$$

Suy ra $P(A) = P(B) + P(C)$. □

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC cân tại C, hình vuông $MNPQ$ nội tiếp tam giác ABC sao cho cạnh MN nằm trên cạnh BC. Gọi ω_A là đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ, ω_B là đường tròn đối xứng với ω_A qua trung trực AB, ω_C là đường tròn đi qua C tiếp xúc ngoài với ω_A và ω_B. X là điểm chính giữa cung AB không chứa C, kí hiệu $P(I)$ là độ dài của tiếp tuyến từ X tới đường tròn ω_I và r_i là bán kính của đường tròn ω_i . Chứng minh $P(C)\sqrt{r_A} = 2.P(A)\sqrt{r_C}$.*

Lời giải. Dễ thấy ω_A và ω_B và đường tròn qua C tiếp xúc ngoài với ω_A và ω_B là các đường tròn Lucas của tam giác ABC nên các đường tròn này tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Áp dụng định lí Casey cho đường tròn điểm X với ω_A và ω_B và đường tròn qua C tiếp xúc ngoài với ω_A và ω_B:

$$P(C).2\sqrt{r_A.r_B} = P(A).2\sqrt{r_B.r_C} + P(B).2\sqrt{r_C.r_A}$$

Mà $r_B = r_C$ và $P(A) = P(B)$ nên ta suy ra $P(C)\sqrt{r_A} = 2.P(A)\sqrt{r_C}$. □

7.3. Đường tròn Soddy kết hợp với định lí Ceva sin

Định lý 6 (Ceva dạng sin)**.** *Cho tam giác ABC và các điểm D, E, F lần lượt trên BC, CA, AB. Khi đó AD, BE, CF đồng qui khi và chỉ khi* $\dfrac{\sin \widehat{BAD}}{\sin \widehat{CAD}} \cdot \dfrac{\sin \widehat{ACF}}{\sin \widehat{BCF}} \cdot \dfrac{\sin \widehat{CBE}}{\sin \widehat{ABE}} = 1.$

Bài toán 6 (Stalislav Takhaev - Sharygin Correspondence Round 2018)**.** *Cho ba đường tròn α, β, γ đôi một tiếp xúc ngoài nhau và cùng tiếp xúc ngoài với đường tròn Ω lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Tiếp tuyến chung của α, β cắt cung A_1B_1 không chứa C_1 tại C_2 , các điểm A_2, B_2 được xác định tương tự. Chứng minh A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng qui.*

Lời giải. Tiếp tuyến tại C_1 của Ω cắt tiếp tuyến tại B_1 của Ω , tiếp tuyến tại A_1 của Ω lần lượt tại A và B, tiếp tuyến tại B_1 của Ω cắt tiếp tuyến tại A_1 của Ω tại C. Có AA_2, BB_2, CC_2 lần lượt là các trục đẳng phương của β và γ, γ và α, α và β nên AA_2, BB_2, CC_2 đồng qui tại tâm đẳng phương của các đường tròn α, β, γ.

Áp dụng định lí Ceva dạng sin cho tam giác CA_1B_1 có CC_2, A_1C_2, B_1C_2 đồng qui:

$$\frac{\sin \widehat{C_2CA_1}}{\sin \widehat{C_2CB_1}} \cdot \frac{\sin \widehat{C_2A_1B_1}}{\sin \widehat{C_2A_1C}} \cdot \frac{\sin \widehat{C_2B_1C}}{\sin \widehat{C_2B_1A_1}} = 1$$

