# Epsilon

Tạp chí online của cộng đồng
những người yêu toán

*Khi nó xuất hiện, nó làm rung động cả thế giới hạt nhân, như sứ giả của một lực thứ năm chưa ai từng biết đến.* **Robert Gast**
**(X17 phá lưới)**

*Thế giới ngày nay càng ngày càng cần đến hiểu biết về toán học, dù là bạn sẽ trở thành chuyên gia trong lĩnh vực gì thì các khái niệm toán hiện đại nếu hiểu đúng nghĩa sẽ mang lại lợi thế cho bạn.* **Nguyễn Tiến Dũng**
**(10 cái đầu tiên của một lần đi thi IMO)**

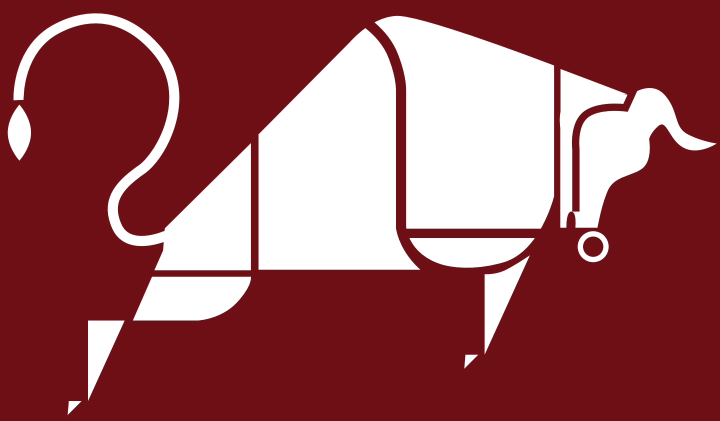

**TOÁN HỌC VÀ ÂM NHẠC – VÌ SAO ÂM NHẠC CÓ 7 NỐT?**
Nam Nguyen

**VỀ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC CỦA VASILE CIRTOAJE**
Lê Phúc Lữ

VÀ CÁC CHUYÊN MỤC KHÁC

**Biên tập viên:**
Lê Viết Ân
Võ Quốc Bá Cẩn
Trần Quang Hùng
Nguyễn Văn Huyện
Lê Phúc Lữ
Tống Hữu Nhân
Nguyễn Tất Thu
Đặng Nguyễn Đức Tiến

**Chủ biên:**
Trần Nam Dũng



# LỜI NGỎ

Covid-19 khởi nguồn từ năm 2019 nhưng đến năm 2020 mới hoành hành, tác yêu tác quái. Con chuột Canh tí đã phải gồng mình chống lại con virus nguy hiểm này, và rất nhiều nơi, nhiều vùng, cuộc sống của mọi người đã trở nên vô cùng vất vả. Năm mới Tân Sửu, với sức khỏe vượt trội, đặc biệt là với tinh thần yêu lao động, những con trâu mộng lực lưỡng chính trực sẽ đâm chết những con Covid-19 gian xảo lươn lẹo để đem lại sự bình yên cho thế giới.

Cho dù cuộc chiến sẽ còn cam go, vất vả, nhưng chúng ta vẫn luôn lạc quan tiến về phía trước. Và dường như những hoàn cảnh khắc nghiệt chưa bao giờ là rào cản cho những sáng tạo, cho những phát minh, cho những tìm kiếm mới. *"Học nhi tri – Hành nhi tri – Du nhi tri – Khốn nhi tri"*. Học để biết, hành để biết, giao du để biết và trải qua gian khó để biết. Không có điều kiện giao du trực tiếp, chúng ta có thể giao du trên mạng. Khó khăn vì covid-19 lại tạo cho những phương thức giao tiếp mới, những động lực sáng tạo mới. Mỗi người dường như tập trung hơn, sống nội tâm hơn, từ đó lại có những ý tưởng, phát hiện sâu sắc hơn.

Covid-19 làm cho Epsilon số 19 trở nên đặc biệt hơn, bên cạnh các ý nghĩa (đa số là tích cực) vốn có của nó. Epsilon 19 đem đến một ý nghĩa tích cực cho số 19. Bởi có 19 tức là sẽ có 20, 21 … Chúng ta vẫn cùng nhau đi trên con đường, đem toán học, đem cái đẹp, đem cuộc sống đến với bạn đọc.

*Per aspera ad astra*

# Mục lục

*Nam Nguyen*

Toán học trong âm nhạc (Phần 1) - Vì sao âm nhạc có 7 nốt? . . . . . . . . . . . . . . . . **5**

*Robert Gast, dgi. Đàm Thanh Sơn*

X17 phá lưới . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **8**

*Nguyễn Lê Anh*

Thời gian là gì? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **17**

*Nguyễn Lê Anh*

Đi tìm nguồn gốc dân tộc Việt Nam . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **21**

*Nguyễn Hùng Sơn*

Toán học trong hôn nhân . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **29**

*Tống Hữu Nhân*

Đôi nét về kỳ thi Olympic hình học Iran . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **34**

*Nguyễn Duy Phước*

Về một bài toán tiếp xúc hay . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **45**

*Trần Quang Hùng*

Một ứng dụng của tam giác Fuhrmann . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **55**

*Trần Nam Dũng*

Câu chuyện xung quanh một số tổng vô hạn . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **59**

*Nguyễn Hoàng Vinh*

Một vài đánh giá trên dãy số . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **78**

*Nguyễn Tất Thu*

Ứng dụng tính chia hết của 0 trong giải phương trình hàm . . . . . . . . . . . . . . . . **90**

*Võ Quốc Bá Cẩn*

Xung quanh bài toán Phương trình hàm trong đề thi VMO 2020 - 2021 . . . . . . . . . . . **98**

*Đậu Thanh Kỳ*

Sáng tạo qua các đẳng thức Vector . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **114**

*Lê Phúc Lữ*

Về một bất đẳng thức của Vasile Cirtoaje . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **140**

*Trần Nam Dũng*

Các vấn đề cổ điển và hiện đại . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **152**

*Nguyễn Tiến Dũng*
Mười cái đầu tiên của một lần đi thi IMO . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **167**

# TOÁN HỌC VÀ ÂM NHẠC (PHẦN 1) - VÌ SAO ÂM NHẠC CÓ 7 NỐT?

Nam Nguyen

## GIỚI THIỆU

Hơn ba năm về trước, ở Epsilon số 14, chúng tôi đã được vinh dự đăng bài viết về "Hành trình đi tìm máy bay mất tích MIG-21U" của Thầy Nguyễn Lê Anh. Cuộc hành trình kỳ diệu đó hẳn không thể bắt đầu nếu như không có lời kêu gọi trên Facebook của một người có tên Nam Nguyen, một nhân vật "huyền thoại của cõi Face", "nhà chép sử" với lượng bài viết chất lượng cao mà nếu in ra chúng tôi nghĩ có thể lấp đầy cả một thư viện!

Trong số Epsilon 19 này, chúng tôi vinh dự được sự đồng ý của "nhà chép sử" cho phép chia sẻ loạt bài Toán học và âm nhạc của ông (Cá nhân tác giả trên Facebook chủ ý không để tên thật cũng như thông tin cá nhân, nên để tôn trọng ý nguyện của tác giả, chúng tôi chỉ sử dụng tên gọi trên Facebook).

Có một điều tôi băn khoăn từ hồi nhỏ, nhất là từ lúc bắt đầu học xướng âm và chơi nhạc cụ: vì sao người ta dùng 7 nốt nhạc, và giữa các nốt (có cao độ cố định, được đo bằng dụng cụ đo tần số chuẩn) có thêm "thăng" và "giáng" nữa thôi, thế là đủ? Lớn lên chút nữa thì giải thích của thầy giáo âm nhạc, rằng ngày trước nhà thờ La Mã dùng bài thơ gì đấy có 7 từ đầu câu được cha cố nào đấy dùng từ thế kỷ 11 để đặt tên cho 7 nốt nhạc... rồi sau cứ thế theo truyền thống, hiển nhiên giải thích vậy là không thỏa đáng. Tại sao các cụ Á Đông nhà ta thì chỉ dùng hệ 5 nốt. Khi được học vật lý thì lại càng thắc mắc thêm, sao cao độ của nốt "la" chuẩn là 440 Herzt mà không cao hơn hay thấp hơn? (Tai người ta có thể nghe được từ 20 Hz đến 5000 Hz đấy nhé!). Chứng tỏ tai người ta nói chung có những cao độ nghe rất "sướng tai" – và hơn nữa có những nốt đi với nhau nghe rất "đã" – trong trường hợp ngược lại thì phải "chướng tai" hay "nghe ngang phè phè", phỏng ạ? Vậy cơ sở nào để con người ta cảm nhận như vậy (và các "con" khác, thậm chí người ở châu lục khác, thời gian khác) liệu có cảm nhận giống chúng ta không? Không hề đơn giản, và có giải thích được chắc chắn không phải là các nhạc công, nhạc sỹ, ca sỹ... mà phải nhờ tới các nhà khoa học nghiên cứu bản chất vấn đề!

Cũng na ná vậy, nếu nhìn vào đàn piano (hay guitar) thì thấy có 12 "nửa tông" – khác với các loại đàn như violin, cello, đàn bầu, kèn... có thể chơi được cao độ bất kỳ. Tuy vậy người ta vẫn so dây của đàn dây với nốt "la" của piano. Còn nếu ai chơi đàn dây như violin chẳng hạn đều biết, là nếu đặt nhẹ ngón tay lên dây đàn ở vị trí chính giữa cung đàn, thì sẽ có cao độ (tần số) gấp đôi (điều này thì hoàn toàn là vật lý thôi – độ dài dây ngắn lại đúng một nửa mà) – và ở dây cao nhất của violin thì âm thanh này được coi là "nốt nhạc thần thánh" vì nghe rất hay! Nhưng tại sao nhỉ? Không nhờ mấy ông toán học, vật lý và sinh học thì đố mà biết được... Điều này khác hẳn việc "tại sao chỉ có 10 chữ số" và "tại sao chỉ có hơn ba chục chữ cái" mà vẫn đủ dùng đấy nhé, khác hẳn về bản chất (à, các bạn có biết câu trả lời trong 2 trường hợp kia không?).

Vậy thong thả xem nhé! Các thầy dạy có 7 nốt như sau (tên đúng là lấy từ một bài thơ thế kỷ 11 của Thiên Chúa giáo thật):

- Do – Dominus – Chúa Trời;
- Re – rerum – vật chất;
- Mi – miraculum – điều kỳ diệu;
- Fa – familias planetarium - hệ mặt trời;
- Sol – solis – mặt trời;
- La – lactea via – dải Ngân Hà;
- Si – siderae – bầu trời.

Con người dần dần đi tới hệ thống ghi âm nhạc 7 nốt (với "thăng" và "giáng" nữa là 12). Không đơn giản 7 nó thích hợp với 7 ngày, 7 đêm, 7 màu cầu vồng... còn 12 thích hợp với 12 tháng trong năm hay 24 giờ trong ngày đâu, có thể có trùng hợp thôi nhưng nguyên nhân là toán học cơ!

"Hòa âm đẹp" là thế nào? Nếu có hai âm thanh với cao độ $w1$ và $w2$ thì như dân nhạc biết rằng nếu tỷ lệ độ cao của chúng bằng 2 (một "ốc-ta") sẽ là tỷ lệ rất hay. Nếu nó là 3/2 ("quin-ta") thì cũng hay đấy, hoặc 4/3 ("quan-ta") cũng khá. Còn 5/4 ("terxia") cũng tàm tạm... Tên gọi chả cần nhớ đâu, nhưng các nhà nghiên cứu âm nhạc thấy đúng là nghe xuôi tai hơn thật! Vì sao như vậy nói thật là các nhà khoa học chưa có câu trả lời đủ sức thuyết phục đâu, nhưng thực tế và vô vàn thực nghiệm cho thấy là như vậy! Cần chấp nhận Tiên đề 1: "tỷ lệ w2/w1 nếu bằng tích của các phân số, với tử số và mẫu số là các số nguyên tố và số lũy thừa là số nguyên (có thể âm!) càng bé thì hợp âm càng hay!". Chẳng hạn 2, 3/2, 4/3 nghe hay rồi đã đành, nhưng 3x5/8 chẳng hạn nghe được, tuy không còn hay lắm nữa. Lệch ra thì dở!

Tiên đề thứ 2 là "sự bất biến": "Quin-ta từ 7 "nửa tông" phải không thay đổi, bất kể nó bắt đầu từ nốt nào". Tức là tỷ lệ tần số nốt "đô" và "son" hay "đô thăng" và "son thăng" hay "rê" và "la"... đều như nhau, và bằng 3/2. Một giai điệu hay tác phẩm có thể chơi với những "tông" khác nhau, miễn là bảo toàn tỷ lệ này! Một điều dường như hiển nhiên (nhất là đối với ai học piano ngày nay) nhưng lại không hề hiển nhiên chút nào, nếu ai chịu khó nghe những tác phẩm cổ điển xưa một chút, điều này chỉ được phát hiện và áp dụng từ thế kỷ 18. Chẳng hạn tác phẩm nổi tiếng của Bach mà được cụ Nguyễn Văn Thương dịch ra là "Cờ-la-vơ-xanh thật hài hòa" – nó chính là kết quả của việc áp dụng tiên đề này! Còn nếu ai nghe các tác phẩm cổ điển cũ hơn sẽ có thể thấy những chỗ dường như họ lên dây sai đấy... Ai biết được, có lẽ nếu người trung cổ nghe nhạc hiện đại họ cũng có cảm giác ngang phè thì sao?

Có vũ khí là hai Tiên đề ấy rồi ta bắt đầu đi tìm, bao nhiêu nốt nhạc là "hay" nhất và tiện nhất? Gọi số cần tìm ấy là $N$, ta biết rằng một ốc-ta được chia làm $N$ nốt nhạc và các nốt nối tiếp nhau sẽ cao hơn với tỷ lệ tần số "2 lũy thừa $1/N$". Và trong dãy $N$ số ấy phải có tần số rất gần với "quin-ta" và "quan-ta", dễ hiểu là tỷ lệ tần số của hai âm này là $3/2 : 4/3 = 9/8$. Nếu gọi hiệu số của số lũy thừa 2 dành cho "quin-ta" và "quan-ta" là $n$ thì ta có: "$2^n/N \approx 9/8$". Dùng công thức logarithm sẽ có: $n \approx N.0,170 \approx N/6$.

Nếu $n = 1$ thì $N = 6$. Khi đó ta sẽ chỉ có các nốt sau: "đồ", "rê", "mi", "pha thăng", "son thăng", "la thăng", "đô". Nhưng khi đó "qua-ta" với "quin-ta" bị trượt ra ngoài nhiều quá, rất nhiều tác phẩm chả đánh được! Nếu $n = 2$ còn $N = 12$ thì ta có đúng trường hợp như âm nhạc châu Âu hiện đại bây giờ, 12 "nửa tông" và 7 nốt chính! "Quan-ta" và "quin-ta" rất chính xác, tuy rằng dĩ nhiên không thể tuyệt đối được rồi, nhưng tai người hầu như không phân biệt được sai lệch về tần số âm thanh chỉ vài ba phần trăm thôi. Người ngày xưa tất nhiên không dùng toán để tìm, nhưng bằng thực nghiệm họ đã tìm ra phương án tối ưu rồi!

Thế sao không dùng $N = 24$, hay $N = 56$ chẳng hạn? Câu trả lời dễ hiểu thôi: điều này không tăng được độ chính xác lên bao nhiêu cả (các bạn tự tính đi!) – tai người hiện đại chưa phân biệt được các sai lệch về cao độ của âm thanh tinh tế đến vậy - mà phức tạp vô cùng cho người học nhạc, chơi nhạc. Một số dụng cụ âm nhạc của Ấn Độ có $N = 194$, vẫn chơi nhạc được chứng tỏ người ta vẫn học được, tuy vậy sai số của "quin-ta" hầu như không được cải thiện!

Chúng ta đã dùng toán học để bảo vệ cho phương án "7 nốt nhạc" của âm nhạc ngày nay. Cũng như vậy, các phần tiếp theo có thể dùng toán học và các môn khoa học khác để soi sáng về gam hay giọng "trưởng", "thứ", âm giai, hòa âm... Còn nếu ai nghe thầy giáo nhạc nói rằng: "bài này vui, phải dùng gam đô trưởng" hay "bài này buồn lắm, chơi la thứ đi" mà không thấy thắc mắc gì thì có thể bỏ qua, giống như lái ô tô, có thể chỉ cần tay lái lụa chứ động cơ máy xăng hay máy dầu khác gì nhau kệ đi. Nhưng ai đã tò mò thì nhớ đừng có hỏi mấy ông nhạc sỹ, kẻo lại bị mắng oan đấy nhé! Các ông ấy chỉ biết lên dây thôi...

Ghi chú:

1. Theo status trên ta cần nhớ số quan trọng nhất trong âm nhạc châu Âu đương đại là: $\log_2 3 \approx 19/12$.

2. Một số nhà "cách tân" muốn đưa thêm nhiều nốt nhạc vào sử dụng, để tạo ra nhiều hiệu ứng hơn, không thì "âm nhạc sắp chấm hết rồi vì chỉ có "83 521 hợp âm cả thảy" – theo tôi là còn lâu mới cần thiết, nhưng có lẽ 20-30 năm nữa âm nhạc sẽ khác chăng?

3. Đầu năm nếu ai thích "ong thủ" thì xin mời tham khảo ở đây chẳng hạn: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3271183/

4. Cao độ nốt La = 440 Hz là của Đức quốc xã ban hành, các nhạc sỹ châu Âu tranh đấu đòi dùng chuẩn 432 Hz mà không được, rất ảnh hưởng đến toàn xã hội... tôi cũng đã viết về điều này. Âm nhạc (âm thanh) có tác dụng khủng khiếp đấy, cần tiếp tục nghiên cứu.

# X17 PHÁ LƯỚI

Robert Gast
Người dịch Đàm Thanh Sơn

## GIỚI THIỆU

Một lực chưa ai biết đến đang làm rung động thế giới hạt nhân. Nhưng lực này có thật hay không? Có phải hạt X17 khét tiếng là hạt mang lực này hay không? Những người "*thợ săn hạt*" đang bám sát theo dấu vết của nó.

Bài viết được dịch từ bài *Die fünfte Kraft* [1] của Robert Gast. Mọi sai sót trong việc dịch thuật là của tác giả.

Đó là một thứ rất nhỏ, chỉ như một dấu chấm trong thế giới vi mô, như mọi hạt cơ bản khác. Nhưng hạt X17 phải là một hạt rất kén chọn, rất kín đáo, mà lại rất khoẻ. Khi nó xuất hiện, nó làm rung động cả thế giới hạt nhân, như sứ giả của một lực thứ năm chưa ai từng biết đến.

Nhưng lực thứ năm và hạt X17 có thực sự tồn tại hay không? Một trong những người muốn tìm ra câu trả lời cho câu hỏi này đang ở Debrecen, trong một viện nghiên cứu hàng đầu của Hungary. Ông thở dài. Attila Krasznahorkay là một người kín đáo, rụt rè, khiêm tốn và lịch sự, 66 tuổi, trông giống một người thủ thư hơn một người "*thợ săn hạt*". "*Chúng ta phải hết sức thận trọng*", ông khẽ nói.

Với ông, cuộc săn bắt đầu 20 năm trước, khi ông nhận cú điện thoại từ một đồng nghiệp người Hà Lan, Fokke de Boer. De Boer sốt sắng nhiệt tình kể cho ông về hạt mới. Đầu tiên Krasznahorkay còn hoài nghi, ông đòi các tài liệu về vấn đề này, cân đi nhắc lại. Sau đó ông đồng ý. "*Lúc đó tôi nghĩ chỉ một tuần là xong.*"

Đến hôm nay Krasznahorkay vẫn chưa làm xong việc này. Ông thành một dạng thủ lĩnh cuộc săn. Trên bàn làm việc của ông ở Viện nghiên cứu Atomki là những bài báo được đóng ghim cẩn thận. Ánh sáng mặt trời buổi chiều xuyên qua rèm cửa, ngón tay ông chỉ vào một chỗ lồi trên đồ thị, cao chưa đến 3 cm. Đây là dấu vết của hạt X17, Krasznahorkay và cộng sư tin là như vậy. "*Đây là một sai lệch rất nhỏ*".

Trong vật lý, rất ít khi có ai tìm ra được một hạt cơ bản, và mỗi lần như vậy sử sách đều ghi lại. Giống như năm 2012 khi các nhà vật lý ở trung tâm nghiên cứu CERN ở Geneva tìm ra hạt Higgs nổi tiếng. Để tìm ra được hạt này người ta phải dùng đến một khẩu súng hạt nhân dài 27 km (máy gia tốc LHC) và hai bộ phân tích (detector) khổng lồ, mỗi cái nặng hàng nghìn tấn. Hàng ngàn nhà khoa học tham gia lập kế hoạch, xây cất, và phân tích kết quả trong vòng hàng chục năm.

Hình 1: Attila Krasnahorkay trong phòng làm việc ở Viện Atomki, tháng 3 năm 2020.

Ở Debrecen mọi thứ đều nhỏ hơn vài cỡ. Nhóm của Attila Krasznahorkay có khoảng chục người, trong đó có con trai của ông, cũng làm vật lý. Thỉnh thoảng một số em học sinh giỏi các trường phổ thông cũng được đến tham gia. Máy gia tốc cho cuộc tìm hạt X17 có thể đặt gọn trong một toà nhà to bằng gian chơi thể thao của một trường học. Mới nhìn thì bộ phân tích trông hơi giống một cái "*vòng quay may mắn*", mắc thêm rất nhiều dây điện.

Từ tháng 1 năm 2016 khi nhóm Hungary công bố *số liệu đo lường* [2] có chỗ nhô lên trong đồ thị, các chuyên gia trên thế giới đắn đo: Phải chăng những người ngoài cuộc đã làm nên một bước đột phá lịch sử? Hay là thí nghiệm Hungary bị sai, và X17 là ảo tưởng?

Đi tìm câu trả lời cho những câu hỏi này, ta sẽ khám phá ra một câu chuyện đã bắt đầu từ hàng chục năm trước. Đó là câu chuyện về electron và phản hạt khó lường của nó, hạt positron, về các nhà vật lý ở các thành phố Darmstadt và Frankfurt của Đức, về Attila Krasznahorkay và đồng nghiệp người Hà Lan Fokke de Boer. Nhưng trên hết, đó là một câu chuyện về vòng xoáy của khám phá, về ranh giới giữa sự thật và mong muốn, và về câu hỏi khi nào thì ranh giới đó đã bị bước qua.

## Hồi 1: Con đường mòn dẫn vào một thế giới khác

Câu chuyện bắt đầu ở nơi trí tưởng tượng của con người đạt đến giới hạn: Trong thế giới của hạt nhân nguyên tử và các lực xuất hiện ở trong đó. Đó là một thế giới trừu tượng, thoạt nhìn chỉ các chuyên gia mới hiểu được, nhưng rất quan trọng cho quan niệm của con người về Vũ trụ.

Trong thế giới này, các nhà vật lý thấy có hai "*tộc*" hạt cơ bản. Đầu tiên có những "*viên gạch*" xây nên thế giới xung quanh chúng ta, trong đó có các hạt quark trong hạt nhân nguyên tử và, nằm xa hạt nhân hơn, các hạt electron.

Hình 2: Máy LHC chạy dài 27 km trong một đường hầm hình tròn bên dưới thành phố Geneva. Bằng máy này các nhà khoa học đã tìm ra hạt Higgs.

Nhưng nếu chỉ có quark và electron thì Vũ trụ sẽ hoàn toàn bất động. Một thế giới của các viên Lego mà không có gì chuyển động, bởi vì làm thế nào một hạt electron biết được là có một hạt khác ở gần nó?

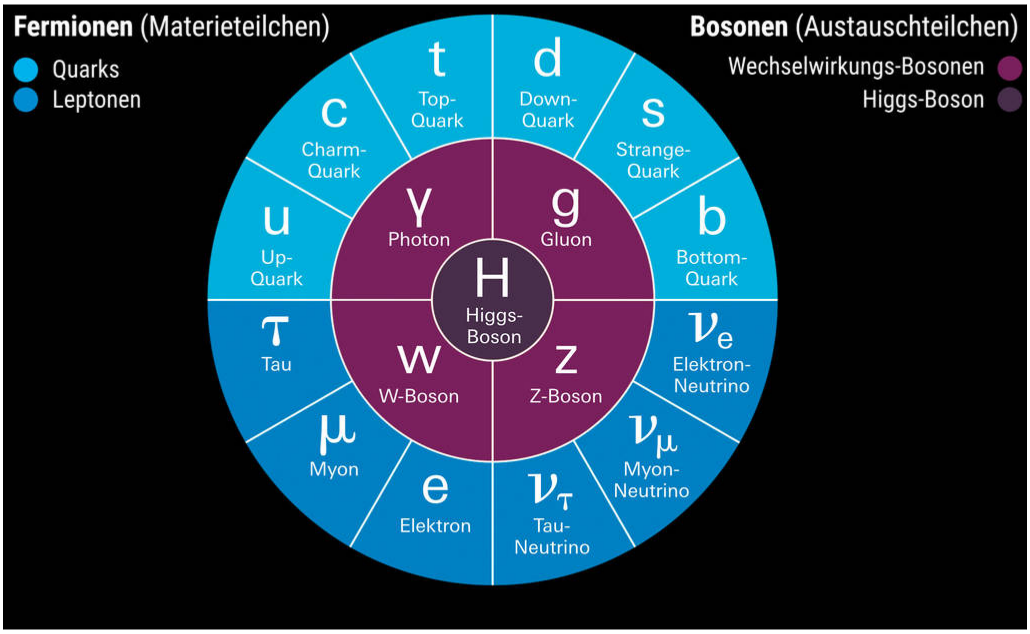
Ở đây, một "*tộc*" các hạt khác xuất hiện: Các hạt "*sứ giả*" hay "*boson*". Từ quan điểm của vật lý hạt cơ bản, chúng làm nhiệm vụ truyền lực giữa các hạt. Khi hai electron gặp nhau, chúng trao đổi một hạt boson rất chóng vánh.

Cho tới nay, các nhà khoa học biết bốn loại lực, mỗi lực được mang bởi một loại hạt sứ giả: Hạt photon mang lực điện từ, hạt graviton (có lẽ) mang lực hấp dẫn. Các hạt gluon thì là "*bố già*" của lực hạt nhân giữa các quark, lực này giữ cho hạt nhân không bị tan rã. Và cuối cùng, boson W và Z là các hạt làm thay đổi "*danh tính*" của hạt nhân, mang lực hạt nhân "*yếu*".

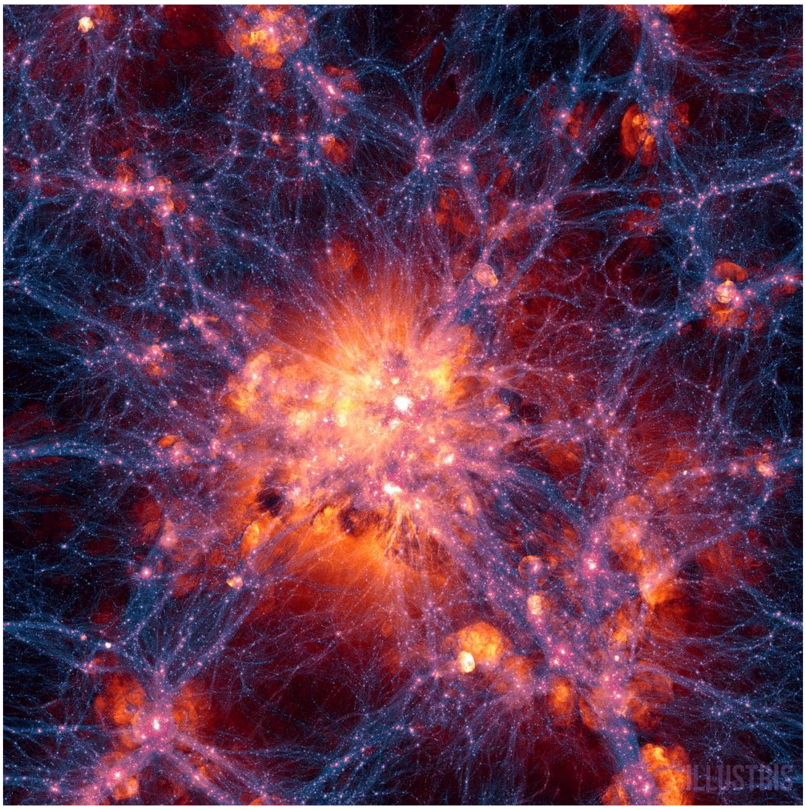
Với những viên gạch là các hạt và các lực này, các nhà vật lý có thể giải thích hầu hết các hiện tượng xảy ra trên Trái đất. Ta có thể tính được tại sao mặt trời chiếu sáng, tại sao một số hạt nhân lại phân rã. Nhưng bản vẽ thiết kế thế giới vi mô của ta có vẻ không hoàn chỉnh: Khi các nhà thiên văn nhìn vào Vũ trụ, vào không gian giữa các thiên hà, họ thấy dấu vết của một thế giới mà hình như được làm bởi những hạt khác, ở đó có thể có các lực khác hoạt động. Các nhà khoa học gọi thế giới này là "*vật chất tối*", nhưng đến giờ vẫn không biết khái niệm này thực chất là gì.

Một số nhà khoa học cho rằng X17 có thể là bước đầu tiên vào thế giới vô hình này. Trên trái đất, hạt sứ giả X17 có thể hoạt động rất bí mật: Nó chỉ xuất hiện xung quanh các hạt nhân và ở một dạng nào đó chúng ta còn chưa hiểu. Nhưng trong vũ trụ bao la, hạt "*ma quái*" này có thể đóng một vai trò lớn hơn nhiều. Có thể hạt này chạy đi chạy lại giữa các hạt của vật chất tối, nếu đúng là nó tồn tại.

Một đặc thù của ngành vật lý là những vấn đề ngoạn mục nhất lại được nghiên cứu ở những chỗ kín đáo nhất. Đi qua cổng vào của Viện Atomki ở Debrecen, bạn cứ ngỡ là đang ở bên trong




Hình 3: "*Mô hình chuẩn*" mô tả tất cả các hạt cơ bản: Các hạt vật chất (fermion), các hạt trao đổi (boson), và thêm hạt Higgs là hạt mang lại khối lượng cho tất cả các hạt khác.



Hình 4: Các thiên hà trong vũ trụ được bao quanh bởi khí (màu da cam) và các sợi vật chất tối (màu xanh), theo các mô phỏng trên siêu máy tính.

một công ty sản xuất ống sưởi hay là súng phun sơn. Một vài toà nhà sơn trắng hình hộp đặt quanh một bãi đậu xe, xung quanh là một vài cây thông to.

Attila Krasznahorkay ra tận cửa đón tôi. Ông người to, dáng đi nặng nề, mặc áo khoác nhung và áo len màu xanh, mặt đỏ lên vì vừa phải vội chạy ra đón khách. Ông dẫn tôi đến thẳng một trong các toà nhà. Chúng tôi đi qua một phân xưởng bụi bặm, có mùi cao su cháy, đến một gian nhà, nơi cuộc tìm kiếm X17 đang diễn ra.

Ở đây ống, mặt bích, bơm chân không bóng nhoáng dưới ánh sáng nhân tạo của đèn halogen. Năm 2015 Viện Atomki khai trương một máy gia tốc mới bằng tiền của Liên minh Châu Âu, Viện Hàn lâm khoa học Hungary và một nhà máy điện nguyên tử trong vùng.

Krasznahorkay đi dọc theo đường ống chân không dài 20 mét, qua các nam châm dùng để giữ các hạt nhân không ra khỏi quỹ đạo, tới góc bên kia của gian nhà. Thiết bị đo của các thợ săn X17 ở đây: Sáu cái "*nan hoa*" dài bằng cánh tay làm bằng nhựa đen, nối không biết bao nhiêu dây điện và bọc bằng băng dính. "*Các đo đạc của chúng tôi bị phê phán nhiều nên chúng tôi quyết định thay mới tất cả các bộ phận của máy*".

Hình 5: Viện nghiên cứu Atomki ở Debrecen, Hungary được thành lập năm 1954. Khoảng 100 nhà nghiên cứu về vật lý nguyên tử và khoa học vật liệu làm việc tại đây.

Ngược lại, quá khứ vẫn được giữ nguyên trong ngôi nhà bên cạnh. Đi đến phòng làm việc của Krasznahorkay, phòng 201 ở tầng 2, ta phải qua một thang máy lắc lư và đi trên sàn lát vải sơn đã úa vàng. Trên tường hành lang có một cái bảng ghim nhiều ảnh cũ. Đây là ảnh chụp chuyến thăm của cựu chủ tịch viện GSI ở Darmstadt, Đức, kia thì là các cảnh từ một hội nghị đã xảy ra từ lâu: Các nhà vật lý nâng cốc trên bàn trải khăn trắng, hoặc đang cưỡi ngựa ở một trang trại.

Và đây, một người đàn ông, đầu hói một nửa, tóc màu sáng, mặc quần trắng, thân thiện nhìn vào ống kính. Ông ở vị trí trung tâm trong nhiều bức ảnh. Krasznahorkay lại gần một ảnh và chỉ vào bản cáo phó ghim cạnh đó. "*Fokke de Boer đã qua đời năm* 2010. *Chúng tôi tiếp tục công việc để tưởng nhớ ông*".

Người đàn ông Hà Lan, người vào năm 2000 đã thuyết phục Krasznahorkay tham gia tìm hạt "*ma quái*", là một nhân vật trung tâm của dự án. Chính vì de Boer, những đo đạc ở Debrecen không phải chỉ để chứng tỏ các nhà vật lý Hungary có kiểm soát được thiết bị của mình hay không. Nó còn để trả lời câu hỏi: Liệu Krasznahorkay và cộng sự đã thoát được khỏi phong cách làm việc đặc thù của người đồng nghiệp từ Amsterdam hay chưa?

Hình 6: Các mẩu báo và ảnh cũ trong bảng ghim trong phòng làm việc của Attila Krasznahorkay

## Hồi 2: Dị thường nhiều, giải thích chẳng bao nhiêu

Fokke de Boer là một trong những người đầu tiên quan tâm đến những hạt mới kiểu như X17. Hơn ai khác, ông tuyên truyền cho các thí nghiệm kiểm chứng, thúc đẩy đồng nghiệp và bênh vực các kết quả thí nghiệm trong hàng chục năm trời. Nhưng với thời gian, ông bị cuộc tìm kiếm cuốn vào đến mức nhìn đâu cũng ra hạt mới – tới lúc không ai tin ông nữa, kể cả Attila Krasznahorkay.

Với de Boer, giấc mơ về một hạt mới bắt đầu từ giữa những năm 1980 với *những kết quả đo đạc từ Darmstadt*. [3] Lúc đó các nhà khoa học bắn các hạt nhân vào nhau bằng một máy gia tốc dài 120 m tên là UNILAC.

Trong mỗi một va chạm, động năng được chuyển hoá thành khối lượng theo công thức nổi tiếng $E = mc^2$ của Einstein. Trong trường hợp cụ thể này, các hạt nhân vỡ ra và tạo ra một đống các hạt khác. Dùng hai bộ phân tích tên là EPOS và ORANGE các nhà khoa học Darmstadt nghiên cứu các đống vụn đó. Và họ thấy một dị thường bí hiểm: Ở một số năng lượng nhất định của máy gia tốc, các va chạm giữa các hạt nhân sinh ra một số lượng hạt positron nhiều một các đáng ngạc nhiên.

Hạt positron, phản hạt mang điện tích dương của electron, không phải là cái gì lạ trong thế giới vi mô. Khi thiên nhiên muốn xả năng lượng thừa, đôi khi nó tạo ra cặp hạt electron-positron. Nhưng một số nhà khoa học cho rằng các kết quả đo cũng có thể giải thích được bằng một hạt cơ bản mới chưa ai chưa biết, hạt này phân rã ra thành một electron và một positron sau khi bay một quãng ngắn.

Phải nói ngay là không rõ có đúng là có một hạt như vậy đằng sau dị thường Darmstadt hay không. Nhưng trong vòng nhiều năm, "*EPOS peaks*" là một đề tài làm các chuyên gia trên thế giới bận rộn. Một số nhà khoa học tin là họ đang trên con đường đến giải Nobel. Ít người nghĩ là tương lai sẽ mang đến một sự thất vọng tràn trề.

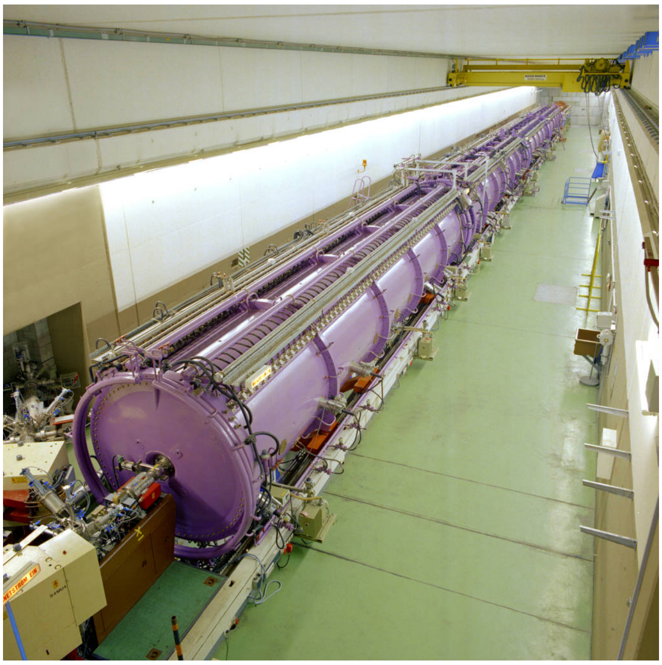
Hình 7: Fokke de Boer, người Hà Lan (thứ ba từ bên phải) mang tới cho Attila Krasznahorkay ý tưởng tìm hạt X bằng một phổ kế chế tạo tại Đức (ở phía sau).

De Boer, tuổi giữa tứ tuần, lúc đó đang tìm kiếm một thành công thu hút sự chú ý. Từng được tung hô như một tài năng xuất chúng ở thành phố Amsterdam nơi ông sinh ra, vào cuối những năm 1980 ông đã trải qua hơn mười năm di chuyển từ viện này sang viện khác, từ hợp đồng ngắn hạn này đến hợp đồng ngắn hạn khác. Ở dị thường positron, ông nhìn thấy khả năng làm nên tên tuổi. Bị cuốn hút, *ông mường tượng ra* [4] là có một hạt gì đó đứng sau dị thường này, và tự tin bày tỏ các suy nghĩ của mình ở các hội thảo khoa học.

"*Fokke luôn có rất nhiều ý tưởng*". Khi được gọi điện hỏi, đồng nghiệp của ông ở Amsterdam, Johan van Klinken, nhớ lại. Van Klinken làm việc với de Boer 35 năm, đồng hành với ông trong tất cả các chặng đường, ủng hộ ông đến phút cuối cùng. Van Klinken nói rằng bạn ông bị một cảm nhận đặc biệt về mỹ học thúc đẩy. Một trong các thần tượng của de Boer là Paul Dirac, nhà vật lý được giải thưởng Nobel người Anh, người đã tiên đoán ra sự tồn tại của hạt positron năm 1928. Dirac cho rằng các công thức đẹp gần với chân lý hơn là các công thức xấu.

De Boer mang triết lý của Dirac sang ngành vật lý hạt nhân, một ngành vốn khá nặng nề. Chỗ mà người khác chỉ nhìn thấy sơ đồ các kênh phân rã của hạt nhân với một mớ bòng bong các đoạn thẳng, số và mũi tên, de Boer lại nhìn thấy vẻ đẹp của Tạo hoá. "*Về mặt này ông giống như một người hoạ sĩ*", van Klinken nói.

Không chỉ những số liệu của Darmstadt đã gây ấn tượng cho de Boer, mà cả những *kết quả mà các nhà vật lý ở Cairo* [5], Ai Cập nhận được trên máy gia tốc ở Dubna (Liên Xô) mà ông được biết từ năm 1984. Ở đây số lượng positron sinh ra trong va chạm hạt nhân cũng sai khác so với chờ đợi. Và de Boer biết phải làm gì để lần theo những dấu vết này.



Hình 8: Từ những năm 1970 máy UNILAC ở Darmstadt gia tốc các hạt nhân trên đường thẳng. Từ lúc đó đến nay các nhà vật lý luôn luôn hiện đại hoá máy này.

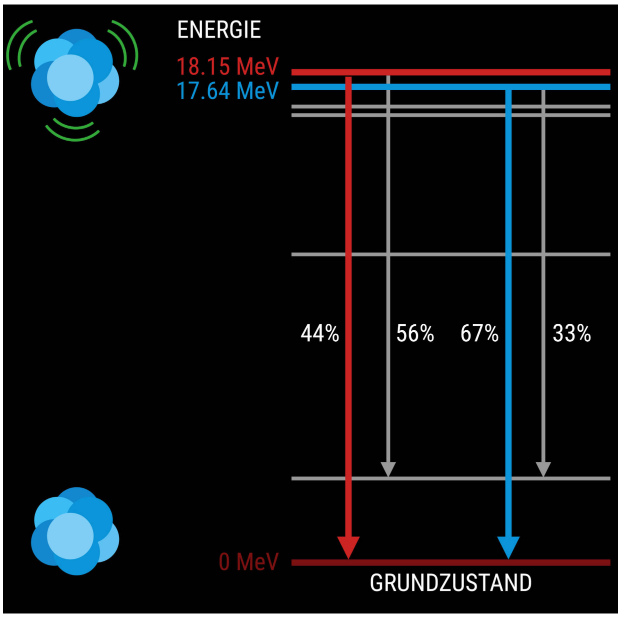
Ý tưởng của de Boer liên quan đến vật lý của hạt nhân nguyên tử. Mỗi hạt nhân có những mức năng lượng khác nhau, như các electron cũng có những quỹ đạo khác nhau trong lớp vỏ của nguyên tử. Nhưng hạt nhân giải quyết năng lượng thừa bằng cách khác: Nó lúc lắc từ bên nọ sang bên kia với một tần số trong một danh sách các tần số dao động khác nhau.

Những tần số đó là gì thì phải những thí nghiệm tinh vi mới tìm ra được. Một cách là dùng những va chạm hạt nhân kiểu như những va chạm trong các máy gia tốc, nhưng "*êm dịu*" hơn. Các nhà vật lý chiếu các hạt proton đã được gia tốc trong điện trường vào các hạt nhân đứng yên. Nếu các hạt proton có động năng đúng ở một giá trị nào đó thì các hạt nhân không phân rã ra mà nó nuốt proton vào, lớn lên một chút và bắt đầu "*uốn éo*".

Khi hạt nhân im ắng trở lại, nó "*khạc nhổ*" ra một chùm tia sáng. Hoặc, trong những trường hợp hiếm hoi, một cặp electron-positron. Nghiên cứu những "*sản phẩm bài tiết*" này, các nhà vật lý có thể tái thiết các mức năng lượng của hạt nhân.

Thực ra đây chỉ là công việc hàng ngày của các nhà vật lý hạt nhân, đã được thực hiện hàng nghìn lần và đã được nghiên cứu đến từng ngóc ngách cuối cùng. Nhưng de Boer và nhiều người khác nhận ra rằng, chỉ thay đổi một chút, công nghệ này có thể dùng để tìm hạt cơ bản mới. Đó là vì một hạt boson mới sẽ cho hạt nhân một cách khác để xả năng lượng thừa.

Hạt mới sẽ không thể là hạt bền, mà sau khi bay một quãng đường ngắn cũng sẽ phân rã thành một cặp electron-positron. Nhưng cặp electron-positron này khác với cặp electron-positron có nguồn gốc từ một lượng tử của bức xạ hoặc do hạt nhân phát xạ ra trực tiếp ở một chi tiết: Chúng phải bay ra khỏi nhau dưới một góc lớn hơn nhiều. Nếu ta theo dõi chính xác đường bay của hạt electron và positron này, ta có thể nhìn thấy dấu vết của hạt boson.




Hình 9: Khi hạt nhân hấp thụ năng lượng, nó rung lên với một tần số nhất định. Sau một khoảng thời gian ngắn nó trả lại năng lượng và với một xác suất nhất định chuyển về một mức năng lượng thấp hơn.

*Còn tiếp ...*

## Tài liệu tham khảo

[1] https://reportage.spektrum.de/x17

[2] https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.116.042501

[3] https://inspirehep.net/literature/198158

[4] https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.61.1274

[5] https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.52.1971

# THỜI GIAN LÀ GÌ?

Nguyễn Lê Anh

Rất nhiều bạn muốn biết "thời gian là gì". Trả lời câu hỏi này rất khó, bởi để làm việc ấy chúng ta phải đi lý giải để chứng minh cho các luận điểm. Muốn chứng minh luận điểm A là đúng thì chúng ta phải suy nó ra từ B đúng và phải khẳng định được quy tắc suy diễn B –> A là đúng. Lập luận logich là một quá trình theo thời gian, tức là không có thời gian thì không có sự giải thích "thời gian là gì!!" Như thế bản thân sự tồn tại của loài vật biết lập luận đã đủ để minh chứng cho sự tồn tại của thời gian.

Trước khi đi tiếp chúng ta cần phải hiểu vậy chúng ta là ai khi đưa ra câu hỏi "thời gian là gì?". Chúng ta nên chấp nhận, ai rồi cũng sẽ có lúc chết và rằng thế giới vẫn cứ như vậy ngay cả khi chúng ta đã chết đi. Điều này hàm ý thế giới là khách quan, không tùy thuộc vào việc có hay không có chúng ta.

Tính khách quan được hiểu là cùng một sự kiện M, thì hai người X và Y đều quan sát thấy.