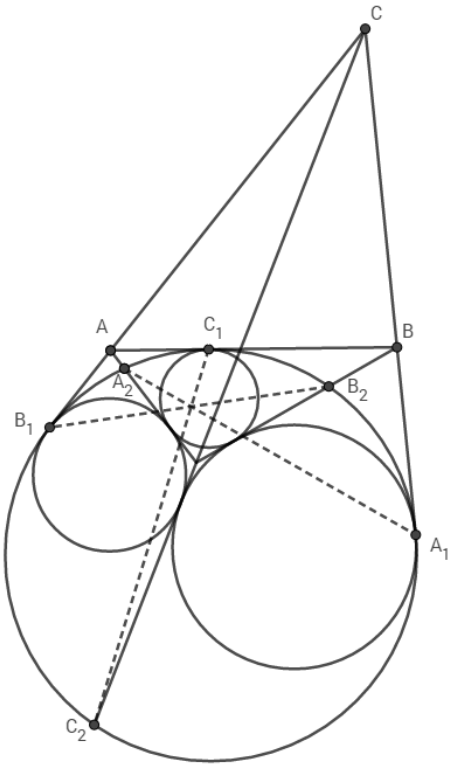
Mà ta cũng có $\begin{cases} \sin \widehat{C_2A_1B_1} = \sin \widehat{C_2C_1B_1} = \sin \widehat{C_2B_1C} \\ \sin \widehat{C_2A_1C} = \sin \widehat{C_2C_1A_1} = \sin \widehat{C_2B_1A_1} \end{cases}$.

Suy ra $\dfrac{\sin \widehat{C_2CA_1}}{\sin \widehat{C_2CB_1}} \cdot \left(\dfrac{\sin \widehat{C_2C_1B_1}}{\sin \widehat{C_2C_1A_1}}\right)^2 = 1$ hay $\left(\dfrac{\sin \widehat{C_2C_1B_1}}{\sin \widehat{C_2C_1A_1}}\right)^2 = \dfrac{\sin \widehat{C_2CB_1}}{\sin \widehat{C_2CA_1}}$.

Tương tư, ta cũng có $\left(\dfrac{\sin \widehat{B_2B_1A_1}}{\sin \widehat{B_2B_1C_1}}\right)^2 = \dfrac{\sin \widehat{B_2BA_1}}{\sin \widehat{B_2BC_1}}$ và $\left(\dfrac{\sin \widehat{A_2A_1C_1}}{\sin \widehat{A_2A_1B_1}}\right)^2 = \dfrac{\sin \widehat{A_2AC_1}}{\sin \widehat{A_2AB_1}}$.

Áp dụng định lí Ceva dạng sin cho tam giác ABC có AA_2, BB_2, CC_2 đồng qui:

$$\frac{\sin \widehat{C_2CB_1}}{\sin \widehat{C_2CA_1}} \cdot \frac{\sin \widehat{B_2BA_1}}{\sin \widehat{B_2BC_1}} \cdot \frac{\sin \widehat{A_2AC_1}}{\sin \widehat{A_2AB_1}} = 1$$



Suy ra $\dfrac{\sin \widehat{C_2C_1B_1}}{\sin \widehat{C_2C_1A_1}} \cdot \dfrac{\sin \widehat{B_2B_1A_1}}{\sin \widehat{B_2B_1C_1}} \cdot \dfrac{\sin \widehat{A_2A_1C_1}}{\sin \widehat{A_2A_1B_1}} = 1$, áp dụng định lí Ceva dạng sin lần nữa, ta có A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng qui.

□

8. Bài tập tự luyện

Bài toán 7. *Cho tam giác ABC, đường tròn α tiếp xúc với AB, AC, đường tròn β tiếp xúc với BA, BC, đường tròn γ tiếp xúc với CA, CB và ba đường tròn α, β, γ đôi một tiếp xúc với nhau. Dựng đường tròn Ω tiếp xúc ngoài với ba đường tròn α, β, γ lần lượt tại các điểmX, Y, Z. Chứng minh các đường thẳng AX, BY, CZ đồng qui.*

Bài toán 8. *Cho đường tròn α và β ngoài nhau, một đường tròn ω tiếp xúc ngoài với α tại A, với β tại B, một đường tròn ω' tiếp xúc ngoài với α tại C, với β tại D. Các tiếp tuyến chung trong tại A, B, C, D của các cặp đường tròn cắt nhau tạo thành một tứ giác. Chứng minh tứ giác đó ngoại tiếp đường tròn.*

Bài toán 9. *Cho ba đường tròn α, β, γ đôi một tiếp xúc ngoài nhau và cùng tiếp xúc ngoài với đường tròn Ω, đường tròn ω_1 tiếp xúc ngoài với α, β tại A, B và tiếp xúc trong với Ω, đường tròn ω_2 tiếp xúc ngoài với β, γ tại C, D và tiếp xúc trong với Ω, đường tròn ω_3 tiếp xúc ngoài với α, γ tại E, F và tiếp xúc trong với Ω. Các tiếp tuyến chung trong tại A, B, C, D, E, F, G cắt nhau tạo thành một lục giác. Chứng minh lục giác đó ngoại tiếp đường tròn.*