Vây thời gian là một thứ tồn tại khách quan. Hãy hình dung một vật chuyển động, đó là sự di chuyển trên quỹ đạo theo thời gian. Tất cả đều chuyển động và thời gian là một chiều. Đặc tính một chiều hàm ý: có thời điểm là hiện tại, có khái niệm quá khứ, và có khái niệm tương lai. Một vật được coi là tồn tại nếu nó gồm các thành phần cấu thành và cùng tồn tại trong hiện tại.

Newton là người đã khái quát hóa thành công quan niệm vũ trụ luận cổ điển, theo đó vũ trụ gồm có 3 phần: không gian đồng nhất và đẳng hướng cùng với thời gian, lực tác dụng, và vật chất. Newton đưa ra các công thức cho phép tính được lực tác dụng giữa các vật với nhau, và công thức cho phép tính được sự chuyển động của một vật dưới tác động của lực. Trong quan niệm vũ trụ luận như thế một thay đổi của vật này sẽ ngay lập tức gây ra lực và tác động vào tất cả mọi vật khác trong toàn vũ trụ. Như thế toàn bộ vũ trụ sẽ chỉ cần sử dụng chung một chiếc đồng hồ. Khi cần biết thời gian xảy ra một sự kiện nào đó chúng ta chỉ cần tạo ra một tác động nhỏ, chiếc đồng hồ chung sẽ ngay lập tức nhận thấy tác động này và nó sẽ thông báo chỉ số thời gian tới khắp mọi nơi trong vũ trụ. Như vậy, cho dù trong vũ trụ luận Newton không đưa ra được sự lý giải về thời gian là gì nhưng nếu công nhận có 1 chiếc đồng hồ thì có thể coi như ở tất cả mọi điểm của thế giới đều có thể chỉ ra thời gian.

Thời gian trong vũ trụ luận Newton, tuy không được định nghĩa nhưng, ta có thể làm chủ nó nếu có được một chiếc đồng hồ. Một chiếc đồng hồ như vậy được gọi là đồng hồ Vũ Trụ. Tất cả vũ trụ nhìn vào nó để mà có thời gian. Và câu trả lời thời gian là gì sẽ là "Chỉ số trên chiếc đồng hồ Vũ Trụ". Trong vũ trụ luận Newton, chỉ cần có một chiếc đồng hồ chính xác, thì bằng tính toán chúng ta có thể biết được từng vật sẽ ở chỗ nào và sẽ chuyển động ra sao. Như vậy trong vũ trụ luận Newton không có sự phân biệt hiện tại với tương lai. Chúng ta cũng có thể đi ngược thời gian nếu tất cả vũ trụ chuyển động ngược lại.

Lại nói về bản thân chúng ta, từng thành phần cấu thành ra chúng ta đều chịu sự tương tác với phần vũ trụ còn lại. Nếu sự tương tác là tức thời thì mọi hành vi của chúng ta sẽ chỉ là hệ quả của tác động từ toàn thể vũ trụ. Vậy để chúng ta không còn là "con rối" của vũ trụ thì các tương tác vật chất với nhau không thể tức thời. Sẽ có một vận tốc nào đó là lớn nhất khi vật chất di chuyển. Chúng ta gọi nó là vận tốc của ánh sáng. Nếu đã là ánh sáng thì dù cho có quan sát từ hệ tọa độ nào chúng ta cũng thấy đó là ánh sáng, tức là vận tốc của nó bất biến cho dù chúng ta quan sát nó ở hệ tọa độ nào.

Như vậy trong vũ trụ luận Newton chúng ta cần phải thêm vào một tiên đề và đó là vận tốc ánh sáng là không đổi theo mọi hướng, tại mọi nơi. Nếu chúng ta đặt một chiếc gương trên trần nhà và chiếu một tia sáng lên đó. Tia sáng sẽ phản xạ quay trở lại về đúng điểm nó xuất phát. Vì ánh sáng chuyển động có vận tốc cho nên phải mất một khoảng thời gian nhất định để nó quay trở lại. Mọi việc vẫn như vậy khi con tàu chuyển động (thẳng đều). Đối với người trên ga họ sẽ thấy tia sáng quay trở lại ở vị trí khác với lúc nó phát ra, bởi con tàu đã di chuyển. Như thế tia sáng đã đi được một đoạn đường dài hơn. Vì vận tốc là như nhau mà đoạn đường đi khác nhau nên, tuy rằng cùng một sự kiện phản xạ trở lại ánh sáng phát ra, khoảng thời gian ở dưới ga đã dài ra hơn là khoảng thời gian trên con tàu chuyển động. Vậy là trong cái vũ trụ luận Newton có thêm sự công nhận vận tốc ánh sáng bất biến, thời gian sẽ không đơn giản là chỉ số trên chiếc đồng hồ vũ trụ quy định nữa. Người ta cho rằng chuyển động có gia tốc là tổng của các chuyển động đều nhưng tại mỗi thời điểm thì có vận tốc khác nhau. Nếu như vậy chỉ số trên một chiếc đồng hồ sau khi chuyển động có gia tốc rồi quay trở lại sẽ nhỏ hơn chỉ số của chính cái đồng hồ ấy khi không chuyển động. Hiệu ứng "trẻ ra" này đã được thực tế kiểm tra và hệ thống định vị vệ tinh liên tục phải căn chỉnh theo hiệu ứng này.

Cho dù là phức tạp hơn nhưng vũ trụ luận Newton với sự công nhận vận tốc ánh sáng là bất biến vẫn là một mô hình cho phép dự đoán được chính xác tương lai vũ trụ khi có được một chiếc đồng hồ chính xác. Điều này hàm ý chúng ta chỉ cần ở một điểm trong vũ trụ và với khả năng tính toán siêu nhanh sẽ biết được các sự kiện xảy ra trong vũ trụ thế nào. Cái không gian 3 chiều và 1 chiều thời gian, với các quy luật vật lý tuân thủ của vũ trụ luận Newton với sự bất biến của vận tốc ánh sáng được goi là mô hình vũ trụ luận tương đối tính.

Cũng như mô hình vũ trụ luận Newton, mô hình mô hình vũ trụ luận tương đối tính cũng không đi lý giải thời gian là gì mà chỉ là chỉ ra khả năng cung cấp chỉ số thời gian cho mọi sự kiện trong vũ trụ – nếu như có được một chiếc đồng hồ chính xác.

Chiếc đồng hồ vũ trụ ở đâu? Muốn có một chiếc đồng hồ chúng ta cần phải có một chuyển động đều. Vũ trụ luận Newton cho rằng khi không có lực tác dụng thì vật giữ nguyên trạng thái đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều. Tuy nhiên chắc chắn không thể có một vật nào không chịu tác dụng của những vật khác như vậy không thể có một chuyển động đều thực sự.

Một khi đã không thể chỉ ra được chuyển động đều thì chúng ta nên chọn lấy một chuyển động để làm đồng hồ – với điều kiện, chuyển động này phải không chịu tác động nào theo ý của chúng ta. Một chiếc đồng hồ như vậy được gọi là đồng hồ địa phương, nó luôn có. Chiếc đồng hồ địa phương không chính xác và chỉ có thể dùng để tham số hóa thời gian cho các sự kiện mà khoảng thời gian xảy ra rất nhỏ. Vậy ý tưởng sử dụng đồng hồ địa phương đưa đến nhu cầu phải liên kết chúng với nhau và dựa trên hiệu ứng tổng thể của tất cả chúng mà đưa ra hiệu chỉnh.

Hầu như tất cả các loài sinh vật sống trên trái đất đều sử dụng chuyển động của mặt trời làm chiếc đồng hồ đo thời gian. Để thuận tiện người ta sử dụng đồng hồ quả lắc đếm các dao động lặp lại với các điều kiện lắc như nhau để đo thời gian. Do không thể loại bỏ hoàn toàn lực ma sát, độ dãn nở nhiệt... và theo thời gian các khớp bánh răng bị nhão và thời gian dựa trên nguyên lý quả lắc không còn chính xác nữa. Ngày nay người ta sử dụng đồng hồ dựa trên đếm xung nhịp dao động của miếng thạch anh khi có điện trường. Xét về bản chất nó cũng là con lắc thường. Độ chính xác của chiếc đồng hồ kiểu này cao nhưng cũng không thể đạt được độ chính xác tuyệt đối do miếng thách anh chịu các tác động của môi trường xung quanh. Người ta còn dùng đồng hồ đồng vị phóng xạ để đo thời gian, theo nguyên lý cường độ giảm dần tỷ lệ lý thừa theo thời gian. Lẽ dĩ nhiên nó không thể chính xác và trong khuôn khổ vũ trụ luận Newton thì không thể có cái gì là ngẫu nhiên và vì thế mà cũng không có khái niệm phóng xạ để mà nói tới chiếc đồng hồ dựa trên nguyên lý phóng xạ.

Nếu như có một vận tốc lớn nhất thì có nghĩa rằng tác động từ điểm X này sang điểm Y kia phải mất một khoảng thời gian. Nếu X và Y cùng quan sát sự kiện M thì thông tin mà X và Y thông báo cho nhau đều bị là quá khứ. Sự tồn tại của một vật thể là gồm các cấu thành cùng tồn tại trong hiện tại và cùng vận động. Vì các thành phần cấu thành của một vật là cùng tồn tại trong hiện tại, vậy chúng không có cách nào "thông báo" cho nhau về sự tồn tại của mình, kể cả lực hút. Chúng ở cạnh nhau là vì quỹ đạo chuyển động của chúng gần nhau. Như thế một vật chỉ có thể biết đến sự tương tác của khoảng không gian gần quanh nó và không có bất kể khả năng biết đến những gì khác. Điều này có vẻ giống như khi đi tắm biển chúng ta bị một con sóng lao tới đập cho sặc sụa mà không thể biết nó là đó từ đâu sinh ra. Ý tưởng này được gọi là lý thuyết trường.

Einstein đã hình dung vũ trụ như một khối dẻo bằng cao su, nó có thể nghiêng, bị xoắn, bị ép vào, hay bị kéo dãn ra. Theo như mô hình này thì trong khoảng vô cùng bé vũ trụ có đặc tính giống như vũ trụ tương đối tính. Đó là một khoảng trong không gian 3 chiều với 1 chiều thời gian, tuy nhiên không gian không nhất thiết là đồng nhất và đẳng hướng. Vận tốc ánh sáng là bất biến nhưng theo các hướng khác nhau có thể khác nhau, phụ thuộc vào mật độ cũng như dòng chảy của vật chất vào và ra khỏi điểm ấy.

Einstein đã thiết lập quy luật biến dạng đàn hồi cho cục cao su vũ trụ ấy, với nguyên tắc tôn trọng sự bảo toàn vật chất và theo mọi hướng mật độ vật chất luôn cân bằng với sự cong vênh của không gian. Mật độ vật chất càng lớn thì không gian càng cong, không gian càng cong càng khiến cho vật chuyển động và như vậy mật độ vật chất thay đổi. Mật độ vật chất thay đổi dẫn đến độ cong của không gian thay đổi theo. Hệ số chuyển đổi giữa độ cong của không gian với mật độ vật chất được xác định để phù hợp với hằng số hấp dẫn trong định luật vạn vật hấp dẫn của Newton.

Khác với mô hình vũ trụ luận tương đối tính, Einstein không đi mô tả toàn bộ vũ trụ mà chỉ tập trung vào việc tìm ra quy luật vận động cho một mẩu vũ trụ. Chiếc đồng hồ "số hóa" thời gian tại từng điểm trong vũ trụ được lấy dựa theo nguyên lý chuyển động tự do của một chất điểm. Toàn thể vũ trụ được số hóa thành một đa tạp 4 chiều, và đa tạp ấy phải thỏa mãn phương trình vũ trụ của Einstein. Vậy là câu trả lời cho câu hỏi thời gian là gì được chuyển thành một phức hợp gồm 2 phần. Phần thứ nhất là thời gian địa phương, phần thứ hai là hiệu chỉnh đồng bộ cho tất cả các đồng hồ. Thời gian địa phương được số hóa theo một chuyển động "tự do (không có sự can thiệp của con người)" bất kỳ. Vì chỉ dùng với sự kiện vô cùng bé, nên các chuyển động tự do này không khác nhau. Sự liên kết và hiệu chỉnh thời gian địa phương được thực hiện thông qua nguyên lý liên kết tương tác của tất cả chúng với nhau theo phương trình Einstein. Như chúng ta đã nói phương trình Einstien liên kết độ cong với mật độ vật chất trong vũ trụ. Chúng ta luôn có xu thế cho rằng nếu như không thể chỉ ra sự khác biệt về mật độ vật chất thì mật độ vật chất là như nhau tại mọi điểm. Nếu như vậy không gian sẽ cong như nhau tại mọi điểm. Một không gian như thế là một mặt cầu. Mặt cầu này nở ra theo thời gian. Như thế bán kính của mặt cầu là số đo thòi gian của vũ trụ, và vũ trụ của chúng ta có chung một chiếc đồng hồ.

Dựa vào hệ số dẫn nở vũ trụ Hubble và phương trình Einstein người ta tính ra tuổi vũ trụ là 13.7 tỷ năm. Có nhiều vật chất sinh ra từ đầu vụ nổ vẫn tồn tại đến ngày nay dưới dạng các thiên thạch. Tuổi của nó đặc trung bởi tỷ lệ của các nguyên tố khác nhau. Tuổi của tất cả các thiên thạch không thể già quá 13.7 tỷ năm, tức tuổi vũ trụ.

Như vậy thời gian đồng nhất với sự dãn ra của vũ trụ. Ánh sáng từ vụ nổ big bang vẫn còn đang lang thang trong vũ trụ. Ánh sáng là dao động theo thời gian. Nó gồm nhiều chu kỳ. Một chu kỳ bắt đầu dao động ở thời điểm $t$, thì kết thúc ở thời điểm $t + \triangle t$. Như vậy bắt đầu một chu kỳ ở hiện tại thì kết thúc dao là ở trong tương lai. Đó là hai vũ trụ có bán kính khác hẳn nhau. Do bán kính vũ trụ cứ tăng thêm và tăng nhanh dần, cho nên khoảng cách giữa hai mặt cầu vũ trụ ấy xa ra hơn. Chu kỳ ánh sáng dài ra. Người ta nói nó bị dịch sang mầu đỏ. Vậy độ dài bước sóng ánh sáng của vụ nổ big bang chính là chiếc đồng hồ Vũ Trụ đo khoảng thời gian kể từ thời điểm sinh ra vũ trụ.

Chúng ta đang đi tới những dòng cuối tút về thời gian. Cả vũ trụ có chung một chiếc đồng hồ và đó là chu kỳ sóng ánh sáng từ vụ nổ bigbang.

# ĐI TÌM NGUỒN GỐC DÂN TỘC VIỆT NAM

Nguyễn Lê Anh

## GIỚI THIỆU

Liên tục trong 6 số Epsilon gần đây, chúng tôi luôn có chuyên mục phám phá lịch sử thông qua tư duy lô-gích và phương pháp suy luận khoa học. Chúng tôi muốn giới thiệu với độc giả chúng ta có thể làm được những gì với tư duy toán học, thông qua những nghiên cứu miệt mài của nhà toán học Nguyễn Lê Anh. Trong số này, chúng tôi tiếp tục đăng những ghi ghép của ông, những nổ lực không ngừng nghỉ cùng với những khám phá mới. Đây cũng là lời kêu gọi cộng đồng trong việc cùng chung tay xây dựng một tài liệu lịch sử cho dân tộc chúng ta - dân tộc Việt Nam.

*Chiếc cầu nối với quá khứ.*

*Dân tộc được xác định qua văn hóa. Thật là may mắn chúng ta là dân tộc có văn hóa kế thừa từ nhiều chục nghìn năm.*

*Lịch sử dân tộc chỉ là một góc nhìn vào sự phát triển của dân tộc ấy. Bản thân đối tượng dân tộc liên tục phát triển và tuân thủ theo các quy luật khách quan như quy luật về kinh tế chính trị học, về địa chất, về khí hậu, về văn hóa, về chủng tộc học, về ngôn ngữ học, về khảo cổ học,...*

*Chúng ta phân biệt ra người chép sử, nhà sử học, và nhại sử. Nhà sử học phải có được mô hình phát triển dân tộc dựa trên các quy luật khách quan nói trên và phải kiểm chứng đúng được các sự kiện cổ sử. Chính vì vậy làm được một tài liệu lịch sử dân tộc không hề đơn giản.*

*Tôi hình dung đây là công việc của nhiều người và nhiều thế hệ. Tôi chỉ là người khơi mào mà thôi.*

*Làm việc vất vả lắm. Nguyên đi truy tìm tài liệu gốc tiếng Hán cũng rất vất vả. Chưa kể là phải truy tìm các nghiên cứu về địa hình, về khảo cổ.*

*Vị trí chính xác của sông là điểm quyết định dõi tìm các tiến trình lịch sử như sông Đáy, sông Bạch Đằng, Sông Hồng.... Cả sông Thiên Phù đã cạn.*

*Nguyên xác định vị trí của sông Hồng vào đầu Công Nguyên cũng tốn hàng trăm nghìn đô. May mà bên địa chất đã làm với vốn của Bắc Âu.*

*Trống Đồng nữa, phân tích ngôn ngữ nữa, thử Gen nữa. Đọc lại sử của tất cả các lân bang...*

*Nhiều việc, nhiều người.*

# Cùng nhau viết ra một cuốn sách về lịch sử dân tộc

Dân tộc chúng ta.

Khi ở nhà tang lễ quản Ba tôi, mỗi lần ngước nhìn lên cao thấy ảnh ba là tôi không tin. Nhưng rồi không phải chỉ có Ba tôi mà Mẹ tôi cũng đã ra đi.

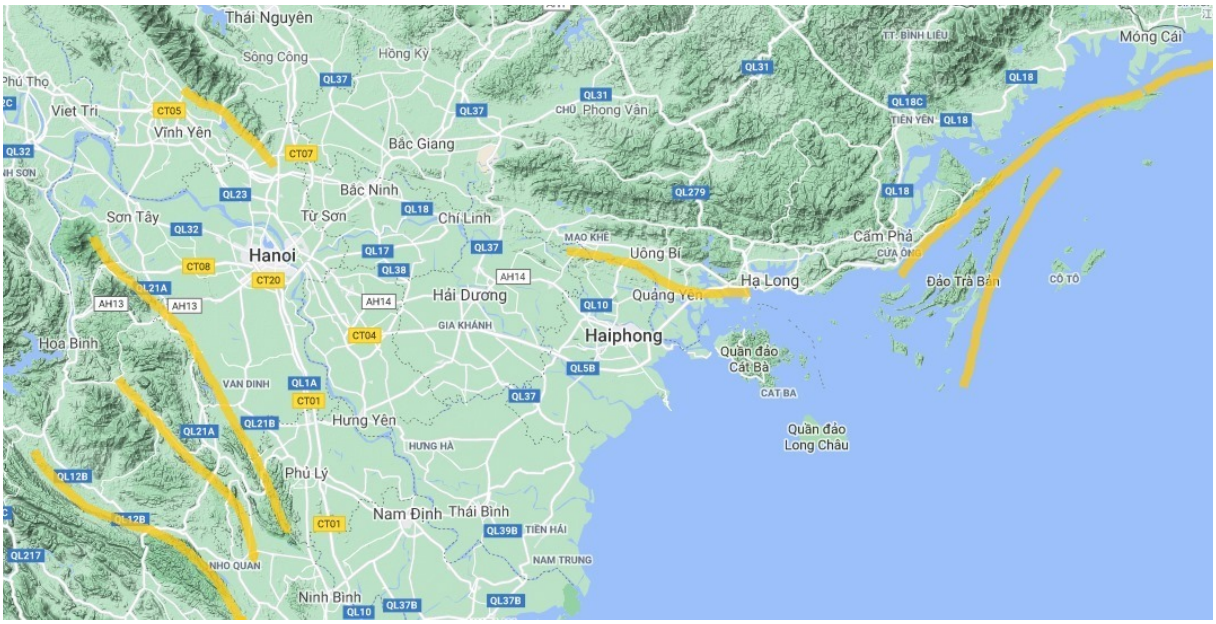
Chăm ba mẹ những ngày cuối cùng tôi chợt nhận ra sự bất lực trước cái chết. Mặc dù cả ba và mẹ tôi rất cố gắng, nhưng không sao thoát ra được. Vậy là bằng cái chết ba mẹ đã dạy cho tôi hiểu, không thể chống lại cái chết mà chỉ có thể làm hết tất cả mọi việc cần phải làm trước khi cái điều không thể ngăn cản nó đến.

Điều lớn nhất mà tôi đã làm được là không để những điều ngang trái có trong hiện tại làm mất thời gian.

Thế rồi dần dần mọi thứ cứ rõ ra.

20 nghìn năm về trước mực nước biển thấp hơn hiện nay 120m. Toàn bộ vịnh Hạ Long khi ấy là rừng rậm. Khi ấy cửa "Ba Lạt" nơi sông Hồng chảy ra biển ở gần quần đảo Hoàng Sa của Việt Nam. Ở nơi ấy có cả muối, có cả nước ngọt, có các loại thủy hải sản, và có các loại cây họ sung vả cung cấp tinh bột và đường. Đây là nơi có khí hậu biển và có gió mùa, cả đông nam và đông bắc. Đây chính là vườn Địa Đàng. Người tiền sử là tổ tiên trực tiếp của chúng ta sinh sống ở đấy.

14 nghìn năm tiếp theo nước biển dâng cao dần. Người tiền sử di cư về phía Bắc dãy Đông Triều qua vịnh Khâm Châu lên phía Vân Nam là Bách Việt. Phần sống ở ven biển Quảng Ninh và về phía Nam dãy Đông Triều là tổ tiên trực tiếp của chúng ta ngày nay. Trải qua hơn 2000 năm, người Bách Việt ở vùng Quảng Đông và Quảng Tây bị Hán hóa. Một phần di sản văn hóa phi vật thể như Âu Cơ và Lạc Long Quân... đã được Nhà Trần du nhập và cố gắng vật thể hóa chúng ở Việt Nam.



6 nghìn năm về trước biển lấn vào tận Hòa Bình. Vùng Hòa Bình và Ninh Bình có cấu trúc như vịnh Hạ Long, phần bên ngoài có núi che chở, phần bên trong là các con sông biển. Xưa sông Bôi, sông Bưởi là các lạch biển. Chúng ta nên gọi chung dạng văn hóa bao gồm: văn hóa Hạ Long, văn hóa Tràng An, văn hóa Bôi và Bưởi là Soi Nhụ.

Phần văn hóa Soi Nhụ ở dải đất ven biển Quảng Ninh là nơi giao thoa văn hóa với Bách Việt. Phần văn hóa Soi Nhụ ở dải đất Bôi Bưởi là nơi giao thoa với nền văn hóa đã mất.

Nền văn hóa đã mất ấy xuất hiện ở vùng từ Mianmar và Bắc Lào. Khoảng 80 nghìn năm về trước, nhánh người tinh khôn Homo Sapiens đã rời khỏi châu Phi di cư tới vùng Trung Á. Họ là tổ tiên trực tiếp của loài người hiện nay. Tuy nhiên có nhánh người Heiligenberg cũng đã rời khỏi châu phi từ 60 nghìn năm trước đó, tức 140 nghìn năm về trước đây. Người Homo Sapiens liên tục di cư, bản chất không chỉ là tìm nơi có điều kiện sống tốt hơn mà còn là để chạy khỏi dịch bệnh. Dịch bệnh mới là yếu tố chính tạo ra sự di cư. Dịch bệnh thì xuất hiện khi mật độ người quá cao, và vì thế mà tốc độ di cư là không đổi, vào khaongr 300km cho 1000 năm. Người Homo Sapiens di cư theo hai hướng, hướng lên phía Bắc và hướng về vùng Taxila ở phía bắc Pakistant. Taxila là vùng có mỏ muối và là điểm bắt đầu của con đường lên cao nguyên Thanh Tạng. Từ Taxila, dọc theo chân cao nguyên Thanh Tạng, loài người tiếp tục di cư về phía Đông. Đó là nhánh Nam Á. Đây là phần đồng bằng Ấn Độ rộng lớn, nơi có nhiều mỏ muối và có nhiều sông nhỏ chảy từ cao nguyên Thanh Tạng xuống. Khoảng 50 nghìn năm về trước người Nam Á tới được vùng Munda. Đây là nơi tiếp giáp giữa Ấn Độ và Mianmar. Ngôn ngữ tiếng Việt của chúng ta bắt nguồn từ Môn là từ đây. Từ Munda người Nam Á chia thành 3 nhánh. Nhánh đi lên cao nguyên Vân Nam sau này thành một bộ phận của Bách Việt. Nhánh đi xuống phía Nam mà sau này hình thành nên Khmer. Và nhánh ra biển Đông, họ là tổ tiên của chúng ta.

Khảo cổ học cho thấy người tiền sử đã tới và sinh sống ở vùng đồi núi Bắc Bộ từ 30 nghìn năm về trước. Khi nước biển xuống thấp, biển Đông hẹp hơn ngày nay rất nhiều. Tổ tiên của chúng ta sống từ cửa sông Hồng, khi ấy chảy ra tới gần quần đảo Hoàng Sa của Việt nam tới cửa sông Cửu Long. Sông Cửu Long xưa chảy về phía quần đảo Trường Sa của Việt Nam. Các nhà khảo cổ học đã không phát hiện thấy dấu vết của người tiền sử trong khoảng thời gian từ 6000 năm về trước cho tới 35000 năm về trước ở vùng bao quanh Việt Nam, bao gồm Lào và Vân Nam. Khoảng 7000 năm về trước công nghệ đúc đồng xuất hiện ở vùng Letpadaung cách không xa vùng Munda. Đây là mỏ đồng lộ thiên lớn nổi tiếng ở thị trấn Salingyi gần thành phố Monywa vùng Sagaing, Myanmar. Tức là từ 7000 năm về trước hẳn phải có một nền văn minh rất lớn ở khu vực. Sự kiện rõ dần ra khi giới khoa học tiến hành cắt lớp các nhũ đá ở các hoang động trong khu vực này. Dựa trên độ dày các lớp đá người ta phát hiện ra khoảng thời gian từ 6000 năm cho tới 4000 năm về trước nơi đây là hoang mạc khô cằn không thể có người sống. Sự kiện này phù hơp với hệ lụy với sự biến đổi khí hậu toàn cầu. Số là Ấn Độ dương được mặt trời đốt nóng, khiến cho lớp không khí sát mặt biển bốc lên cao. Dòng khí từ Nam Cực chảy về chiếm chỗ. Do có sự tác động của lực Coriolis mà dòng khí Nam Cực bị bẻ cong. Hiện nay dòng khí này thổi từ Nam Cực tới đảo Mandagaska rồi tới Srilanca và thổi qua Lào lên tới Vân Nam. 4000 năm về trước dòng khí thổi về phía trung tâm của Châu Phi. Khi ấy sa mạc Shahara là rừng rậm nhiệt đới. Không còn dòng khí Tây Nam thổi từ Ấn Độ dương vào mà Lào và Vân Nam là hoang mạc. Như thế Shahara mà là rừng rậm thì Lào và Vân Nam là hoang mạc và ngược lại. Việt Nam chúng ta vẫn là nơi có khí hậu biển. Như thế nền văn minh Letpadaung đã bị sa mạc hóa. Nền văn minh này cùng công nghệ đúc Đồng đã di cư về phía đồng bằng Bắc Bộ nơi có khí hậu biển. Đó có lẽ là nguyên nhân vì sao hạ nguồn sông Mã là nơi vớt được rất nhiều đồ đồng tiền sử. Đó là nguyên nhân vì sao Trống Đồng Ngọc Lũ được chính những người tiền sử là tổ tiên của chúng ta làm ra vào đầu Công Nguyên. Vào khoảng thời gian từ 3000 năm trước đây đồng bằng Bắc Bộ đã là nơi văn minh và có công nghệ đồ đồng phát triển nhất khu vực.

Thời gian không ai có nhiều. Tôi không nghĩ là tôi sẽ kịp viết ra cuốn sách về lịch sử dân tộc để các bạn đọc. Nó quá lớn và có quá nhiều việc phải làm. Chính vì thế mà tôi đề nghị các bạn, thay vì các bạn chờ để được đọc một cuốn sách về lịch sử dân tộc, thì chúng ta cùng nhau viết ra nó. Chúng ta sẽ cùng nhau lật giở từng trang sử. Nhiều nghìn năm về sau chả ai còn biết đến cái ông ABC nào là tác giả của DEF. Danh hão chả là thứ quan trọng, quan trọng là chúng ta và các thế hệ sau nhìn ra được sự thật.

## "Dân tộc được xác định bởi văn hóa"

Tôi muốn đi tìm nguồn gốc dân tộc Việt Nam.

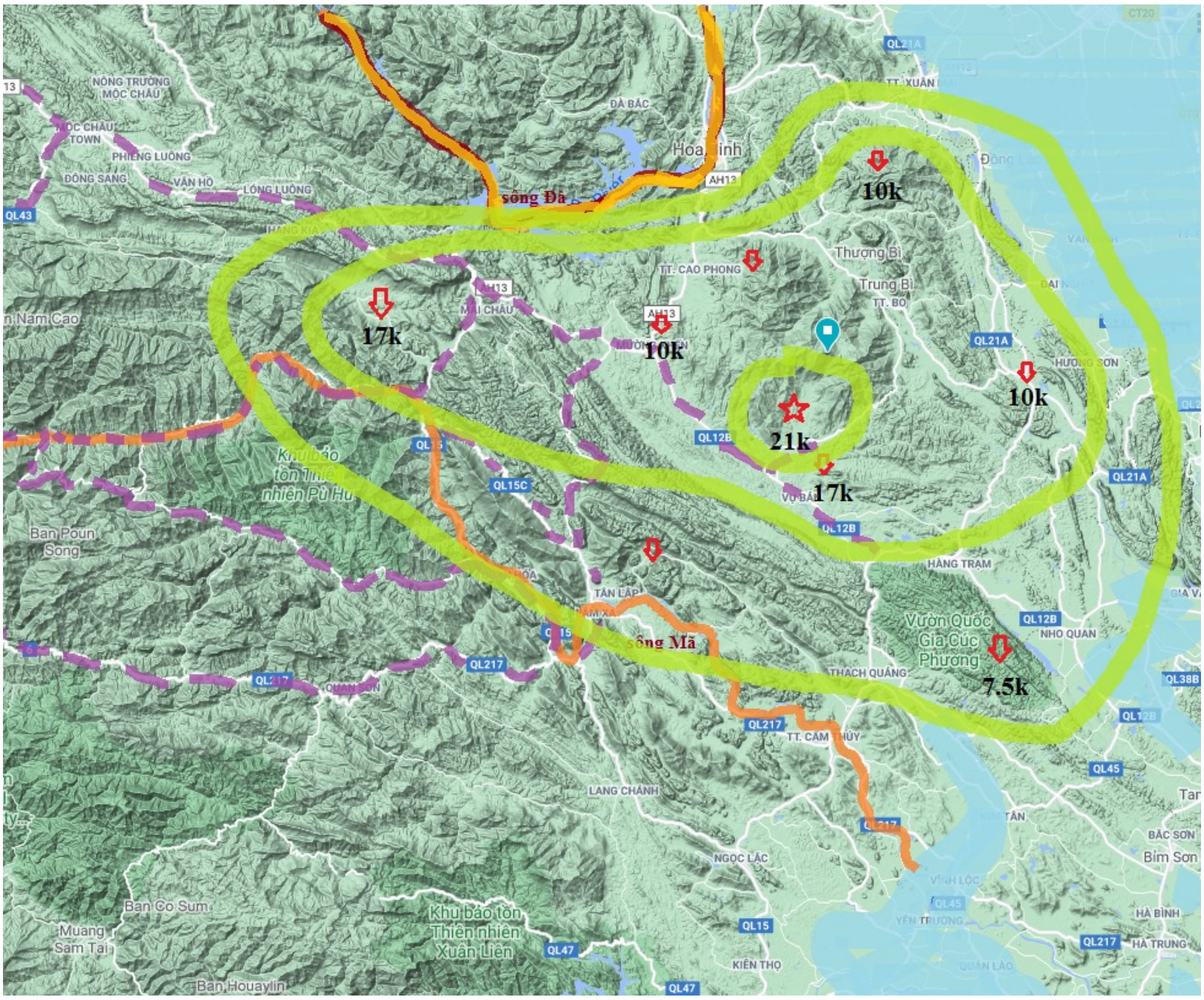
Tôi muốn nêu luận điểm "dân tộc là được xác định bởi văn hóa". Văn hóa phụ thuộc theo số đông. Số đông chỉ xuất hiện ở vùng có điều kiện sống rất thuận lợi. Một trong những vùng đó là vùng nước lợ cửa sông Hồng. 20 nghìn năm về trước mực nước biển hạ thấp hơn ngày nay 120m. Người tiền sử sống ở ven biển vùng đồng bằng Hạ Long. 14 nghìn năm tiếp theo nước biển dâng cao khiến cho người tiền sử di cư lên chỗ cao hơn. 6000 năm về trước mực nước biển giữ nguyên, đồng bằng Bắc Bộ là vịnh biển nông. Cư dân Hạ Long di cư về phía bắc vòng cung Đông Triều là các dân tộc Bách Việt. Cư dân Hạ Long di cư về vùng đồng bằng sông Hồng là tổ tiên trực tiếp của chúng ta. Trong suốt 6000 năm qua phù sa của các con sông đã bồi vịnh biển nông, vùi đồng bằng cũ dưới lớp đất vài chục mét. Cư dân di ra vùng đất mới là người Kinh, cư dân ở lại là các vùng ven núi là người Mường. Theo thời gian có nhiều dòng người di cư vào vùng đồng bằng Bắc Bộ, nhưng họ là các dòng người di cư nhỏ lẻ, có cùng hệ gen và bị đồng hóa văn hóa. Chính vì thế mà chúng là một dân tộc thống nhất thừa hưởng văn hóa từ 20 nghìn năm.

Tôi còn cần phải trả lời được cư dân Hạ Long đến từ đâu.

Tôi cho rằng đã có một đợt di cư từ Trung Đông dọc theo chân cao nguyên Thanh Tạng tới vùng Bắc Việt Nam. Khảo cổ cho thấy khoảng 50 nghìn năm về trước dòng di cư này đã tới được vùng Munda ngã ba Ấn Độ, Mianmar, Butan. Đường đi trong vùng núi đá là đi giữa các dãy núi và như thế mà không thể thay đổi. Ngày nay chúng là các đại lộ chính và thường là chạy dọc theo các con sông. Có 3 dòng di cư chính. Dòng thứ nhất đi cư lên vùng núi Vân Nam, dòng thứ hai di cư xuống phía Nam về phía Mianmar, Thái Lan và Campuchia, dòng thứ ba di cư về phía đông tới Việt Nam. Tất cả các con đường di cư từ Munda về phía Đông đều dẫn tới Hòa Bình.

Chúng ta tính được độ dài tất cả các con đường mà người tiền sử đã di cư tới được Hòa Bình đều không quá 3 nghìn km, tức là mất khoảng 10 nghìn năm để di cư tự nhiên. Như thế về mặt nguyên tắc 40 nghìn năm về trước người tiền sử có thể đã tới được vùng Hòa Bình.

Các di chỉ khảo cổ cũng cho thấy khoảng từ 40 nghìn cho tới 30 nghìn năm người tiền sử đã xuất hiện ở vùng Hòa Bình.




20 nghìn năm về trước cửa Ba Lạt của sông Hồng ở gần quần đảo Hoàng Sa của Việt Nam, cách đồi Thung vùng Hòa Bình khoảng 450km. Với tốc độ di cư tự nhiên 300km cho 1000 năm thì người tiền sử đã tới vùng Hòa Bình khoảng 21 nghìn năm về trước. Điều này tương đối phù hợp với các chứng cứ khảo cổ.

Để thấy được điều này chúng ta vẽ biểu đồ đồng mức các di chỉ khảo cổ theo thời gian để xác định vị trí dòng người tiền sử đã tới được Hòa Bình và nhận thấy rất có thể núi Cốt Ca là tổ tiên của người Việt.

Như vậy khoảng 21 nghìn năm về trước người tiền sử là tổ tiên trực tiếp của chúng ta đã đến vùng núi Hòa Bình, sau đó theo sông Mã, sông Bôi, sông Bưởi, sông Hồng... ra tới tận biển Đông

Đóng góp quan trọng nhất trong sự hiểu biết này là thuộc về anh Việt Nguyễn chủ nhân viện bảo tàng Tiền Sử. Anh là người đã tìm thấy và xác định được tuổi của xương người tiền sử trong di chỉ Xóm Trại. Bộ xương được nhũ đá phủ lên nên đã được bảo vệ tốt. Nó đã được xác định chính xác tuổi 17 nghìn năm về trước. Tầng văn hóa ở dưới khá dày, tương ứng tới 21 nghìn năm.

Anh Việt[1] còn cho rằng chính đỉnh núi Cốt Ca là nơi liên quan tới Mo Để Đất Đẻ Nước. Vậy là chúng ta đã truy tìm được nguồn gốc tổ tiên. Tuy nhiên không thể tuyệt đối hoá.

[1]TS. Nguyễn Văn Việt, giám đốc Trung tâm Tiền sử Đông Nam Á, chú thích của Epsilon

Dòng người di cư tới khu vực Hoà Bình 21 nghìn năm về trước hẳn không phải dân tộc Mường. Dân tộc Kinh cũng không phải là một nhánh của dân tộc Mường. Người tiền sử Hạ Long di cư khi nước biển dâng thì cũng là một cuộc rút lui dần lên chỗ cao. Quá trình này diễn ra trong suốt 14 nghìn năm. Khi mực nước biển giữ nguyên như vậy từ 6000 năm về trước, cư dân Hạ Long sinh sống ở vùng núi tạo ra biến thể văn hoá. Họ là dân tộc Mường. Cư dân sống ở vùng đất mới do phù sa sông Hồng bồi là thuộc dân tộc Kinh. Ngay cả khi nước dâng cao, vùng đất Hải Dương vẫn là một cái gò cao. Ngôn ngữ của dân tộc Mường và Kinh rất gần nhau, bởi chúng có chung nguồn gốc từ Munda và mới chỉ phân tách có 6 nghìn năm. Hai ngôn ngữ này xa hơn với Khmer, và các dân tộc ở vùng Vân Nam bởi sự phân tách đã diễn ra từ 50 nghìn năm về trước ở vùng Munda.

Văn hoá là sự tương tác của số đông và mang tính giao thoa đồng hoá. Theo dõi Mo Mường chúng ta nhận thấy nó được sinh ra vào thời chuyển giao từ Mẫu hệ sang Phụ hệ. Dấu vết Mẫu hệ vẫn còn ở dân tộc Việt và Mường vào thời Bà Trưng. Vậy Mo Mường có lẽ đã xuất hiện không sớm hơn 2000 trước đây. Toàn bộ Mo là thể hiện sự lý giải nguyên nhân. Đây là nhánh văn hoá thiên về phương Tây. Rất có thể nó là kết quả của giao thoa văn hoá phức tạp. Các sự kiện trong Mo Mường liên quan tới săn bắn hái lượm ở khu vực rừng cây lớn và sông suối. Rất có thể Mo Mường liên quan tới khu vực Hoà Bình.

Văn hoá gốc của cư dân Hạ Long là thể dạng văn hoá biển có núi đảo chắn sóng. Nó được tạm gọi là văn hoá Soi Nhụ.

Do môi trường sinh sống thay đổi mà dân tộc Kinh và Mường cũng không phải là các dân tộc lưu giữ được nhiều nét của văn hoá Hạ Long.

Tóm tắt Mo Mường "Đẻ đất đẻ nước":

1- Mở đầu: Giới thiệu cảnh vũ trụ hỗn mang, mờ mịt.

2- Một trận lụt to xảy ra. Nước rút. Ông Thu Tha, bà Thu Thiên tạo ra cỏ cây muôn vật. Đó là Đẻ đất.

3- Sau trận lụt, trời lại hạn. Ông Pôồng Pêu phải cầu mưa. Đó là Đẻ nước.

4- Mưa xuống, trong vũ trụ mọc ra một cây si um tùm. Những con sâu hốc sâu hà đục cây làm cho cây bị ngã.

5- Cây si, mỗi cành rơi xuống tạo ra một mường. Có 1919 cành thành ra 1919 mường. Như vậy là Đẻ Mường.

6- Cũng từ cây si sinh ra mụ Dạ Dần. Mụ sinh ra hai con là Cun Bướm Bạc và Cun Bướm Bờ, kết duyên với hai nàng tiên, sinh ra mười con. Con út là trống chim Tùng mái chim Tót đẻ ra trứng Chiếng. Nhờ chim Tào Trào ấp, trứng nở thành người trong đó có mấy anh em Dịt Dàng, Tà Cái, Cun Cần, Vạ Hai Kíp... và cả chu chương mường nước. Vậy là Đẻ Người.

7- Ông Cuông Minh Vàng Rậm cùng nàng Ả Sấm Trời đúc ra 9 mặt trời và 12 mặt trăng. Nhiều mặt trời nóng quá muôn vật không chịu được. Họ nhà Ngao dùng tên bắn rụng cả. Phải nhờ Trống gà Ải mái vịt Êm đi gọi mặt trời cho mặt trăng lên. Ông Thu Tha bà Thu Thiên mới truyền làm ra năm tháng.

8- Mường Nước mời Dịt Dàng ra cầm đầu cai quản dân chúng. Dịt Dàng nhận lời, nhưng bị ma ếm đón nó chặn ngõ không ra được.

9- Mường Nước lại mời em Dịt Dàng là Lang Tà Cái ra. Tà Cái cũng thất bại.

10- Người em thứ ba là Lang Cun Cần được mời và được yên ổn cầm đầu bản mường.

11- Đã có người cầm đầu thì phải có nhà cho ông ta ở. Chì Bù Dút đi săn, bắt được con rùa. Rùa bày cách cho mường làm nhà.

12- Đã có nhà, phải có lửa để nấu ăn. Viếng Ku Linh được cử lên xứ sở của Thần Lửa và Tà Cắm Cọt. Nhưng thần cho mang cả gói nước đem về, nửa đường nước vỡ, lửa tắt. Tun Mun, Mun Mòng đi thay, bí mật học được cách làm ra lửa.

13- Đời sống còn chật vật. Bà Rấp bà Rưởi chuyên đi đào củ mài làm lương thực. Nhờ chuột bày mẹo, mường sai nàng "Dặt Cái Dành lành con khôn cái khéo" lên chỗ nàng Tiến Tiên Mái Lúa xin 40 giống lúa nà, 30 giống lúa rẫy về gieo trồng.

14- Thằng Pập thằng Pờm đi chăn trâu, tìm đến nhà ông Lang Khẩm Dậm học được cách làm rượu.

15- Nàng Dặt Cái Dành lại đi lên trời xin giống lợn mụ Húng, xin giống gà ở mụ La.

16- Trâu và hổ từ trước vốn ở chung với nhau. Vì có xích mích, trâu tuyệt giao với hổ, tự nguyện ở cày ruộng với Lang Cun Cần.

17- Cuộc sống vật chất đã đầy đủ. Lang Cun Cần thấy em gái là Vạ Hai Kíp đẹp, lấy làm vợ, dù trời và người đều không thuận. Cun Cần làm theo ý mình sinh con đều thành ma quái, cuối cùng phải đưa em bỏ vào rừng sâu.

18- Mường nước đi hỏi vợ cho Lang Cun Cần. Hỏi được con thần nước, thần đất, con trời và cả trong mường. Sinh được một loạt con là Cun Tồi, Cun Tàng, Cun Khương và Toóng In.

19- Lang Cun Cần chia đất cho các con. Toóng In được phần nhiều nhưng tiêu hoang phí phải đi xin các anh. Sau y lại liên kết với Cun Tồi, Cun Tàng tranh giành với Cun Khương. Cun Khương bỏ trốn lên nhà ông ngoại trên trời. Trời làm ra lụt lội để trả thù cho cháu. Các anh phải bắt giết Toóng In, Cun Khương mới chịu trở về. Về nhà, Cun Khương ra lệnh giết luôn các cháu là con Toóng In.

20- Đàn kiến bày cho nhà lang có cây Chu là nguồn gốc nên giàu nên có vì đó là cây Chu Đá, lá Chu Đồng, bông thau quả thiếc. Lang sai Tặm Tạch đi tìm. Tặm Tạch nhờ sức của đười ươi, cặp noọng và chim vàng anh tìm được cây ở đồi Lai Li Lai Láng. Nhưng cây chu chỉ cho anh hai quả vàng và bắt thề giữ kín địa điểm. Lang Cun Cần lừa cho Tặm Tạch uống rượu say, anh nói hết những điều bí mật.

21- Lang đem quân đi chặt cây chu. Chặt mãi không đổ, cuối cùng phải giết Tặm Tạch lấy máu bôi vào rìu, tro xương Tặm Tạch rắc lên lối đi mới chặt ngã và kéo được chu về.

22- Lang làm nhà chu nguy nga lộng lẫy, nhưng quang cảnh vẫn đìu hiu. Nhân nàng Sông Đón có sắc đẹp, Lang Cun Cần quyến rũ mà không được, liền bắt người yêu của nàng là Khán Đồng phải đi tìm rùa vàng cho Lang, nếu không thì Lang sẽ cướp người yêu. Khán Đồng kiếm được rùa vàng. Nhờ đó mà nhà chu trở nên huy hoàng náo nhiệt. Lang Cun Cần cho tổ chức tiệc mừng.

23- Con của Tặm Tạch là thằng Tặm con Tạch thấy việc thì vào xin ăn bị xua đuổi. Chúng tức giận đem lửa và rơm buộc vào đuôi mèo, thả vào nhà chu. Nhà Chu cháy sạch, Lang tìm đuổi bắt. Thằng Tặm con Tạch trốn vào gốc cây si. Nhà Lang chặt cây si, máu hai đứa chảy biến thành nhiều thú dữ mà ghê gớm nhất là con Moong Lồ.