Bài toán 10. *Cho ba đường tròn α, β, γ đôi một tiếp xúc ngoài nhau và cùng tiếp xúc ngoài với đường tròn Ω, đường tròn ω_1 tiếp xúc ngoài với α, β và tiếp xúc trong với Ω tại X, đường tròn ω_2 tiếp xúc ngoài với β, γ và tiếp xúc trong với Ω tại Y, đường tròn ω_3 tiếp xúc ngoài với α, γ và tiếp xúc trong với Ω tại Z. GọiA, B, C lần lượt là tâm của các đường tròn α, β, γ. Chứng minh các đường thẳng AX, BY, CZ đồng qui.*

Bài toán 11. *Cho ba đường tròn α, β, γ đôi một tiếp xúc ngoài nhau và cùng tiếp xúc ngoài với đường tròn Ω tại các điểm A, B, C tương ứng, đường tròn ω_1 tiếp xúc ngoài với α, β và tiếp xúc trong với Ω, đường tròn ω_2 tiếp xúc ngoài với β, γ và tiếp xúc trong với Ω, đường tròn ω_3 tiếp xúc ngoài với α, γ và tiếp xúc trong với Ω. Gọi X, Y, Z lần lượt là tâm của các đường tròn ω_1, ω_2 và ω_3. Chứng minh các đường thẳng AX, BY, CZ đồng qui.*

Bài toán 12. *Cho ba đường tròn α, β, γ đôi một tiếp xúc ngoài nhau và cùng tiếp xúc ngoài với đường tròn Ω, đường tròn ω_1 tiếp xúc ngoài với α, β và tiếp xúc trong với Ω, đường tròn ω_2 tiếp xúc ngoài với β, γ và tiếp xúc trong với Ω, đường tròn ω_3 tiếp xúc ngoài với α, γ và tiếp xúc trong với Ω. Gọi A, B, C, X, Y, Z lần lượt là tâm của các đường tròn $\alpha, \beta, \gamma, \omega_1, \omega_2, \omega_3$. Chứng minh các đường thẳng AX, BY, CZ đồng qui.*

Bài toán 13 (Định lí 7 đường tròn, Evelyn – Money Coutts – Tyrrell, 1974)**.** *Cho sáu đường tròn $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6$ cùng tiếp xúc trong với đường tròn Ω tại các điểm A, B, C, D, E, F và thỏa các đường tròn tiếp xúc $\mathcal{C}_j$ ngoài với hai đường tròn cạnh nó ($\mathcal{C}_1$ cạnh $\mathcal{C}_6$) . Chứng minh các đường thẳng AD, BF, CF đồng qui.*

Tài liệu

[1] *Định lý Monge – D'Alembert và ứng dụng*, Nguyễn Văn Linh. https://nguyenvanlinh.files.wordpress.com/2013/04/monge-dalemberts-theorem.pdf.

[2] *The Soddy Circles*, Nikolaos Dergiades. http://forumgeom.fau.edu/FG2007volume7/FG200726.pdf.

[3] *Soddy point*, Math en folie. http://mathafou.free.fr/themes_en/ksoddyp.html.

[4] *Heron's Formula*, Descartes Circles, and Pythagorean Triangles, Frank Bernhart and H. Lee Price. https://arxiv.org/pdf/math/0701624.pdf.

[5] *Geometry in figures*, Arseniy Akopyan. https://www.mccme.ru/~akopyan/papers/EnGeoFigures.pdf.

[6] *Apollonius Problem*, Deko Dekov. http://www.ddekov.eu/j/2006/JCGEG200602.pdf.

[7] *AoPS Forum*. https://artofproblemsolving.com/.