24- Nhà Lang tổ chắc săn moong. Moong lồ bị đuổi chạy vào chết chẹt ở núi Khăng Khin. Dân Mường xẻ thịt chia nhau. Kẻ trước người sau bắt trước màu sắc ở da moong lồ để dệt thêu vải, tùy theo phần được nhận. Dân Lào, Thái đến trước nên vải họ thêu đẹp, dân Mường cậy gần đến chậm nhận phần da xấu nên vải Mường sau này kém màu sắc.

25- Thịt Moong Lồ rơi rớt, chó ăn phải phát điên, vứt xác chó xuống sông, cá và quạ ăn phải cũng hóa điên. Nhà Lang phải đi săn cá điên, quạ điên.

26- Toóng In chết hóa thành ma ruộng, không ai cai quản, liền kéo ma đến đánh nhà Lang, Toóng In bị thua trốn xuống nước.

27- Toóng In lại nhờ bọn cá ngao, ba ba, rồng rắn lên đánh bọn Cun Khương để trả thù. Nhưng cuối cùng vẫn bị Cun Khương tiêu diệt.

28- Mọi việc đều yên ổn. Lang Cun Khương trở thành vua. Mường nước liền lo xống áo, lo kiệu ngai và đón vua về Đồng chì tam quan kẻ chợ.

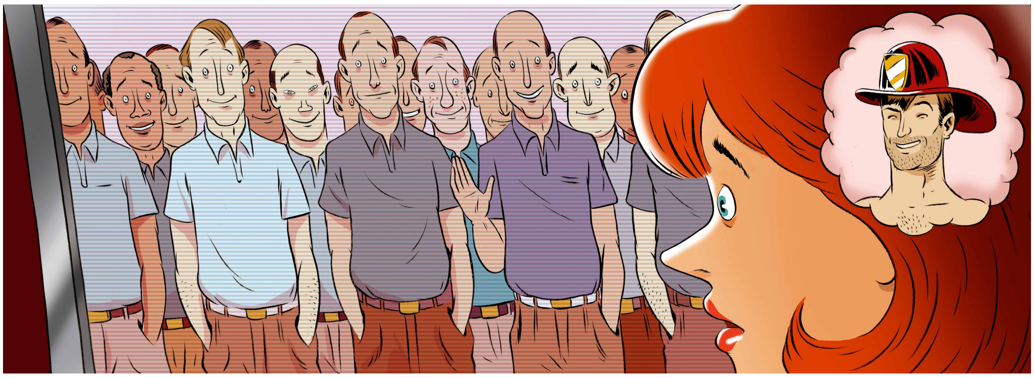
# TOÁN HỌC TRONG HÔN NHÂN

Nguyễn Hùng Sơn

Tháng 2, 2021

## TÓM TẮT

Khi nào là thời điểm tốt nhất để đưa ra quyết định hôn nhân với người mình yêu? Liệu người yêu hiện tại của bạn có phải là người bạn sẽ dành phần đời còn lại của mình không? Phải chia tay bao nhiêu mối tình mới tạo được mối quan hệ ổn định? Có lẽ nhiều người đang hoặc sẽ đặt những câu hỏi như vậy. Thật khó tin rằng toán học và thuật toán cũng có thể giúp chúng ta trong những suy nghĩ lãng mạn và những tình huống khó xử của trái tim. Tất cả phụ thuộc vào việc xác định thời điểm bạn nên ngừng tìm kiếm và đưa ra quyết định, và đó là vấn đề chúng ta có thể lập được mô hình toán học.



Hình 1: Minh họa của Zohar Lazar cho tạp chí TIME

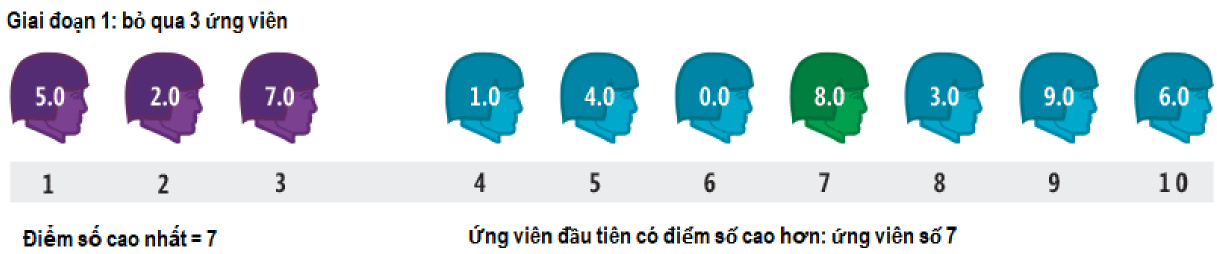
Trong chuyên mục Trò chơi toán học của Martin Gardner trên tạp chí Scientific American số tháng 2 năm 1960, xuất hiện một bài toán mà ngày nay giới toán học gọi nó là *bài toán tuyển chọn thư ký*, hoặc ngắn gọn là *bài toán thư ký*. Bài toán này được phát biểu như sau:

> *Giám đốc một công ty đăng thông báo tuyển dụng vị trí thư ký giám đốc. Có $N$ ứng viên vượt qua được vòng sơ khảo và sẽ được giám đốc trực tiếp phỏng vấn. Sau khi phỏng vấn mỗi ứng viên, nhà tuyển dụng có hai lựa chọn: hoặc nhận ứng viên đó vào làm thư ký và kết thúc việc tìm kiếm, hoặc từ chối và mời ứng viên tiếp theo. Giả sử rằng do nhu cầu của thị trường lao động nên khi đã quyết định thì không thể thay đổi được nữa. Vậy nếu muốn chọn được ứng viên có năng lực tốt nhất cho công việc thì khi nào là thời điểm tối ưu để kết thúc quá trình tuyển dụng?*

Theo trực giác, chúng ta thấy rằng không nên đưa ra quyết định quá sớm (có nhiều khả năng là chúng ta chưa gặp được ứng viên tốt nhất), hoặc trì hoãn quá lâu (ứng viên tốt nhất có thể bị từ chối một cách vội vàng từ tước đó).Câu trả lời cho bài toán này là thời điểm lợi nhất để tìm kiếm ứng viên phù hợp là sau khi đã phỏng vấn khoảng 0,368 ứng viên. Đầu tiên chúng ta hãy tìm hiểu từ đâu có con số này?

Giả sử các ứng viên được sắp xếp vào phỏng vấn 1 cách ngẫu nhiên theo thứ tự từ 1 đến $N$. Bạn đọc có thể thấy rằng chiến lược tối ưu cho bài toán thư ký là chia quá trình tuyển dụng thành hai giai đoạn:

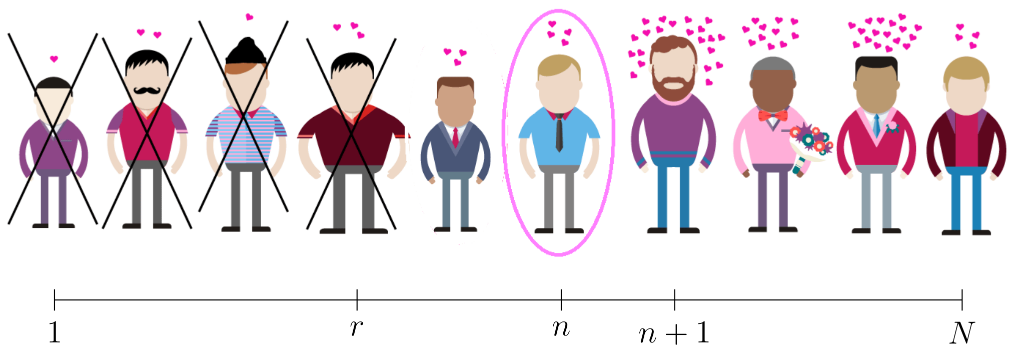
- Giai đoạn 1 là tìm hiểu năng lực chung của các ứng viên: chúng ta sẽ loại $r$ ứng viên đầu tiên và coi quá trình phỏng vấn $r$ ứng viên đó như một quá trình tích lũy thông tin. Tất nhiên $1 \le r \le N$.
- Ở giai đoạn 2 chúng ta sẽ chọn ứng viên đầu tiên có năng lực tốt hơn tất cả các ứng viên ở nhóm $r$ ứng viên đầu tiên.




Hình 2: Ví dụ của thuật toán tuyển dụng thư ký với $N = 10$ và $k = 3$.

Hình 2 cho ta thấy Minh họa của thuật toán trên. Câu hỏi là hãy tìm giá trị của $r$ (hoặc tỉ lệ $\dfrac{r}{N}$ khi $N \to \infty$) sao cho xác suất chọn được ứng viên giỏi nhất là cao nhất.

Chúng ta thấy rằng số ứng viên còn lại ở giai đoạn 2 là $N - r$. Chúng ta hãy giả sử rằng ứng viên giỏi nhất xếp ở vị trí thứ $n+1$. Rõ ràng nếu $n+1 \le r$ thì ta không thể chọn được ứng viên giỏi nhất. Hình vẽ dưới đây minh họa trường hợp khi $n+1 > r$.



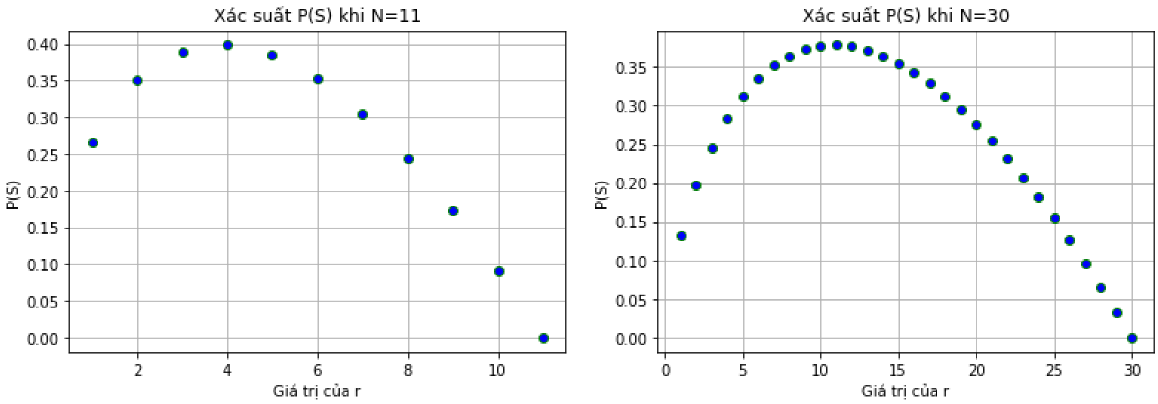
Để chọn được ứng viên thứ $n+1$ thì điều kiện sau đây phải thỏa mãn: ứng viên giỏi nhất trong nhóm $\{1, ..., r\}$ cũng là ứng viên giỏi nhất trong nhóm $\{1, ..., n\}$. Điều kiện này đảm bảo để quá trình phỏng vấn kéo dài đến ứng viên thứ $n+1$ và tất nhiên ứng viên giỏi nhất này sẽ được chọn, và xác suất để xảy ra điều kiện này là $\frac{r}{n}$. Chúng ta sẽ ký hiệu xác suất chọn được ứng viên giỏi nhất khi ứng viên này được xếp ở vị trí $n+1$ là $P(S \mid n+1)$. Ta có

$$P(S \mid n+1) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } n+1 \le r \\ \dfrac{r}{n}, & \text{nếu } n+1 > r \end{cases}$$

Giả sử rằng xác suất để ứng viên giỏi nhất có thể được sắp xếp ở mỗi vị trí là như nhau và bằng $\frac{1}{N}$. Sử dụng công thức tính xác suất toàn phần ta có thể tính xác suất chọn được ứng viên giỏi nhất là:

$$P(S) = \sum_{n+1=1}^{N} \frac{1}{N} \cdot P(S \mid n+1) = \frac{1}{N}\left(\frac{r}{r} + \frac{r}{r+1} + \cdots + \frac{r}{N-1}\right)$$

Ta thấy rằng các giá trị của $P(S)$ là một chuỗi số phụ thuộc vào chỉ số $r$. Khi $N$ là số không quá lơn, chúng ta có thể tính giá trị của $P(S)$ lần lượt với $r = 1, 2, ..., N-1$ và tìm $r$ sao cho $P(S)$ là lớn nhất. Ở Hình 3 ta thấy khi $N = 11$, xác suất $P(S)$ đạt giá trị lớn nhất khi $r = 4$, còn nếu $N = 30$ thì $P(S)$ có giá trị lớn nhất khi $r = 11$.




Hình 3: Xác suất chọn được ứng viên giỏi nhất $P(S)$ với $N = 11$ (hình bên trái) và $N = 30$ (hình bên phải)

Khi $N$ là số tương đối lớn, xác suất $P(S)$ có thể tính xấp xỉ như sau:

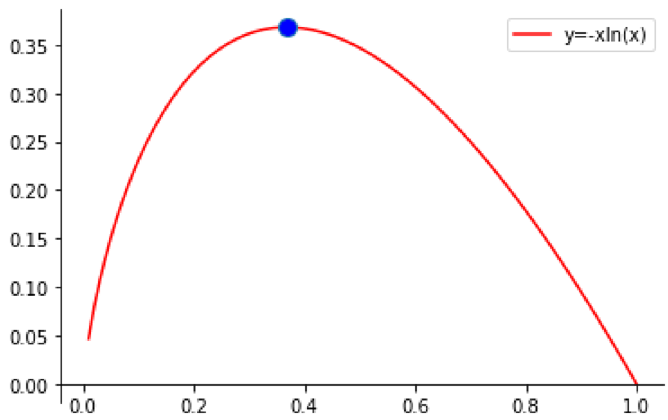
$$\begin{aligned} P(S) &= \frac{1}{N}\left(\frac{r}{r} + \frac{r}{r+1} + \cdots + \frac{r}{N-1}\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=r}^{N-1}\frac{r}{n} \\ &\approx \frac{r}{N}\int_r^N \frac{1}{n}dn = -\frac{r}{N} \cdot \ln\left(\frac{r}{N}\right) \end{aligned}$$

với $\ln$ là ký hiệu logarit tự nhiên. Nếu đặt $x = \frac{r}{N}$ thì bài toán tuyển chọn thư lý được đưa về bài toán tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x\ln(x)$ với $x \in x \in (0, 1]$.

Để tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên ta cần tính đạo hàm:

$$f'(x) = (-x \cdot \ln(x))' = -1 \cdot \ln(x) - x \cdot x^{-1} = -\ln(x) - 1$$

Ta thấy rằng $f'(x) = 0$ khi và chỉ khi $\ln(x) = -1$, tức là $x = e^{-1}$. Hơn nữa $f'(x) > 0$ với $x \in (0, e^{-1})$ và $f'(x) < 0$ với $x \in (e^{-1}, 1)$. Từ đó suy ra hàm $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,368$.




Hình 4: Đồ thị hàm số $y = -x\ln(x)$

Các phép tính trên cho thấy để xác suất tuyển dụng được thư ký giỏi nhất, ở giai đoạn 1, giám đốc công ty cần phải phỏng vấn $0,368$ số lượng các ứng viên. Và lúc đó xác suất tuyển chọn được ứng viên giỏi nhất sẽ là $-e^{-1} \cdot \ln(e^{-1}) = e^{-1}$ tức là cũng bằng khoảng $0,368$. Một số phân số có giá trị gần $e^{-1}$ là: $\frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{7}{19}, \frac{10}{27}$ hoặc $\frac{11}{30}$

Có rất nhiều phiên bản khác nhau của bài toán thư ký. Ví dụ kết quả sẽ khác nếu chúng ta có thể liên hệ lại với những ứng viên đã bị từ chối lúc ban đầu hoặc nếu chúng ta hài lòng với ứng viên giỏi nhất hoặc gần như giỏi nhất. Điều đáng chú ý là bài toán này cũng có thể được xem xét ở khía cạnh thời gian chứ không chỉ là định lượng. Ví dụ: nếu việc tuyển dụng cho vị trí thư ký diễn ra đúng một tháng và chúng ta không biết sẽ nhận được bao nhiêu CV, nhóm thử nghiệm tối ưu sẽ là $0,368 \cdot 30 \approx 11$ ngày đầu tiên, mà không phụ thuộc vào số lượng các cuộc phỏng vấn. Sau đó, chúng ta nên tuyển dụng ứng viên đầu tiên giỏi hơn những người từ nhóm thử nghiệm.

Cũng nhờ sự đơn giản của mô hình và lời giải rõ ràng, bài toán thư ký được sử dụng rộng rãi trong nhiều tình huống trong khoa học cũng như trong cuộc sống hàng ngày. Toán học gợi ý rằng ta nên tuân theo quy tắc $0,368$ khi muốn thuê một căn hộ ở một thành phố lạ, nơi chúng ta không nắm được giá của thị trường bất động sản. Nếu chúng ta đang tìm kiếm một căn hộ để thuê, thì nên đặt ra một giới hạn, ví dụ: có 11 căn hộ tiềm năng thú vị, thì 4 căn hộ đầu tiên ($4/11 \approx 0.364$) nên được coi là bước kiểm tra ban đầu của thị trường bất động sản. Tương tự vấn đề về hẹn hò hoặc hôn nhân cũng có thể đưa về bài toán thư ký. Các trang web hẹn hò đôi khi giống như một cuộc phỏng vấn xin việc. Chúng ta thường cố gắng chọn đối tượng "hợp nhất" hoặc "tốt nhất" trong số các thành viên của trang web hẹn hò. Quy trình phải tương tự: xác định số lượng cuộc hẹn hò mà ta có thể quan tâm, coi khoảng 37% số cuộc hẹn đầu tiên là giai đoạn thu thập thông tin và chọn người đầu tiên tốt hơn các ứng viên từ nhóm thử nghiệm làm người yêu.

Đối với những quyết định nghiêm túc hơn, chẳng hạn như kết hôn và ổn định cuộc sống, chúng ta cũng có thể áp dụng bài toán thư ký. Lưu ý rằng chúng ta thường không thể ước tính có bao nhiêu đối tác tiềm năng mà chúng ta sẽ gặp trong cuộc đời. Trong trường hợp này, tốt hơn là nên xét yếu tố thời gian. Vì lý do sinh học và pháp lý, thời điểm nên lập gia đình cho nữ là từ 18 đến 35 tuổi. Như vậy chúng ta có tổng cộng $35 - 18 = 17$ năm để thu thập thông tin và quyết định ổn định cuộc sống. Từ những suy luận như ở trên, chúng ta đã biết rằng $0,368 \cdot 17$ năm đầu tiên của 6 năm chỉ nên dành cho việc thu thập dữ liệu. Vào thời điểm khoảng $18 + 6 = 24$ tuổi, sẽ đến lúc chúng ta cần sẵn sàng để đưa ra quyết định cuối cùng.

Bài toán thư ký cũng đã được các chuyên gia tâm lý học khảo sát trên các tình nguyện viên. Họ muốn kiểm tra xem nếu xử sự 1 cách trực giác, con người có đưa ra quyết định dựa theo quy tắc $0,368$hay không. Kết quả khảo sát cho thấy con người chúng ta thường thiếu kiên nhẫn và đưa ra quyết định quá nhanh, chỉ sau khi quan sát khoảng $31\%$ số khả năng có thể. Ví dụ: khi chúng ta đang tìm một quán cà phê trong một chuyến du lịch. Lựa chọn quá sớm một tách cappuccino có thể khiến chúng ta trả tiền đắt hơn, trong khi một quán cà phê rẻ hơn nằm ngay gần đó. Nếu trả giá đắt cho một ly cà phê không phải là một bi kịch, thì quyết định bán nhà hoặc hôn nhân được đưa ra quá sớm có thể có hậu quả nặng nề.

Xin bạn đọc lưu ý rằng các ý kiến ở trên chỉ là những câu chuyện thú vị của ứng dụng toán học trong cuộc sống. Mô hình trình bày ở trên đã được đơn giản hóa rất nhiều và không xét rất nhiều yêu tố và các tình huống đặc biệt của cuộc sống con người. Và cuối cùng xin nhắc lại với các bạn đọc câu nói nổi tiếng của đại văn hào Mark Twain: “Có 3 loại dối trá: dối trá, dối trá đáng nguyền rủa và xác suất thống kê”. Tất nhiên ý ở đây không phải nói về môn khoa học xác suất thống kê là dối trá mà muốn nói rằng người ta thường vô tình, hoặc cố tình sử dụng các mô hình thống kê để đưa ra các kết luận không chính xác.

Bạn đọc có thể tìm hiểu thêm về các thuật toán khác cũng như các ứng dụng trong quyển sách của Brian Christian và Tom Griffiths [2].

## Tài liệu

[1] Gardner, M.: Scientific American (February/March 1960)

[2] Brian Christian, Tom Griffiths. Algorithms to Live By: The Computer Science of Human Decisions. 2016

# ĐÔI NÉT VỀ KỲ THI OLYMPIC HÌNH HỌC IRAN

Tống Hữu Nhân
Bác sĩ Bệnh viện Trưng Vương, Thành phố Hồ Chí Minh

TÓM TẮT

Olympic Hình học Iran (IGO - Iranian Geometry Olympiad) là một kỳ thi thường niên do Iran tổ chức, dành cho các bạn học sinh yêu thích Hình học, đến năm 2020 đã là lần thứ 7 kỳ thi diễn ra. Bài viết xin giới thiệu đến độc giả sơ lược về IGO và một số dấu ấn của kỳ thi tại Việt Nam.

## 1. Tổng quan về IGO

Kỳ thi IGO do Iran tổ chức vào khoảng cuối tháng 8 hằng năm với mục đích tạo một sân chơi olympic toán riêng biệt cho phân môn Hình học, bao gồm: Hình học phẳng, Hình học không gian và Hình học tổ hợp.

Kỳ thi được tổ chức không giới hạn trên quy mô toàn thế giới với khoảng gần 60 nước tham gia.

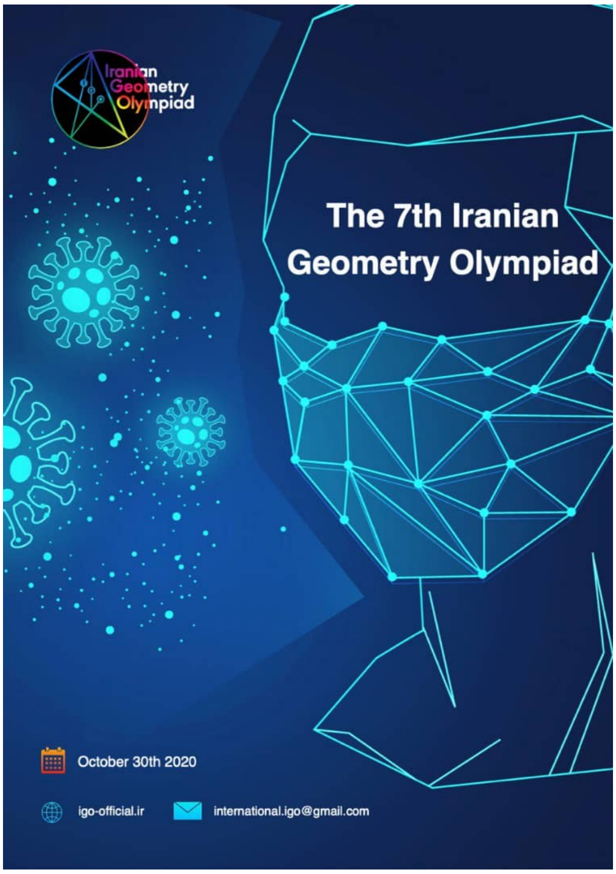
Trang web chính thức của IGO: https://igo-official.ir/.

*Logo chính thức của IGO,*
*với sự liên tưởng đầy sáng tạo ba chữ cái I,G,O ứng với tâm nội tiếp, trọng tâm và tâm ngoại tiếp*

Kỳ thi được chia ra làm 4 cấp độ:

- Elemetary: dành cho học sinh khối 7-8.
- Intermediate: dành cho học sinh khối 9-10.
- Advanced: dành cho học sinh khối 11-12.
- Free: dành cho thí sinh đã tốt nghiệp THPT.

Đề thi bao gồm 5 bài toán tự luận, thí sinh làm trong thời gian 270 phút (riêng khối Elementary là 240 phút). Thông thường các bài toán từ 1 đến 5 được sắp xếp theo độ khó tăng dần. Các bài số 5 mỗi khối thường là các bài cực kỳ khó, hình vẽ phức tạp, đòi hỏi các thí sinh phải thật sự xuất sắc, và đủ tinh tế thì mới vượt qua được.




*Poster IGO 2020, với thiết kế khẩu trang khối đa diện độc đáo mang thông điệp về đại dịch COVID-19*

Trước ngày thi chính thức, các nước tham gia sẽ gửi các bài toán đề nghị, BTC Iran chọn và gửi lại đề thi chính thức, kèm đáp án và biểu điểm. Tùy theo tình hình cụ thể, mỗi nước sẽ có cách tổ chức thi phù hợp và gửi danh sách kết quả top các thí sinh mỗi khối. Dựa trên đó, BTC Iran sẽ công bố giải thưởng chính thức, gồm: **Gold, Silver và Bronze Ruler** (tương ứng với giải Nhất, Nhì và Ba).


*Kỷ niệm chương dành cho giải Gold, Silver và Bronze Ruler*

## 2. IGO tại Việt Nam

IGO lần đầu tiên diễn ra vào năm 2014, và chính thức đến Việt Nam vào năm 2018, với Trưởng Ban tổ chức ở Việt Nam là **TS. Trần Nam Dũng** (ĐH KHTN, TpHCM).

Ở Việt Nam, IGO được tổ chức dưới hình thức các Hội đồng thi. Mỗi Hội đồng thi sẽ có 1 Giáo viên phụ trách, đảm nhận các công việc: lập danh sách thí sinh, đăng ký với BTC IGO Việt Nam, tổ chức coi thi và nộp bài thi.

Từ số lượng khiêm tốn khoảng 200 thí sinh ở lần thi đầu tiên, trải qua 4 lần thi, kỳ thi đến nay đã phát triển vượt bậc với gần **900 thí sinh** đến từ **40 Hội đồng** thi, trải dài từ Bắc xuống Nam, từ Lào Cai đến tận Cà Mau. Điều này phần nào phản ảnh chất lượng chuyên môn cao của kỳ thi và niềm yêu thích Hình học của học sinh Việt Nam.

Trải qua 3 lần thi, các thí sinh Việt Nam đã giành tổng cộng **52 Ruler**, cụ thể:

- IGO 2018: 5 Vàng, 10 Bạc, 1 Đồng
- IGO 2019: 4 Vàng, 12 Bạc, 5 Đồng
- IGO 2020: 9 Vàng, 6 Bạc

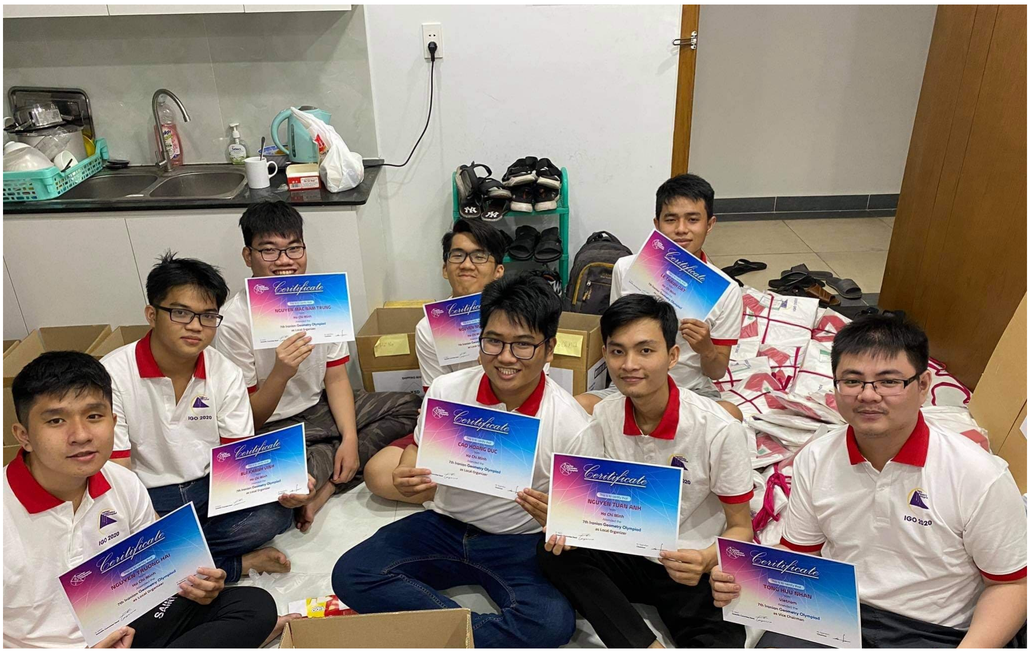
Ngoài các giải thưởng chính thức, để khuyến khích thí sinh, BTC IGO Việt Nam còn trao thêm các giải thưởng riêng, gồm: **Aluminium / Iron Compass** và **Honorable Mention**.

| VIETNAM | Name | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | Total | Prize |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Elementary Level - Number of participants : 209 | | | | | | | | |
| Contestant 1 | Nguyen Le Bao Chau | 8 | 8 | 8 | 8 | 0 | 32 | Gold Ruler |
| Contestant 2 | Hoang Xuan Bach | 8 | 8 | 8 | 8 | 0 | 32 | Gold Ruler |
| Contestant 3 | Pham Ngoc Khanh | 8 | 8 | 8 | 5 | 1 | 30 | Silver Ruler |
| Contestant 4 | Vo Trong Khai | 4 | 8 | 8 | 8 | 1 | 29 | Silver Ruler |
| Contestant 5 | Nguyen Quang Nhat | 8 | 7 | 4 | 8 | 1 | 28 | Silver Ruler |
| Intermediate Level - Number of participants : 453 | | | | | | | | |
| Contestant 1 | Pham Duy Nguyen Lam | 8 | 8 | 8 | 8 | 1 | 33 | Gold Ruler |
| Contestant 2 | Nguyen Tran Minh Nhat | 8 | 8 | 8 | 8 | 0 | 32 | Gold Ruler |
| Contestant 3 | Pham Viet Hung | 8 | 8 | 8 | 0 | 8 | 32 | Gold Ruler |
| Contestant 4 | Nguyen Ba Hieu | 8 | 8 | 8 | 2 | 0 | 26 | Silver Ruler |
| Advanced Level - Number of participants : 222 | | | | | | | | |
| Contestant 1 | Le Xuan Hoang | 8 | 8 | 3 | 7 | 0 | 26 | Gold Ruler |
| Contestant 2 | Nguyen Duc Sang | 8 | 8 | 3 | 5 | 0 | 24 | Gold Ruler |
| Contestant 3 | Nguyen Quang Tri | 8 | 8 | 0 | 6 | 0 | 22 | Gold Ruler |
| Contestant 4 | Le Minh Viet Anh | 8 | 5 | 0 | 8 | 0 | 21 | Silver Ruler |
| Free Level - Number of participants : 6 | | | | | | | | |
| Contestant 1 | Ha Huy Khoi | 8 | 8 | 0 | 4 | 5 | 25 | Gold Ruler |
| Contestant 2 | Phan Quang Tri | 8 | 8 | 0 | 2 | 0 | 18 | Silver Ruler |

*Kết quả của Việt Nam tại IGO 2020*

Bên cạnh Certificate cho thí sinh tham gia từ phía Iran, BTC IGO Việt Nam đã sáng tạo thêm nhiều phần thưởng thú vị khác. Dưới đây là ảnh các thành viên BTC IGO Việt Nam đang phân phối quà tặng gửi về cho các Hội đồng thi, bạn đọc có thể thấy trong đó hình ảnh về các phần quà này như: áo IGO, tập IGO, bút IGO, ...

*Ban tổ chức IGO 2019*



*Ban tổ chức IGO 2020*

Ngay từ lần đầu tiên tham dự IGO, Việt Nam đã tham gia gửi bài đề nghị và thường là nước có số lượng bài đề nghị cao nhất (khoảng 12-15 bài mỗi năm). Điều đặc biệt là các bài toán đề nghị của Việt Nam không chỉ đến từ các chuyên gia Hình học như: thầy Trần Quang Hùng, thầy Nguyễn Văn Linh, thầy Nguyễn Lê Phước, thầy Lê Phúc Lữ, ... mà còn từ các bạn sinh viên trẻ đam mê hình học: Trần Quân, Tống Hữu Nhân, ... Mr. Hesam Rajabzadeh - Trưởng Ban tổ chức IGO của Iran - đánh giá rất cao các bài toán đề nghị của Việt Nam về tính mới mẻ, đẹp mắt và độc đáo.

Kết quả là từ 2018 đến nay, năm nào thì Việt Nam ta cũng có bài được chọn vào đề thi chính thức. Dưới đây xin giới thiệu lại các bài toán này để bạn đọc thử sức:

Bài toán 1. ***(IGO 2018, Lê Viết Ân)*** *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Đường tròn qua $A, B$ tiếp xúc $CD$ tại $E$; đường tròn qua $C, D$ tiếp xúc $AB$ tại $F$. Gọi $G, H$ lần lượt là giao điểm $AE, DF$ và $BE, CF$. Chứng minh rằng tâm nội tiếp các tam giác $AGF, BHF, CHE, DGE$ cùng nằm trên một đường tròn.*

Bài toán 2. ***(IGO 2019, Trần Quân)*** *Cho tam giác $ABC$ không cân nội tiếp đường tròn $(O)$, có trung tuyến $AM$ và $N$ là trung điểm cung $BC$. Đường thẳng qua $B, C$, song song $AM$ cắt lại đường tròn $(O)$ tại $X, Y$. Đường tròn qua $X, Y$, tiếp xúc $BC$ tại $Z$. Trung tuyến $AM$ và đường thẳng qua $N$, song song $AM$ cắt lại đường tròn $(ZMN)$ tại $K$. Gọi $(O_1)$ là đường tròn qua $X$, tiếp xúc $BC$ tại $B$; $(O_2)$ là đường tròn qua $Y$, tiếp xúc $BC$ tại $C$. Chứng minh rằng đường tròn $(K, KP)$ tiếp xúc các đường tròn $(O), (O_1), (O_2)$.*

Bài toán 3. ***(IGO 2020, Nguyễn Văn Linh)*** *Cho tam giác $ABC$. Đường tròn bất kỳ tâm $J$ đi qua $B, C$, cắt cạnh $AC, AB$ lần lượt tại $E, F$. Gọi $X$ là điểm sao cho $\triangle XBF \sim \triangle JCE$ ($X, C$ cùng phía so với $AB$); gọi $Y$ là điểm sao cho $\triangle YCE \sim \triangle JBF$ ($Y, B$ cùng phía so $AC$). Chứng minh rằng đường thẳng $XY$ luôn đi qua trực tâm của $\triangle ABC$.*

# 3. Một số bài toán chọn lọc từ đề thi IGO

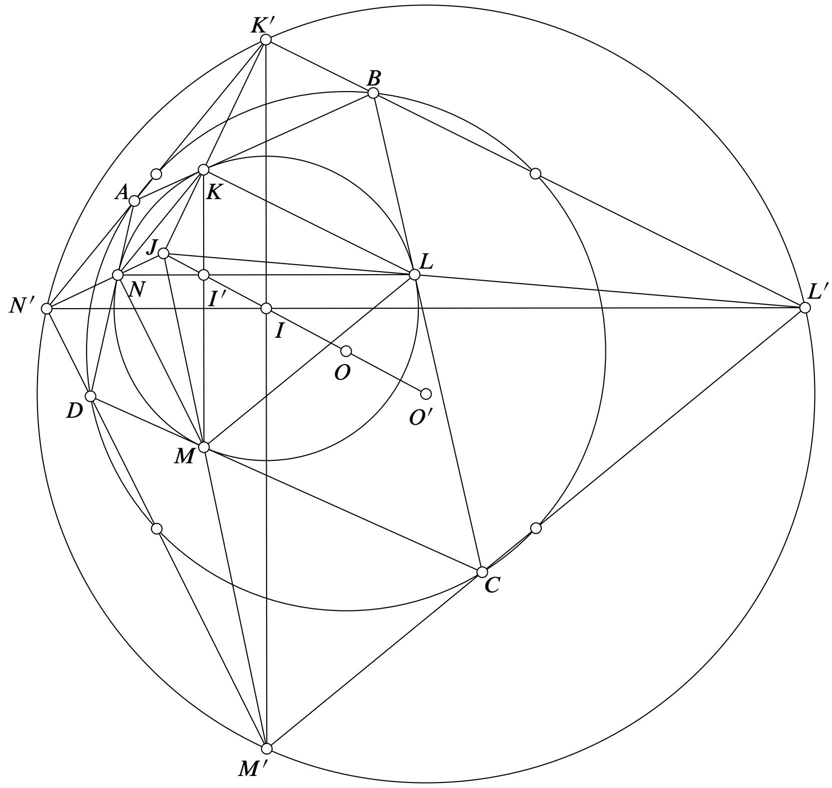
Tham gia vào Ban tổ chức IGO Việt Nam từ những ngày đầu tiên, và tham dự hầu hết các công việc: ra bài đề nghị, chấm thi và IGO 2020 là Phó Ban tổ chức, tác giả xin phép đưa ra một số nhận xét của mình về đề thi IGO.

Đã từ lâu, trên các diễn đàn Toán học thế giới đều rất háo hức chờ đợi các bài Hình từ đề thi MO và TST của Trung Quốc, Nga, Việt Nam và Iran, và topic về các bài Hình này đều rất sôi nổi. Điều này cho thấy Hình học của Iran phát triển rất tốt, và có thể đó là lý do cho IGO ra đời, nhưng để đánh giá khách quan thì đề thi IGO chỉ dừng ở mức tương đối ổn. Vì sao ?

Lý do là nhiều bài toán IGO thiên quá nặng về tính toán, thiếu không gian cho học sinh cảm nhận, phát hiện các tính chất từ hình vẽ để từ đó giải quyết bài toán. Thêm vào đó, mức độ khó dễ giữa các bài chênh nhau quá xa, bài 3 và bài 4 mỗi khối có độ lệch lớn khiến thí sinh dễ bị choáng ngợp khi bước vào bài 4, 5.

Nhưng bên cạnh đó, nhiều bài toán của IGO cũng rất đẹp và thú vị. Để bạn đọc hình dung rõ hơn, trong phần này sẽ giới thiệu lại một số bài toán mà chọn lọc từ đề thi IGO. Chúng tôi sẽ chọn mỗi năm 1 bài, bắt đầu từ năm 2018 - năm đầu tiên Việt Nam ta tham gia IGO.

Bài toán 4. ***(IGO 2018, Nikolai Beluhov)*** *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp có hai đường chéo $AC, BD$* ***không*** *vuông góc nhau. Phân giác các góc tạo bởi hai đường chéo $AC, BD$ cắt các đoạn $AB, BC, CD, DA$ tại $K, L, M, N$. Chứng minh rằng nếu tứ giác $KLMN$ nội tiếp thì tứ giác $ABCD$ lưỡng tiếp.*



***Lời giải.*** Ý tưởng của bài toán quá rõ ràng là ta cần chứng minh $KLMN$ là tứ giác tiếp điểm.

Gọi $P = AC \cap BD$. Do $ABCD$ ngoại tiếp và $AC$, $BD$ không vuông góc nhau nên $KL$, $MN$ không song song nhau mà $KL$, $MN$, $AC$ đồng quy tại $Q$. Tương tự thì $KN$, $LM$, $BD$ đồng quy tại $R$.

Gọi $K'L'M'N'$ là tứ giác tiếp điểm của $ABCD$. Sử dụng đính lý Briachon và định lý Menelaus, ta chứng minh được các cạnh đối của tứ giác $K'L'M'N'$ cũng cắt nhau tại $P$, $Q$, $R$. Suy ra $K' \equiv K$, và $KLMN$ chính là tứ giác tiếp điểm.

Cuối cùng, do $KM$, $LN$ là phân giác của $\angle(AC, BD)$ nên bằng biến đổi góc, ta được $ABCD$ nội tiếp, suy ra $ABCD$ lưỡng tiếp. □

Nhận xét.

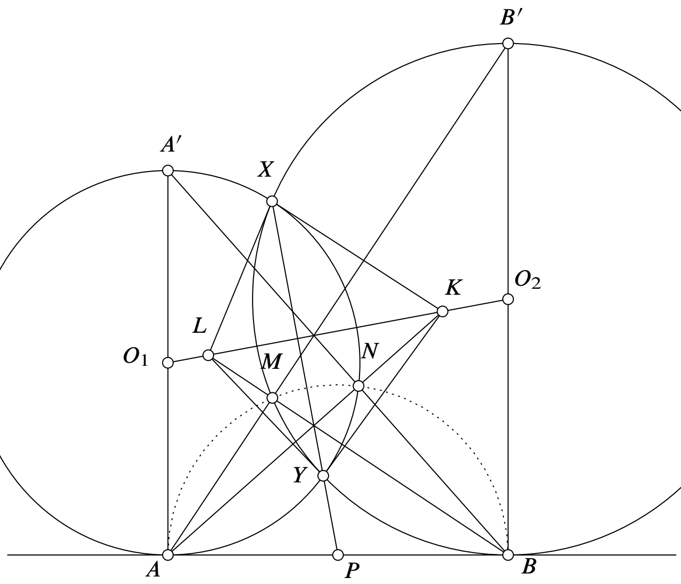
(1) Đây là bài số 4 của khối Advanced trong đề thi IGO 2018. Có **10 / 134 thí sinh** làm trọn vẹn hoặc gần trọn vẹn bài này (6 tới 8 điểm). Hầu hết lời giải cũng như đáp án chính thức đều hướng về việc chứng minh $KLMN$ là tứ giác tiếp điểm. Công cụ được các thí sinh sử dụng khá đa dạng: Pascal, đối cực, Briachon, Desargue, … và nhìn chung việc xử lý khá đẹp và gọn gàng.

(2) Bài toán được đề nghị bởi Nikolai Beluhov (Bulgaria), nên sẵn tiện xin giới thiệu một bài toán liên quan đên bài IGO 2018 trên, trích từ Cuộc thi toán mùa đông Bulgaria 1996.

> Bài toán. *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp $(I)$. Các đường thẳng qua $A, B, C, D$ và lần lượt vuông góc $IA, IB, IC, ID$ tạo thành tứ giác $K'L'M'N'$. Chứng minh tứ giác $K'L'M'N'$ nội tiếp và $K'M'$ cắt $L'N'$ tại $I$.*

Tổng hợp lại, ta thấy khi $ABCD$ là tứ giác lưỡng tiếp (nội tiếp $(O)$, ngoại tiếp $(I)$) thì $KLMN$ và $K'L'M'N'$ đều nội tiếp và có hai đường chéo vuông góc. Hơn nữa, tồn tại phép vị tự tâm $J$ nằm trên $OI$ biến $KLMN$ thành $K'L'M'N'$.

Bài toán 5. ***(IGO 2019, Dominik Burek)*** *Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $X, Y$ và có tiếp tuyến chung $AB$. Tiếp tuyến tại $X$ của $(O_1), (O_2)$ cắt đường thẳng $O_1O_2$ tại $K, L$. Đường thẳng $BL, AK$ lần lượt cắt lại đường tròn$(O_2), (O_1)$ tại $M, N$. Chứng minh rằng các đường thẳng $AM$, $BN$, $O_1O_2$ đồng quy.*




***Lời giải.*** Cơ bản gồm 2 ý sau:

**(1) Chứng minh $AMNB$ nội tiếp $(P, AB/2)$.**

Gọi $P$ là trung điểm $AB$ thì $P$ thuộc trục đẳng phương $XY$ của $(O_1), (O_2)$.

Xét $(O_1)$. Do tính đối xứng nên $KY$ là tiếp tuyến của $(O_1)$, hay $XY$ là đường đối cực của $K$. Theo định lý LaHire, $K$ thuộc đường đối cực của $P$. Mà $PA$ là tiếp tuyến của $(O_1)$ nên $AK$ là đường đối cực của $P$, suy ra $PN$ là tiếp tuyến của $(O_1)$.

Tương tự thì $PM$ là tiếp tuyến của $(O_2)$. Suy ra $AMNB$ nội tiếp $(P, AB/2)$.

**(2) Chứng minh $AM, BN, O_1O_2$ đồng quy.**

Do $AMNB$ nội tiếp $(P, AB/2)$ nên $\angle AMB = \angle ANB = 90^\circ$. Do đó, nếu $BN, AM$ lần lượt cắt lại $(O_1), (O_2)$ tại $A', B'$ thì $AA', BB'$ lần lượt là đường kính của $(O_1), (O_2)$.

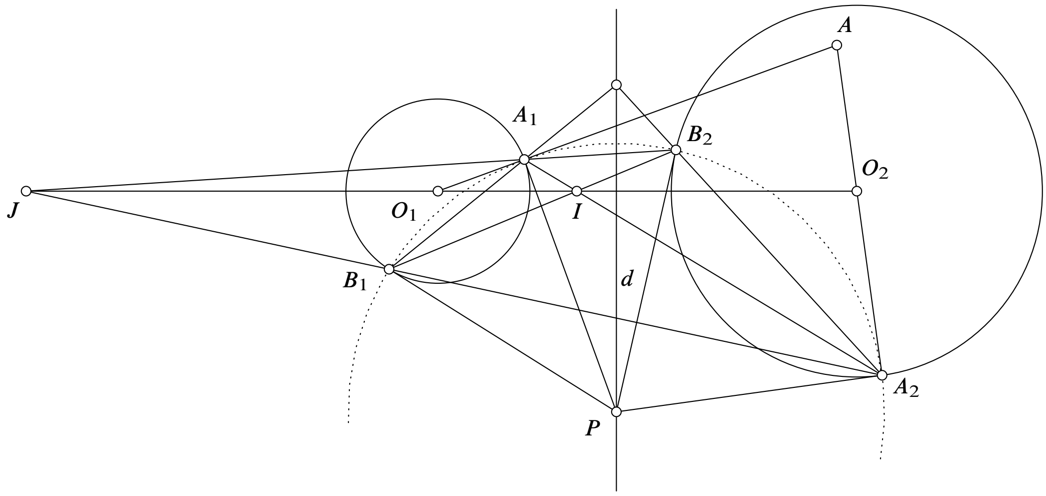
Theo tính chất tiếp tuyến, ta được $AA' \parallel BB'$ (cùng $\perp AB$) nên theo bổ đề hình thang, ta được $AM, BN, O_1O_2$ đồng quy. $\square$

Nhận xét.