MỘT MỞ RỘNG CỦA ĐỊNH LÝ FEUERBACH TRONG TRƯỜNG HỢP TAM GIÁC VUÔNG

Trần Quang Hùng, Hà Nội

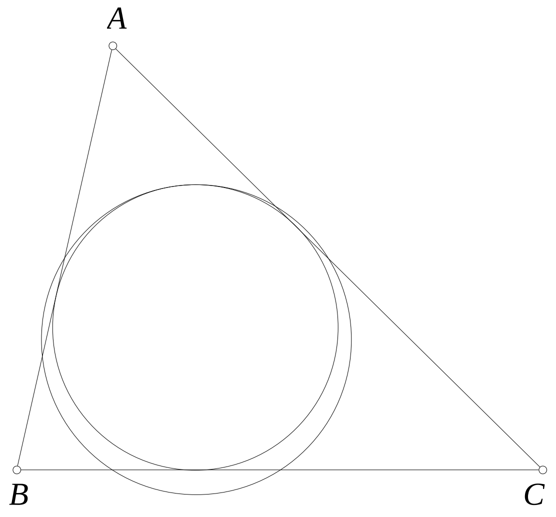
TÓM TẮT

Định lý Feuerbach trong trường hợp đặc biệt khi tam giác vuông cũng là một bài toán tiếp xúc khá thú vị. Hiển nhiên định lý Feuerbach trên một tam giác bất kỳ là một mở rộng cho định lý Feuerbach trên tam giác vuông. Bài viết này sẽ nêu ra một hướng mở rộng khác cho định lý Feuerbach trên tam giác vuông. Chúng tôi cũng sẽ chứng minh mở rộng này một cách thuần túy hình học. Toàn bộ bài viết này tham khảo trong [3].

1. Mở đầu

Định lý Feuerbach [1, 2] là một kết quả nổi tiếng của hình học phẳng và có thể coi là định lý kinh điển nhất về hai đường tròn tiếp xúc nhau trong tam giác.

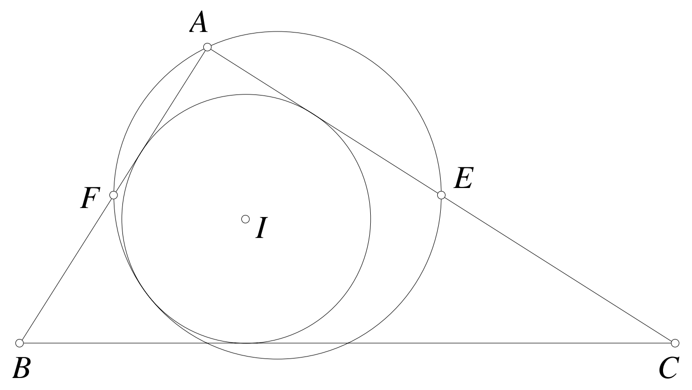
Định lý 1 (Feuerbach 1882 [1])**.** Trong một tam giác không đều thì đường tròn chín điểm tiếp xúc trong với đường tròn nội tiếp.



Hình 1.

Khi áp dụng định lý 1 vào tam giác vuông, ta một cách nhìn thú vị như sau

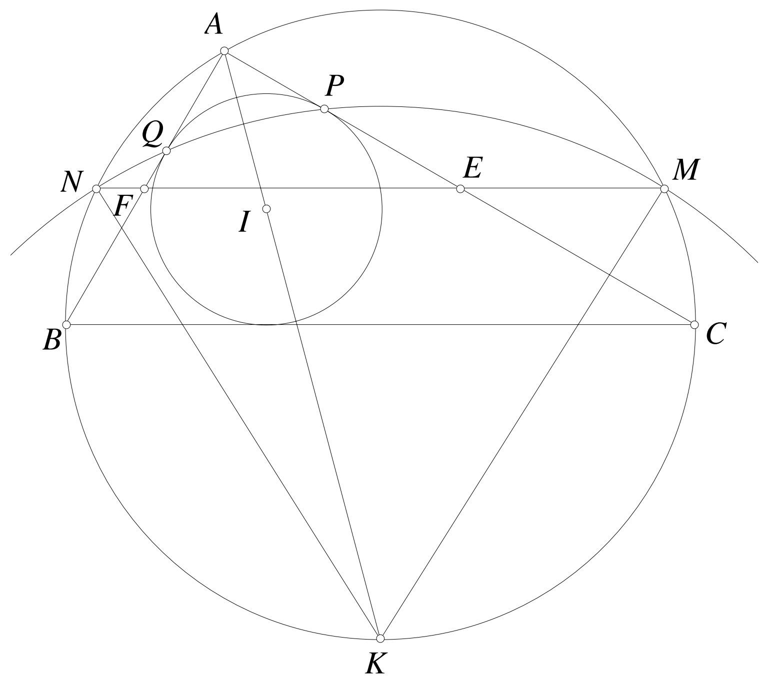
Định lý 2 (Định lý Feuerbach trên tam giác vuông)**.** Cho tam giác ABC vuông tại A. E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh CA, AB thì đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tiếp xúc đường tròn nội tiếp tam giác ABC.