(1) Đây là bài số 3 của khối Advanced trong đề thi IGO 2019. Có **76 / 223 thí sinh** làm trọn vẹn hoặc gần trọn vẹn bài này (từ 6 tới 8 điểm). Trong đó, chỉ có hai hướng chính giải quyết ý (1) là cực – đối cực (giống đáp án chính thức) hoặc điều hòa. Ý (2) thì tuy có một số cách diễn giải khác (lập tỷ số, J' trùng J), nhưng bản chất vẫn là bổ đề hình thang.

(2) Từ bài toán trên, tác giả đã tổng quát thành bổ đề sau.

Bổ đề 1. **(Tống Hữu Nhân)** Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$. Điểm $P$ thuộc trục đẳng phương $d$ và nằm ngoài hai đường tròn trên. Kẻ tiếp tuyến $PA_1, PA_2$ lần lượt tới hai đường tròn $(O_1), (O_2)$. Khi đó, đường thẳng $A_1A_2$ đi qua tâm vị tự (trong hoặc ngoài) của hai đường tròn $(O_1), (O_2)$.




***Chứng minh bổ đề***. Không mất tính tổng quát, giả sử $I = A_1A_2 \cap O_1O_2$ nằm trong đoạn $O_1O_2$. Do $P$ thuộc trục đẳng phương $d$ của $(O_1), (O_2)$ nên ta đặt $r = PA_1 = PA_2$.

Gọi $A = O_1A_1 \cap O_2A_2$. Do $PA_1, PA_2$ lần lượt là tiếp tuyến của $(O_1), (O_2)$ nên $AA_1, AA_2$ là tiếp tuyến của $(P, r)$, suy ra $AA_1 = AA_2$.

Từ đó, sử dụng định lý Menelaus cho 3 điểm $I, A_1, A_2$ trong $\triangle AO_1O_2$, ta được

$$\frac{IO_1}{IO_2} \cdot \frac{A_2O_2}{A_2A} \cdot \frac{A_1A}{A_1O_1} = 1 \Rightarrow \frac{IO_1}{IO_2} = \frac{O_1A_1}{O_2A_2}.$$

Suy ra $I$ là tâm vị tự trong của $(O_1), (O_2)$. □

Bài IGO 2019 trên là trường hợp riêng khi điểm $P$ là trung điểm đoạn tiếp tuyến chung ngoài.

(3) Một số bài toán liên quan.

> Bài toán. *Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ có tiếp tuyến chung ngoài $A_1A_2$, tiếp tuyến chung trong $B_1B_2$. Chứng minh rằng các đường thẳng $A_1A_2, B_1B_2, O_1O_2$ đồng quy.*

> Bài toán. ***(International Zhautykov Olympiad 2008)*** *Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ có tiếp tuyến chung ngoài $A_1A_2$. Gọi $P$ là trung điểm $A_1A_2$, kẻ tiếp tuyến thứ hai $PB_1$ tới $(O_1)$ và $PB_2$ tới $(O_2)$. Gọi $M$ là giao điểm của $A_1B_1, A_2B_2$, đường thẳng $PM$ cắt $O_1O_2$ tại $N$. Chứng minh rằng bốn điểm $M, N, B_1, B_2$ đồng viên.*

(4) Bài IGO 2019 trên do Dominik Burek (Ba Lan) đề nghị. Xin giới thiệu một bài toán khác, cũng do ông này đề nghị cho cuộc thi toán 3 nước Ba Lan – CH Séc – Slovakia tổ chức vào tháng 6 cùng năm.

> Bài toán. ***(Czech-Slovak-Poland Match 2019)*** *Cho tam giác $\triangle ABC$ có góc $\angle A = 60°$, các trung tuyến $AM, BN, CP$ và các đường cao $AD, BE, CF$ đồng quy tại trực tâm $H$. Gọi $X, Y, Z, T$ lần lượt là trung điểm các đoạn $DM, EN, FP$ và $AH$. Chứng minh rằng bốn điểm $X, Y, Z, T$ đồng viên.*

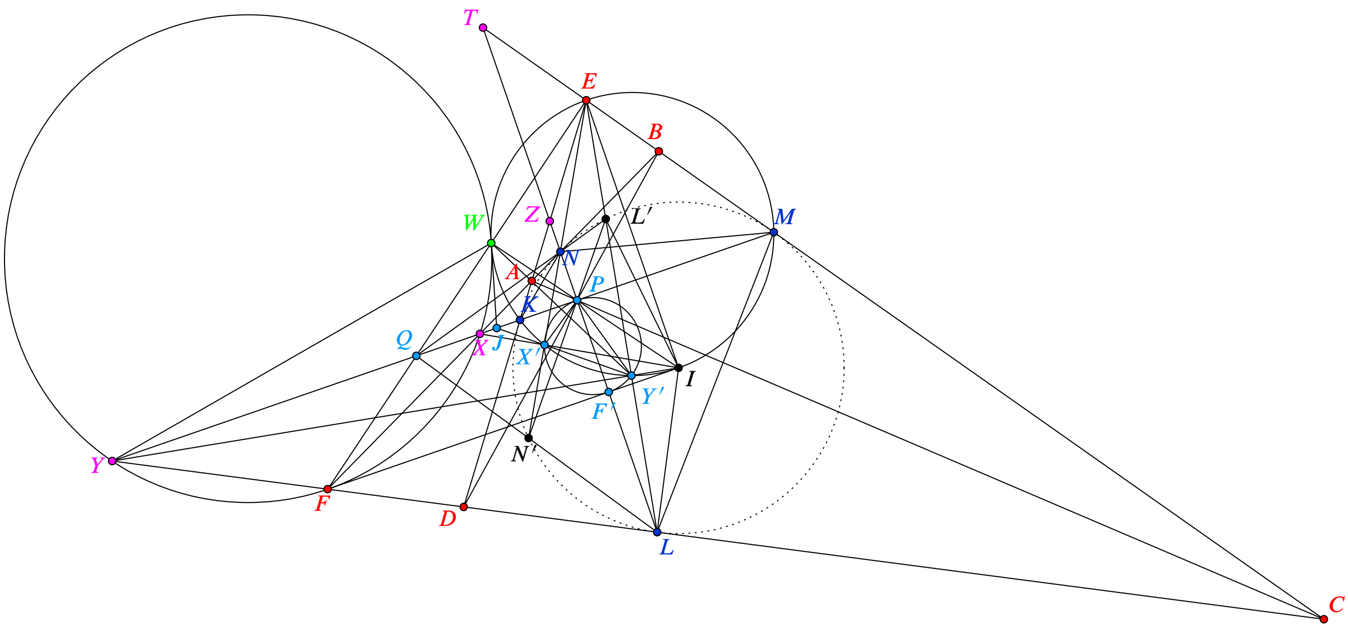
Bài toán 6. ***(IGO 2020, Mahdi Etesamifard)*** *Cho tứ giác lồi $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn $(I)$ có $AD, BC$ cắt nhau tại $E$ và $AB, CD$ cắt nhau tại $F$. Gọi $K, L, M, N$ là tiếp điểm của $(I)$ với các cạnh $AD, DC, CB, BA$. Đường thẳng $KM$ cắt $AB, CD$ lần lượt tại $X, Y$; đường thẳng $LN$ cắt $AD, BC$ lần lượt tại $Z, T$. Chứng minh rằng đường tròn $(XFY)$ tiếp xúc đường tròn đường kính $EI$ khi và chỉ khi đường tròn $(TEZ)$ tiếp xúc đường tròn đường kính $FI$.*

***Lời giải.*** Cơ bản gồm 2 ý chính sau:

**(1) Chứng minh $(FXY)$ và $(EI)$ tiếp xúc tại điểm Miquel $W$ của $KLMN$.**

Ta có $IF \perp NL$ tại trung điểm $F'$ của $NL$. Giả sử $EN, EL$ cắt lại $(I)$ tại $N', L'$ thì $NKN'M$, $LKL'M$ là các tứ giác điều hòa nên $NL, N'L', KM$ đồng quy tại $P$ và $NL', LN', KM$ đồng quy tại $Q$.

Do $X$ thuộc đường đối cực $KM$ của $E$ và $XN$ là tiếp tuyến nên $EN$ là đường đối cực của $X$, suy ra $IX \perp EN$ tại trung điểm $X'$ của $NN'$. Tương tự $IY \perp EL$ tại trung điểm $Y'$ của $LL'$.




Gọi $W$ là điểm Miquel của $KLMN$ thì $IP \perp EF = W \in (EI)$. Nếu $W$ trùng $E, F$ thì bài toán đưa về trường hợp đơn giản, xin dành cho bạn đọc.

Xét $W \not\equiv E, F$, nghịch đảo qua $(I)$, ta được

$$\mathcal{I}_I^{r^2}: \qquad (FXY) \leftrightarrow (F'X'Y'), \quad (EI) \leftrightarrow KM, \quad W \leftrightarrow P.$$

Gọi $J$ là trung điểm $PQ$ thì $J, X', Y'$ cùng nằm trên đường thẳng Gauss của $NN'LL'.PQ$. Ta có $(PQ, KM) = -1$, chú ý rằng $X'Y'MK$ nội tiếp $(EI)$, nên sử dụng phương tích và hệ thức Newton, ta được

$$\overline{JX'} \cdot \overline{JY'} = \overline{JK} \cdot \overline{JM} = JP^2,$$

do đó $(F'X'Y')$ tiếp xúc $KM$ thì tiếp điểm phải là $P$, hay $(FXY)$ tiếp xúc $(EI)$ tại $W$.

**(2) Chứng minh $ABCD$ lưỡng tâm.**

Do $\triangle WPQ$ vuông tại $W$ nên $JW^2 = JP^2 = \overline{JK} \cdot \overline{JM}$, hay $JW$ là tiếp tuyến chung của $(FXY)$ và $(EI)$. Từ đó, sử dụng góc nội tiếp, ta được

$$(WY, WY') \equiv (WY, WJ) + (WJ, WY') \equiv (FL, FW) + (EW, EL) \equiv (FL, EL) \pmod{\pi},$$

nên $Y, Y', W, L \in (LY)$. Mà do phép nghịch đảo nên $WYY'P$ nội tiếp, do đó $P \in (LY)$. Suy ra $KM \perp NL$, hay $ABCD$ lưỡng tâm. □

Nhận xét. Đây là bài số 4 của khối Advanced trong đề thi IGO 2020, một bài toán đẹp nhưng thực sự rất khó. Lời giải chính thức của BTC Iran cho bài này dài gần 6 trang A4, với những tính toán bằng định lý Casey hết sức phức tạp. Trên đây chúng tôi đã trình bày tóm lược của một lời giải thuần túy bằng hình học.

Chỉ có **4 / 222 thí sinh** khối Advanced làm được trọn vẹn hoặc gần trọn vẹn bài toán này (từ 6 đến 8 điểm), 4 thí sinh này cũng là top 4 khối Advanced. Trong đó chỉ có duy nhất bạn **Lê Xuân Hoàng** (THPT chuyên KHTHN - Hà Nội), thí sinh điểm cao nhất khối Advanced và là Gold Ruler, phát hiện và đánh giá được trường hợp điểm $W$ trùng $E$ hoặc $F$, khi đó tứ giác $ABCD$ không cần phải là tứ giác lưỡng tâm.

## Tài liệu tham khảo


[1] IGO Official Website: https://igo-official.ir/.

[2] Group FB **IGO Việt Nam**: https://www.facebook.com/groups/igovietnam

[3] Hoàng Quốc Khánh, *Khám phá ứng dụng cực và đối cực*, Diễn đàn toán học VMF.

[4] Tống Hữu Nhân, *Tứ giác Pedal*, Kỷ yếu Gặp gỡ Toán học 2016.

[5] Tống Hữu Nhân, *Tiếp điểm và tâm vị tự hai đường tròn*, Kỷ yếu Gặp gỡ Toán học 2020.

# VỀ MỘT BÀI TOÁN TIẾP XÚC HAY

Nguyễn Duy Phước
(Trường THPT Chuyên Quốc Học - Huế)

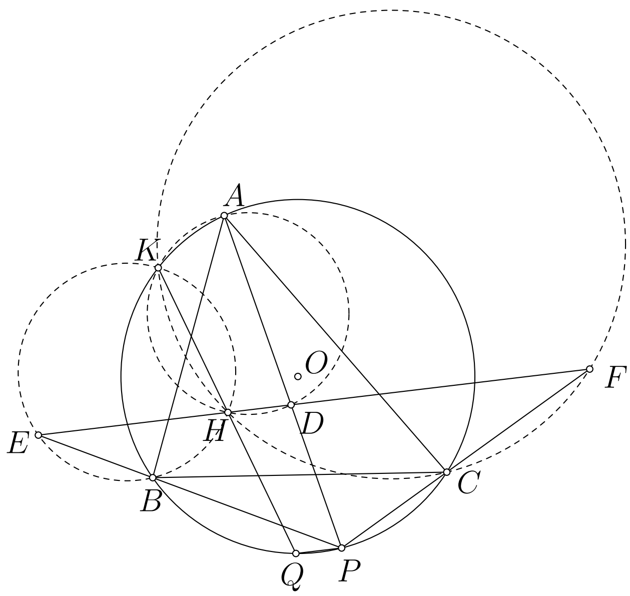
**Tóm tắt.** Trong bài viết này, tác giả xin giới thiệu một bài toán tiếp xúc đẹp và những mở rộng của nó cùng với chứng minh hình học.

## 1. Bài toán mở đầu

**Bài toán 1.** Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$. $P$ là một điểm bất kì trên đường tròn $(O)$ và $d$ là đường thẳng *Steiner* ứng với $P$ đối với tam giác $ABC$. $PA$, $PB$, $PC$ lần lượt cắt đường thẳng $d$ tại $D, E, F$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi các đường thẳng qua $D$ vuông góc với $OA$, qua $E$ vuông góc với $OB$, qua $F$ vuông góc với $OC$ tiếp xúc với đường tròn $(O)$.

*Lời giải.* Trước hết, xin phát biểu và chứng minh bổ đề sau

**Bổ đề 1.** *Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$, $H$ là điểm bất kì trong mặt phẳng. $P$ là một điểm bất kì trên đường tròn $(O)$. Một đường thẳng bất kì qua $H$ lần lượt cắt $PA$, $PB$, $PC$ tại $D, E, F$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AHD, BHE, CHF$ và $(O)$ đồng quy.*



***Chứng minh***. Gọi $K$ là giao điểm thứ hai của đường tròn $(AHD)$ và $(O)$, $Q$ là giao điểm thứ hai của $KH$ và $(O)$. Ta có biến đổi góc có hướng

$$\begin{aligned}(DH, DA) &\equiv (KH, KA)(mod\pi) && \text{(vì } T \text{ thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác } ADH)\\ &\equiv (KQ, KA)(mod\pi) && \text{(vì ba điểm } K, H, Q \text{ thẳng hàng)}\\ &\equiv (PQ, PA)(mod\pi) && \text{(vì bốn điểm } A, K, Q, P \text{ đồng viên)}\end{aligned}$$

Suy ra $d \equiv DH \parallel PQ$. Từ đó, tiếp tục biến đổi góc có hướng, ta được

$$\begin{aligned}(FH, FC) &\equiv (PQ, PC)(mod\pi) && \text{(vì } F, H \in d \text{ và } d \parallel PQ)\\ &\equiv (KQ, KC)(mod\pi) && \text{(vì bốn điểm } K, Q, P, C \text{ đồng viên)}\\ &\equiv (KH, KC)(mod\pi) && \text{(vì ba điểm } K, H, Q \text{ thẳng hàng)}\end{aligned}$$

Vì vậy, bốn điểm $F, H, C, K$ cùng nằm trên một đường tròn hay $K \in (CHF)$. Chứng minh tương tự, ta được $K \in (BHE)$.
Vậy đường tròn ngoại tiếp của các tam giác $AHD, BHE, CHF$ và $(O)$ đồng quy tại $K$. □

Quay trở lại bài toán.

Gọi $H$ là trực tâm của tam giác $ABC$. Khi đó, dễ thấy $H$ thuộc đường thẳng $d$.
Giả sử ba điểm $X, Y, Z$ là giao điểm của ba đường thẳng qua $D, E, F$ theo thứ tự vuông góc với $OA, OB, OC$ như hình vẽ.
Áp dụng **bổ đề 1**, ta có bốn đường tròn $(ADH)$, $(BEH)$, $(CFH)$ và $(O)$ đồng quy. Gọi $T$ là điểm đồng quy. Sử dụng góc định hướng:

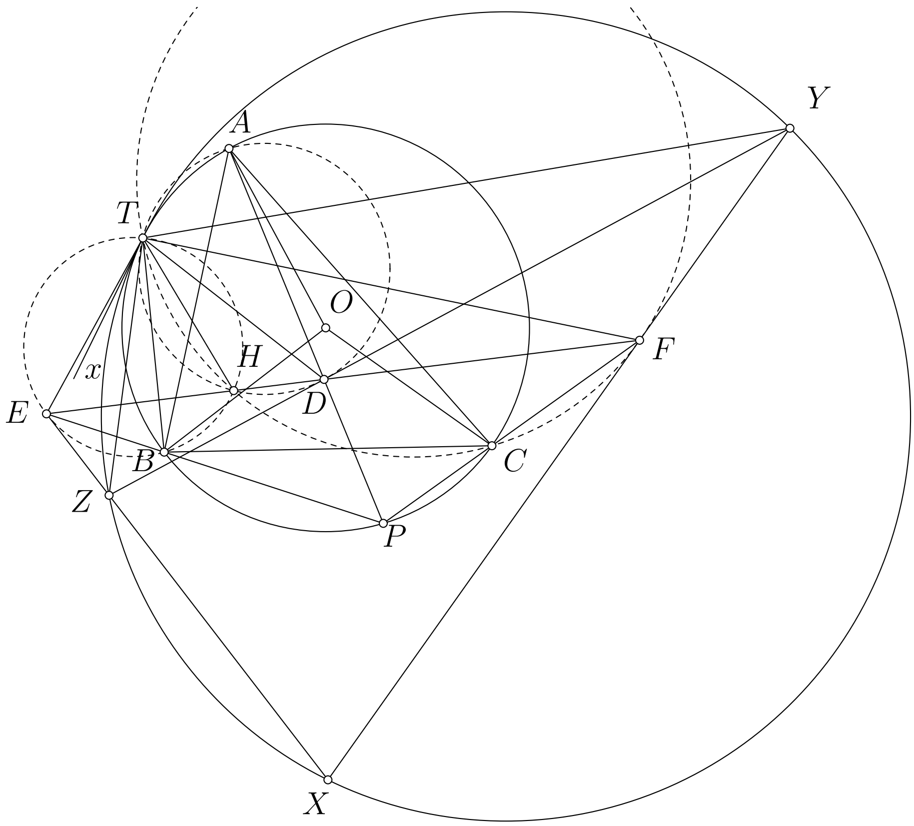
$$\begin{aligned}(TE, TF) &\equiv (TE, TH) + (TH, TF)(mod\pi)\\ &\equiv (BE, BH) + (CH, CF)(mod\pi) && \text{(vì } T \in (BHE) \text{ và } T \in (CHF))\\ &\equiv (BP, BH) + (CH, CP)(mod\pi)\\ &\equiv (BP, BC) + (BC, BH) + (CH, CB) + (CB, CP)(mod\pi)\\ &\equiv (PB, PC) + (HC, HB)(mod\pi)\\ &\equiv (AB, AC) + (AB, AC)(mod\pi) && \text{(vì } H \text{ là trực tâm của tam giác } ABC \text{ và } P \in (O))\\ &\equiv (OB, OC)(mod\pi)\end{aligned}$$

Mặt khác, vì $XY \perp OC$, $XZ \perp OB$ nên $(XE, XF) \equiv (OB, OC)$ $(mod\pi)$.
Do đó $(TE, TF) \equiv (XE, XF)$ $(mod\pi)$ hay bốn điểm $T, E, X, F$ đồng viên. Chứng minh tương tự, ta có bốn điểm $T, D, Z, E$ đồng viên.
Như vậy, $T$ là điểm $Miquel$ của tứ giác toàn phần $XZDF.EY$. Suy ra $T$ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $XYZ$.
Ta có $(YZ, YT) + (CT, CB) \equiv (YD, YT) + (CT, CB) \equiv (FD, FT) + (CT, CB) \equiv (FH, FT) + (CT, CB) \equiv (CH, CT) + (CT, CB) \equiv (CH, CB)$ $(mod\pi)$.