Hình 2.

Sau đây, chúng ta đưa ra một cách dựng khác cho đường trung bình của một tam giác vuông bằng như sau

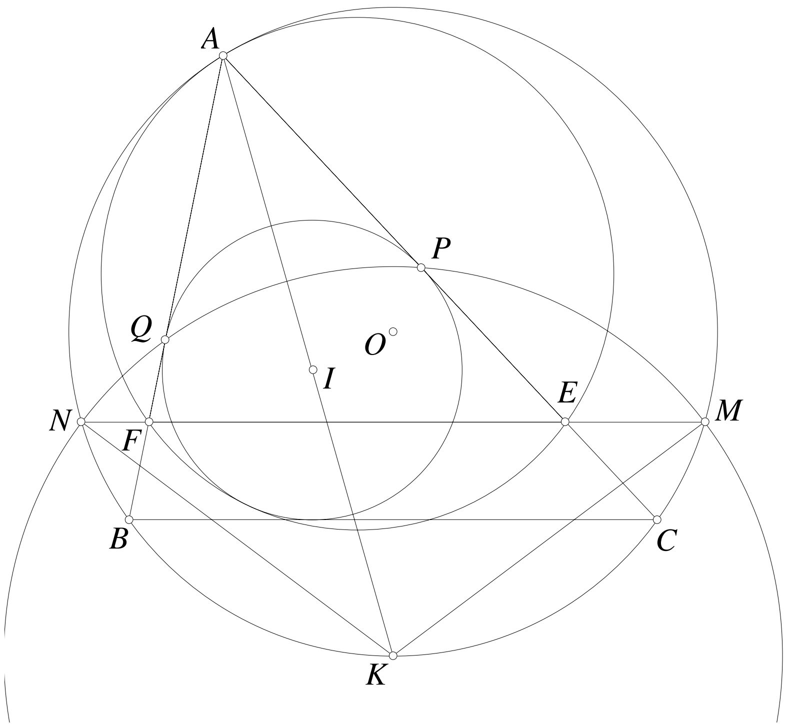
Định lý 3 (Một cách dựng đường trung bình trong tam giác)**.** Cho tam giác vuông ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với CA, AB tại P, Q. AI cắt (O) tại K khác A. Đường tròn (K) đi qua P và Q cắt (O) tại hai điểm M và N. Thì đường thẳng MN chứa đường trung bình ứng với A của tam giác ABC.



Hình 3.

Vậy nếu chúng ta có thể tổng quát hơn cách cách dựng đường trung bình ở trên và đồng thời kết hợp định lý 2, chúng ta sẽ thu được một bài toán tiếp xúc tổng quát hơn và đó chính là một mở rộng cho định lý 2 ra một tam giác bất kỳ

Định lý 4 (Trần Quang Hùng, mở rộng định lý 2)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh CA, AB lần lượt tại P, Q. AI cắt (O) tại K khác A. Đường tròn (K) đi qua P và Q cắt (O) tại hai điểm M và N. MN cắt CA, AB lần lượt tại các điểm E, F. Khi đó đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tiếp xúc với đường tròn (I).



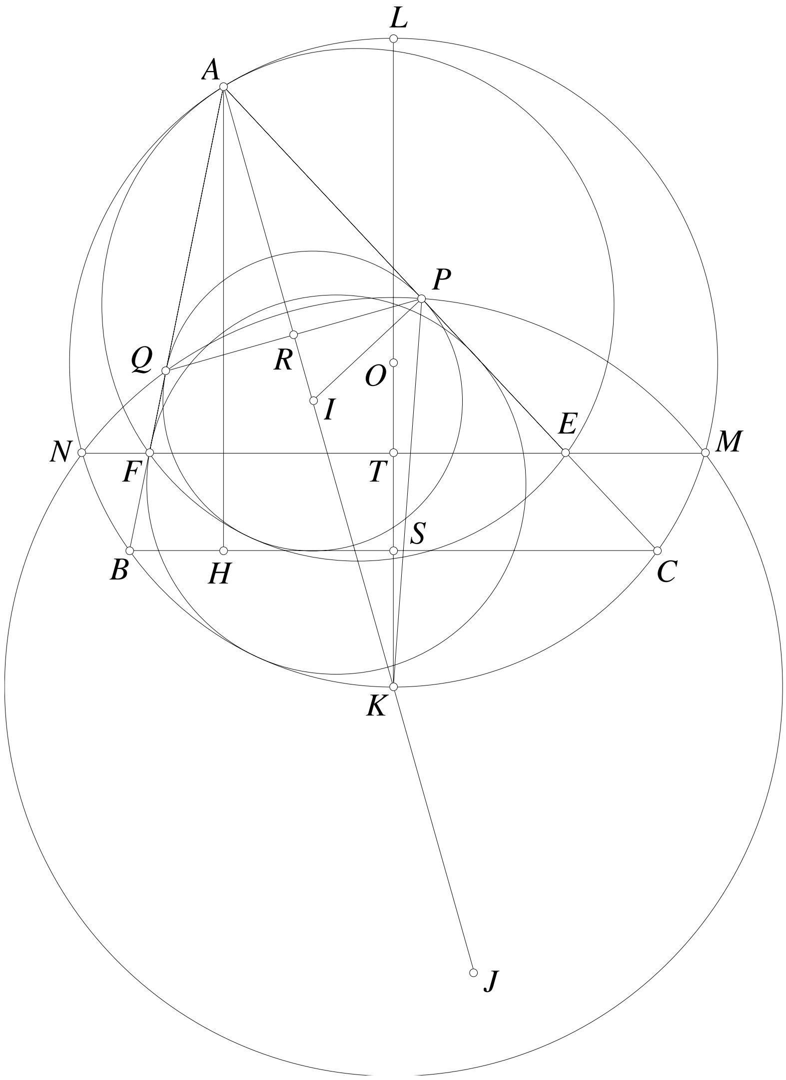
Hình 4.

Trong định lý 4 nếu tam giác ABC vuông tại A. Áp dụng cách dựng đường trung bình trong định lý 3 thì ta thu được định lý 2.

2. Chứng minh cho định lý mở rộng

Chứng minh. Gọi J là tâm bàng tiếp ứng với đỉnh A của tam giác ABC. H là hình chiếu vuông góc của A trên BC. KL là đường kính của (O). KL cắt BC, MN lần lượt tại các điểm S, T. AI cắt PQ tại R. Ta có các biến đổi độ dài như sau

$$\begin{aligned}
ST \cdot KL &= KT \cdot KL - KS \cdot KL \\
&= KM^2 - KC^2 \\
&= KP^2 - KI^2 \\
&= KR^2 + RP^2 - KI^2 \\
&= (KR - KI) \cdot (KR + KI) + RI \cdot RA \\
&= RI \cdot (KR + KJ) + RI \cdot RA \\
&= RI \cdot (RJ + RA) = RI \cdot AJ.
\end{aligned}$$



Hình 5.

Từ biến đổi trên, ta suy ra

$$\frac{KL}{AJ} = \frac{RI}{ST}. \tag{1}$$

Gọi R là bán kính của đường tròn (O) thì $KL = 2\mathrm{R}$. Ta lại có

$$AH \cdot KL = AH \cdot 2\mathrm{R} = AB \cdot AC = AI \cdot AJ,$$

ta suy ra

$$\frac{KL}{AJ} = \frac{AI}{AH}. \tag{2}$$

Từ (1) và (2), ta suy ra

$$\frac{RI}{ST} = \frac{AI}{AH},$$

hay

$$\frac{RI}{AI} = \frac{ST}{AH} = \frac{BF}{BA} = \frac{CE}{CA}.$$

Từ đó, ta thu được

$$\frac{AR}{AI} = \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} = k. \tag{3}$$

Ta xét phép vị tự $\mathcal{D}_A^k$ (phép vị tự tâm A tỷ số k) đồng thời kết hợp với (3), ta thấy phép vị tự này biến đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF thành đường tròn (O), đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC thành đường tròn mixtilinear ứng với đỉnh A của tam giác ABC [2]. Do sự tiếp xúc của đường tròn (O) và đường tròn mixtilinear nên qua phép vị tự $\mathcal{D}_A^k$ đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và đường tròn (I) tiếp xúc nhau. Ta hoàn thành chứng minh. $\square$

Lời cảm ơn. Tác giả bài viết chân thành cảm ơn **TS. Trần Nam Dũng** vì thầy đã luôn tâm huyết, duy trì đều đặn tạp chí Epsilon. Nhờ đó mà tác giả có cơ hội được giới thiệu bài viết này tới đông đảo bạn đọc của tạp chí.

Tài liệu

[1] H.S.M. Coxeter and S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, The Math. Assoc. of America, 1967.

[2] P. Yiu, *Euclidean Geometry*, Florida Atlantic University Lecture Notes, 1998; available at `http://math.fau.edu/Yiu/Geometry.html`.

[3] T. Q. Hung, *Feuerbach's Theorem on right triangle with an extension*, International Journal of Geometry, Vol. **6** (2017), No. 2, October.

BÀI TOÁN HAY LỜI GIẢI ĐẸP

Nguyễn Duy Liên
(Trường THPT Chuyên Vĩnh Phúc)

GIỚI THIỆU

Chuyên mục này được lấy cảm hứng từ bài viết của thầy Nguyễn Duy Liên ở số báo trước về bài toán số 6 trong kỳ thi IMO 2001 với 5 cách giải khác nhau. Mục này sẽ để dành viết về những bài toán hay, lời giải đẹp và những câu chuyện thú vị xung quan những bài toán và lời giải đó.

Tên của chuyên mục được mượn từ tên của một nhóm những người yêu toán trên Facebook do anh Nguyễn Văn Lợi sáng lập "*Bài toán hay – Lời giải đẹp – Đam mê toán học*". Chuyên mục ghi nhận các đề cử của bạn đọc và sẽ chọn đăng mỗi kỳ 1, 2 bài toán.

Số này chúng ta sẽ gặp lại thầy Nguyễn Duy Liên với một bài viết của thầy nói về lời giải của một bài toán số học của Bulgaria.

Giải được bài toán Số học hay và khó, ta đã cảm thích thú rồi. Nhưng nếu một bài toán Số học hay và khó mà giải được bằng nhiều cách mà từ đó ta có thể giải được, hay tạo ra một số bài toán cùng lớp bài toán đó thì niềm vui còn nhân lên nhiều lần. Bài viết này, tôi xin giới thiệu với các bạn 2 cách giải cho bài toán số 6 về Số học khá hay và khó trong kỳ thi Olympic Toán học Bulgarian 2005. Chúng ta cùng bắt đầu với bài toán đó nhé.

Bài toán. *Gọi a, b, c là các số nguyên dương sao cho ab chia hết $c(c^2-c+1)$ và $a+b$ chia hết cho c^2+1. Chứng minh rằng các tập hợp $\{a,b\}$ và $\{c,c^2-c+1\}$ trùng nhau.*

Lời giải 1. Trước hết ta chứng minh bổ đề sau

Bổ đề. Nếu x, y và n là các số nguyên dương sao cho $\frac{xy}{x+y}>n$, thì

$$\frac{xy}{x+y}\geqslant n+\frac{1}{n^2+2n+2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\{x,y\}=\{n+1,n^2+n+1\}$.

Vì $xy>n(x+y)$ nên tồn tại $r\in\mathbb{Z}^+$ sao cho $xy=n(x+y)+r$, hay là

$$(x-n)(y-n)=n^2+r. \tag{1}$$

Lại có $xy>n(x+y)>nx$, cho nên $x>n$, tương tự $y>n$. Tiếp tục đặt

$$x=n+d_1,\ \ y=n+d_2,\quad d_1,\ d_2\in\mathbb{Z}^+.$$

Từ (1) suy ra $d_1 d_2 = n^2 + r$. Chú ý rằng với $A \in \mathbb{Z}^+$ thì $\frac{r}{A+r} \geqslant \frac{1}{A+1}$, và

$$d_1 + d_2 \leqslant 1 + d_1 d_2 \leqslant 1 + n^2 + r.$$

Do đó

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{n^2 + d_1 d_2 + n(d_1 + d_2)}{2n + d_1 + d_2} = n + \frac{r}{2n + d_1 + d_2} \geqslant n + \frac{r}{2n + n^2 + 1 + r} \geqslant n + \frac{1}{n^2 + 2n + 2}.$$

Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán, đặt $c(c^2 - c + 1) = pab$, $a + b = q(c^2 + 1)$ và $x = pqa,\ y = pqb$ với $p, q \in \mathbb{Z}^+$, ta được

$$\frac{c(c^2 - c + 1)}{c^2 + 1} = \frac{pqab}{a + b} = \frac{xy}{x + y}.$$

Khi đó

$$\frac{xy}{x+y} = c - \frac{c^2}{c^2 + 1} = c - 1 + \frac{1}{c^2 + 1},$$

suy ra $\frac{xy}{x+y} > c - 1$. Đến đây áp dụng bổ đề ta được

$$\frac{xy}{x+y} \geqslant c - 1 + \frac{1}{(c-1)^2 + 2(c-1) + 2} = c - 1 + \frac{1}{c^2 + 1}.$$

Vì c và $c^2 - c + 1$ nguyên tố cùng nhau đồng thời $x = pqa,\ y = pqb$ cho nên $p = q = 1$. Do đó $\{a, b\} = \{c, c^2 - c + 1\}$, bài toán được chứng minh. □

Lời giải 2. Giả sử $a \leqslant b$ và đặt $a + b = k(c^2 + 1),\ k \in \mathbb{Z}^+$, suy ra

$$b = k(c^2 + 1) - a \geqslant a,$$

hay là

$$a \leqslant \frac{k(c^2 + 1)}{2}.$$

Lại có $c(c^2 - c + 1) \vdots ab$, cho nên $ab = a[k(c^2 + 1) - a] \leqslant c(c^2 - c + 1)$. Xét hàm số

$$f(x) = x[k(c^2 + 1) - x], \quad x \in \left(-\infty, \frac{k(c^2 + 1)}{2}\right],$$

ta thấy $f(x)$ là hàm số đồng biến và $\frac{k(c^2+1)}{2} \geqslant c$, cả hai số a, c đều thuộc khoảng $\left(-\infty, \frac{k(c^2+1)}{2}\right]$.

Nếu $a > c$ thì

$$a[k(c^2 + 1) - a] = f(a) > f(c) = c[k(c^2 + 1) - c] \geqslant c(c^2 - c + 1), \quad \text{vô lý.}$$

Do đó $a \leqslant c$ và

$$b \mid [bc - kc(c^2 - c + 1)] = c[k(c^2 + 1) - a] - kc(c^2 - c + 1) = kc^2 - ac.$$

Suy ra $b \leqslant kc^2 - ac$, nếu $kc^2 - ac > 0$ nhưng

$$b = k(c^2 + 1) - a > kc^2 - a \geqslant kc^2 - ac \geqslant kc^2 - c^2 \geqslant 0, \quad \text{vô lý.}$$

Vậy để xảy ra các điều trên thì $kc^2 - ac = 0$, suy ra $a = kc \leqslant c$, do đó $k = 1$ và $a = c$. Vì thế $b = k(c^2 + 1) - a = c^2 + 1 - c$, ta có điều phải chứng minh. □

Hai lời giải trên cho ta vẻ đẹp của mỗi lời giải, lời giải 1 là một sự kết hợp nhuần nhuyễn giữa bất đẳng thức số học, sự trù mật của các tập số tự nhiên và tính chất số học. Lời giải 2 cho ta một sự kết hợp tinh tế về giải tích việc xây dựng hàm số và tính đơn điệu của nó với các tính chất chia hết của tập số nguyên dương. Ngoài hai cách giải trên các bạn cùng tôi tiếp tục đi tìm những lời giải mới , có thể cho những bài hay và khó trong vốn bài của bạn. Cứ như tôi thiết nghĩ đã mới khi trong đời ta đạt được các lời giải thật ngắn, đẹp và đắt. Nên ta vẫn trân trọng những lời giải của cá nhân tuy có dài dòng chút đỉnh với phương châm "*Cách giải này dài với bài này nhưng sẽ ngắn với bài khác*".