Tuy nhiên, ta có biến đổi góc định hướng sau:

$$\begin{aligned}
(TZ,TB) &\equiv (TZ,TD)+(TD,TB)(mod\pi) \\
&\equiv (EZ,ED)+(TD,TH)+(TH,TB)(mod\pi) && (\text{vì } T\in(ZED)) \\
&\equiv (EZ,ED)+(TD,TH)+(EH,EB)(mod\pi) && (\text{vì } T\in(BHE)) \\
&\equiv (EZ,EB)+(AD,AH)(mod\pi) && (\text{vì } T\in(ADH)) \\
&\equiv (BO,BP)+\frac{\pi}{2}+(AD,AH)(mod\pi) && (\text{vì } EZ\perp OB) \\
&\equiv (AB,AP)+(AD,AH)(mod\pi) \\
&\equiv (AB,AH)(mod\pi) \\
&\equiv (CH,CB)(mod\pi) && (\text{vì } H \text{ là trực tâm của tam giác } ABC)
\end{aligned}$$

Suy ra $(TZ,TB)\equiv(YZ,YT)+(CT,CB)\ (mod\pi)$.
Từ đây, kẻ tiếp tuyến $Tx$ của đường tròn $(O)$. Khi đó $(TZ,Tx)\equiv(TZ,TB)+(TB,Tx)$ $\equiv(YZ,YT)+(CT,CB)+(CB,CT)\equiv(YZ,YT)\ (mod\pi)$ nên $Tx$ cũng là tiếp tuyến của đường tròn $(XYZ)$.
Vậy đường tròn $(O)$ tiếp xúc với $(XYZ)$ tại $T$. □

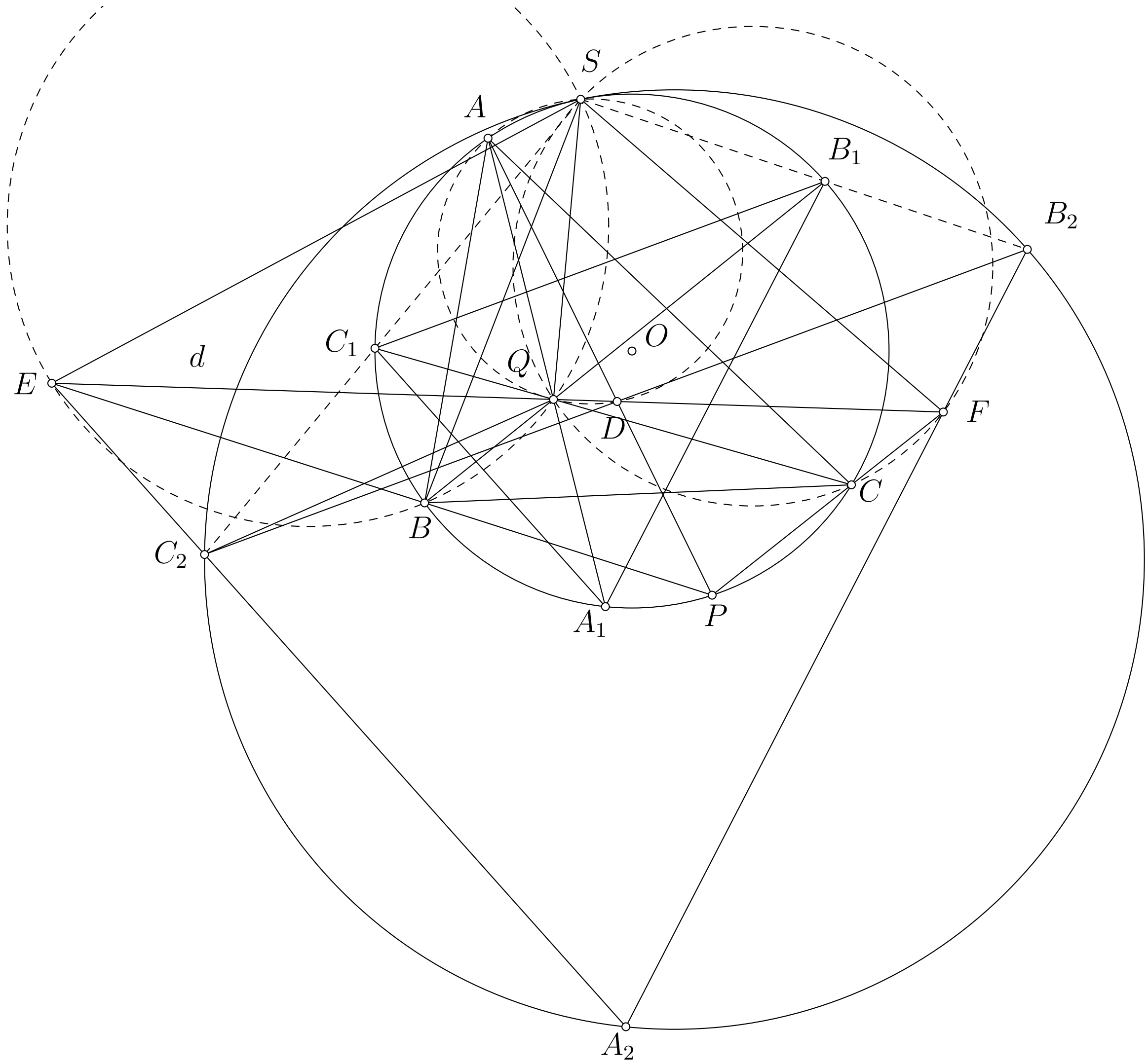



**Nhận xét.** Qua chứng minh trên, ta nhận thấy giả thiết $d$ là đường thẳng $Steiner$ là không cần thiết (thực chất là để giấu yếu tố trực tâm $H$). Như vậy, có thể thay $d$ thành một đường thẳng bất kì đi qua trực tâm của tam giác $ABC$.

## 2. Một số mở rộng

Ở **bài toán 1**, khi cho $AH, BH, CH$ lần lượt cắt lại $(O)$ tại $A', B', C'$ thì ta có kết quả $B'C' \parallel YZ$ (do cùng vuông góc với $OA$), tương tự $C'A' \parallel ZX$, $A'B' \parallel XY$. Vì vậy, ta có thể mở rộng bài toán theo hướng sau (bài toán mở rộng là của tác giả **Trần Quang Hùng** (*GV THPT chuyên KHTN*))

**Bài toán 2.** Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$, $P$ là điểm bất kì thuộc $(O)$, $Q$ là điểm bất kì trong mặt phẳng. Giả sử $d$ là một đường thẳng qua $Q$ và lần lượt cắt $PA, PB, PC$ tại $D, E, F$. $QA, QB, QC$ theo thứ tự cắt lại $(O)$ tại các điểm thứ hai là $A_1, B_1, C_1$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi các đường thẳng qua $D, E, F$ lần lượt song song với $B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1$ tiếp xúc với $(O)$.




*Lời giải.* Giả sử ba điểm $A_2, B_2, C_2$ là giao điểm của ba đường thẳng qua $D, E, F$ theo thứ tự song song với $B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1$ như hình vẽ.

Áp dụng **bổ đề 1**, ta có bốn đường tròn $(AQD)$, $(BQE)$, $(CQF)$ và $(O)$ đồng quy. Gọi điểm đồng quy là $S$. Sử dụng góc định hướng

$$\begin{aligned}
(SE, SF) &\equiv (SE, SQ) + (SQ, SF)(mod\pi) \\
&\equiv (BE, BQ) + (CQ, CF)(mod\pi) && \text{(vì } S \in (BQE) \text{ và } S \in (CQF)\text{)} \\
&\equiv (BP, BB_1) + (CC_1, CP)(mod\pi) \\
&\equiv (C_1P, C_1B_1) + (B_1C_1, B_1P)(mod\pi) && \text{(vì } B, C, B_1, C_1, P \in (O)\text{)} \\
&\equiv (PC_1, PB_1)(mod\pi) \\
&\equiv (A_1C_1, A_1B_1)(mod\pi) && \text{(vì bốn điểm } A_1, B_1, C_1, P \text{ đồng viên)} \\
&\equiv (A_2E, A_2F)(mod\pi) && \text{(vì } A_2C_2 \parallel A_1C_1 \text{ và } A_2B_2 \parallel A_1B_1\text{)}
\end{aligned}$$

Suy ra bốn điểm $S, E, F, A_2$ đồng viên. Chứng minh tương tự, ta có bốn điểm $S, D, F, B_2$ đồng viên. Do đó $S$ là điểm $Miquel$ của tứ giác toàn phần $A_2C_2DF.B_2E$. Nên $S$ thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$.
Tiếp theo ta sẽ chứng minh ba điểm $S, C_1, C_2$ thẳng hàng. Thật vậy, sử dụng góc định hướng

$$\begin{aligned}
(SC_2, SB) &\equiv (SC_2, SE) + (SE, SB)(mod\pi) \\
&\equiv (DC_2, DE) + (QE, QB)(mod\pi) && \text{(vì } S \in (DC_2E) \text{ và } S \in (BQE)\text{)} \\
&\equiv (DC_2, QB)(mod\pi) \\
&\equiv (B_1C_1, B_1B)(mod\pi) && \text{(vì } B_2C_2 \parallel B_1C_1\text{)} \\
&\equiv (SC_1, SB)(mod\pi) && \text{(vì bốn điểm } S, C_1, B, B_1 \text{ đồng viên)}
\end{aligned}$$

Do đó, ba điểm $S, C_1, C_2$ thẳng hàng. Chứng minh tương tự, ba điểm $S, B_1, B_2$ thẳng hàng. Kết hợp với $B_2C_2 \parallel B_1C_1$.
Vậy đường tròn $(A_2B_2C_2) \equiv (SB_2C_2)$ tiếp xúc với $(SB_1C_1) \equiv (O)$. □

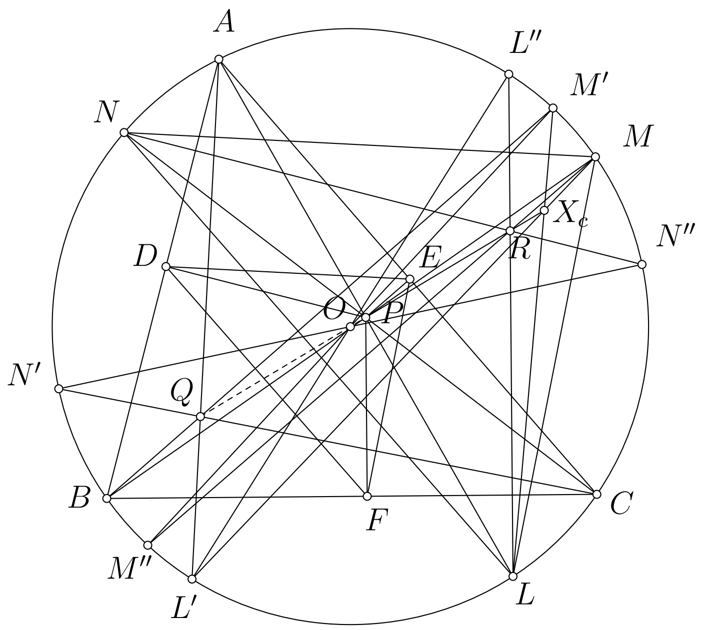
Tiếp theo, quan sát **bài toán 1**, ta nhận thấy $H, O$ là hai điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác $ABC$. Như vậy, ta cũng có thể mở rộng bài toán bằng cách thay đổi $H, O$ thành hai điểm liên hợp đẳng giác theo hướng như sau

**Bài toán 3.** Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$; $P, Q$ là hai điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác $ABC$ sao cho ba điểm $P, Q, O$ thẳng hàng. $R$ là điểm bất kì trên $(O)$. Giả sử một đường thẳng qua $P$ lần lượt cắt $RA, RB, RC$ tại $D, E, F$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi các đường thẳng qua $D, E, F$ lần lượt vuông góc với $QA, QB, QC$ tiếp xúc với $(O)$.

*Lời giải.* Trước hết, xin phát biểu và chứng minh bổ đề sau

**Bổ đề 2.** *Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$ và $P, Q$ là hai điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác $ABC$ sao cho ba điểm $P, Q, O$ thẳng hàng. $BP, CP$ lần lượt cắt $(O)$ tại điểm thứ hai là $M, N$. $D, E$ lần lượt là hình chiếu của $P$ lên $AB, AC$. Chứng minh rằng $MN \parallel DE$.*

***Chứng minh.*** *(Lời giải tham khảo từ [1] của bạn **oneplusone** trên diễn đàn AoPS)*
Gọi $L, L'$ lần lượt là giao điểm thứ hai của $AP, AQ$ với $(O)$. Kẻ đường kính $L'L''$ của đường tròn $(O)$. Khi đó, dễ thấy $LL'' \perp BC$. Định nghĩa tương tự cho các điểm $M', M'', N', N''$.



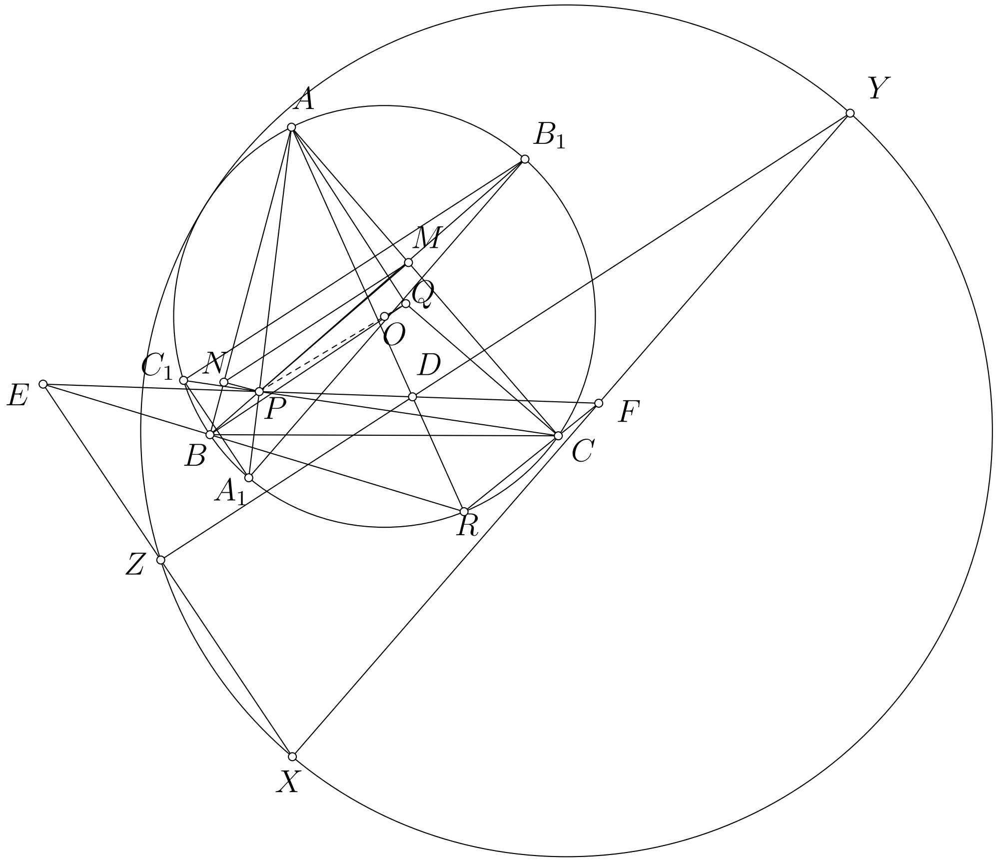

Gọi $X_c$ là giao điểm của $ML'$ và $M'L$. Định nghĩa tương tự cho các điểm $X_a, X_b$.
Áp dụng định lý *Pascal* cho sáu điểm $M'LAL'MB$ thì ba điểm $P, Q, X_c$ cùng nằm trên đường thẳng $l$. Tương tự, ta có $X_a, X_b$ cũng nằm trên $l$.
Chú ý $O$ cũng nằm trên $l$ nên áp dụng định lý *Pascal* cho sáu điểm $M'LL''L'MM''$, ta có $LL'', MM'', l$ đồng quy. Chứng minh tương tự cho $NN''$. Suy ra $LL'', MM'', NN''$ đồng quy tại $R$.
Gọi $F$ là chân đường vuông góc hạ từ $P$ xuống $BC$. Ta có

$$\angle FDE = \angle FDP + \angle EDP = \angle FBP + \angle EAP = \angle CNM + \angle CNL = \angle MNL.$$

Tương tự $\angle DEF = \angle NML$. Do đó $\triangle DEF \sim \triangle NML$. Mặt khác, $\angle DPE = \angle NRM$ và $\angle EPF = \angle MRL$.
Vì vậy $\triangle DEF \cup \{P\} \sim \triangle NML \cup \{R\}$.
Do $NR \parallel DP$, $MR \parallel PE$, $LR \parallel PF$ nên $DEF \cup \{P\}$ là ảnh vị tự của $NML \cup \{R\}$.
Vậy $MN \parallel DE$. □

Quay trở lại bài toán.

Giả sử ba điểm $X, Y, Z$ là giao điểm của ba đường thẳng qua $D, E, F$ theo thứ tự vuông góc với $QA, QB, QC$ như hình vẽ.
Gọi $A_1, B_1, C_1$ lần lượt là giao điểm thứ hai của $AP, BP, CP$ với đường tròn $(O)$; $M, N$ lần lượt là hình chiếu vuông góc hạ từ $P$ xuống $CA, AB$.
Áp dụng **bổ đề 2**, ta có $MN \parallel B_1C_1$. Mặt khác, ta có kết quả quen thuộc $MN \perp QA$. Suy ra $B_1C_1 \perp QA$. Do đó $B_1C_1 \parallel YZ$. Chứng minh tương tự, ta có $C_1A_1 \parallel ZX$, $A_1B_1 \parallel XY$.
Đến đây, áp dụng **bài toán 2** cho tam giác $ABC$ với hai điểm $P, R$ suy ra $(XYZ)$ tiếp xúc $(O)$. □



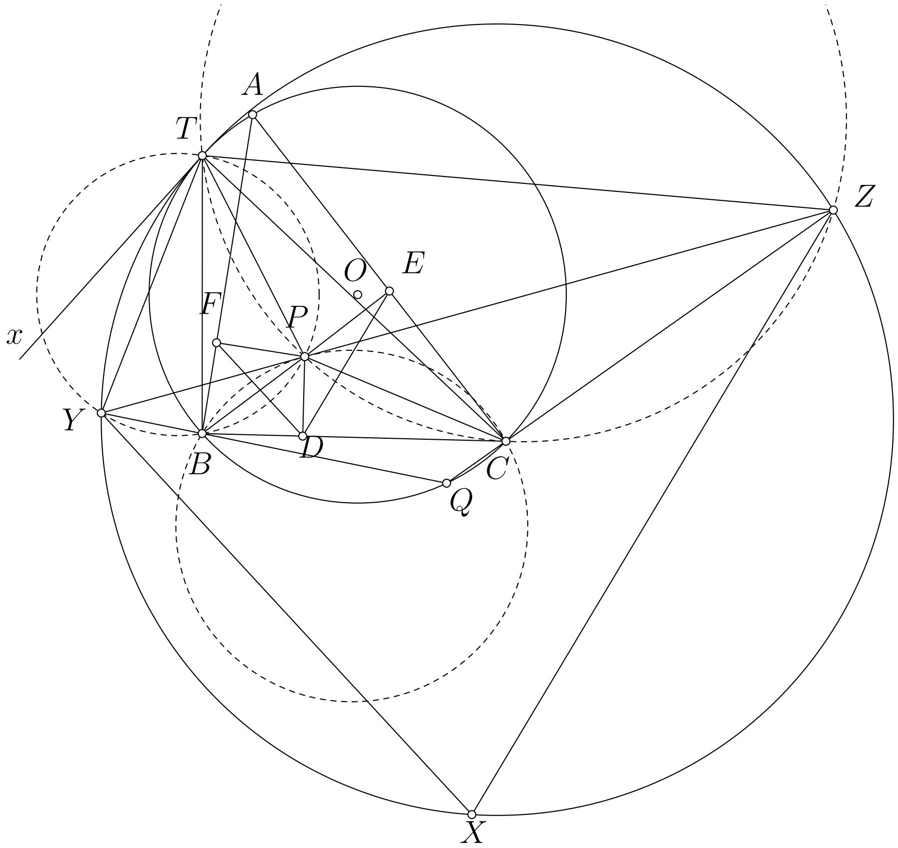

**Nhận xét.** Ý tưởng chứng minh bài toán 3 là đưa về mô hình bài toán 2 thông qua bổ đề 2. Như vậy, việc chứng minh bài toán 2 đã mang tính tổng quát. Cuối cùng là bài toán tổng quát của anh **Phan Quang Trí**.

**Bài toán 4.** Cho tam giác $ABC$ và điểm $K$ bất kì nằm trên đường tròn $(O)$ ngoại tiếp tam giác $ABC$. $P, Q$ là hai điểm liên hợp đẳng giác đối với tam giác $ABC$. Một đường thẳng bất kì đi qua $P$ lần lượt cắt $KA, KB, KC$ lần lượt tại $A', B', C'$. Chứng minh rằng góc giữa đường tròn ngoại tiếp của tam giác tạo bởi các đường thẳng qua $A', B', C'$ lần lượt vuông góc với $QA, QB, QC$ và đường tròn $(O)$ bằng với góc giữa đường tròn $Pedal$ của $P$ đối với tam giác $ABC$ và đường tròn $Euler$ của tam giác $ABC$.

Lời giải bài toán này xin dành cho bạn đọc. Chúng ta tiếp tục đi đến một số bài toán có cấu hình khá tương tự với các bài toán trên.

## 3. Một số kết quả liên quan

**Bài toán 5** (InMC tháng 8/2020)**.** Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$. $P$ là điểm bất kì nằm trong mặt phẳng và không thuộc $(O)$, $Q$ nằm trên $(O)$. Gọi $D, E, F$ lần lượt là hình chiếu của $P$ lên $BC, CA, AB$. Tiếp tuyến tại $P$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác $PBC$ lần lượt cắt $QB, QC$ tại $Y, Z$. Đường thẳng qua $Y, Z$ lần lượt song song với $DF, DE$ cắt nhau tại $X$. Chứng minh rằng $(O)$ tiếp xúc với $(XYZ)$.




*Lời giải.* Gọi $T$ là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác $PBY$ và đường tròn ngoại tiếp tam giác $PCZ$.

Ta có $(TB, TC) \equiv (TB, TP) + (TP, TC) \equiv (YB, YP) + (ZP, ZC) \equiv (YQ, YZ) + (ZY, ZQ) \equiv (QY, QZ) \equiv (AB, AC)\ (mod \pi)$.

Suy ra bốn điểm $A, B, C, T$ đồng viên. Sử dụng góc định hướng

$$\begin{aligned}(TY, TZ) &\equiv (TY, TP) + (TP, TZ) \equiv (BY, BP) + (CP, CZ)\\ &\equiv (BQ, BP) + (CP, CQ)\\ &\equiv (BQ, BC) + (BC, BP) + (CP, CB) + (CB, CQ)\\ &\equiv (QB, QC) + (PC, PB) \equiv (AB, AC) + (PC, PB) (mod \pi)\end{aligned}$$

Vì $PE \perp CA$, $PF \perp AB$ nên $(AB, AC) \equiv (AF, AE) \equiv (PF, PE)\ (mod \pi)$.

Do đó $(TY, TZ) \equiv (AB, AC) + (PC, PB) \equiv (PF, PE) + (PC, PB) \equiv (PF, PB) + (PB, PE) + (PC, PB) \equiv (DF, DB) + (PC, PE) \equiv (DF, DB) + (DC, DE) \equiv (DF, DE)$ $(mod \pi)$.

Vì $XY \parallel DF$, $XZ \parallel DE$ nên $(DF, DE) \equiv (XY, XZ)\ (mod \pi)$. Suy ra $(TY, TZ) \equiv (DF, DE) \equiv (XY, XZ)\ (mod \pi)$. Vì vậy bốn điểm $X, Y, Z, T$ đồng viên.

Do $YZ$ tiếp xúc với $(PBC)$ tại $P$ nên ta có

$$\begin{aligned}(TY, TB) &\equiv (PY, PB) \equiv (CP, CB) \equiv (CP, CT) + (CT, CB)\\ &\equiv (ZP, ZT) + (CT, CB) \equiv (ZY, ZT) + (CT, CB) (mod \pi)\end{aligned}$$

Từ đó nếu kẻ tiếp tuyến $Tx$ của đường tròn $(O)$ thì $(Tx, TY) \equiv (Tx, TB) + (TB, TY) \equiv (CT, CB) + (ZT, ZY) + (CB, CT) \equiv (ZT, ZY)\ (mod \pi)$. Nên $Tx$ cũng là tiếp tuyến của

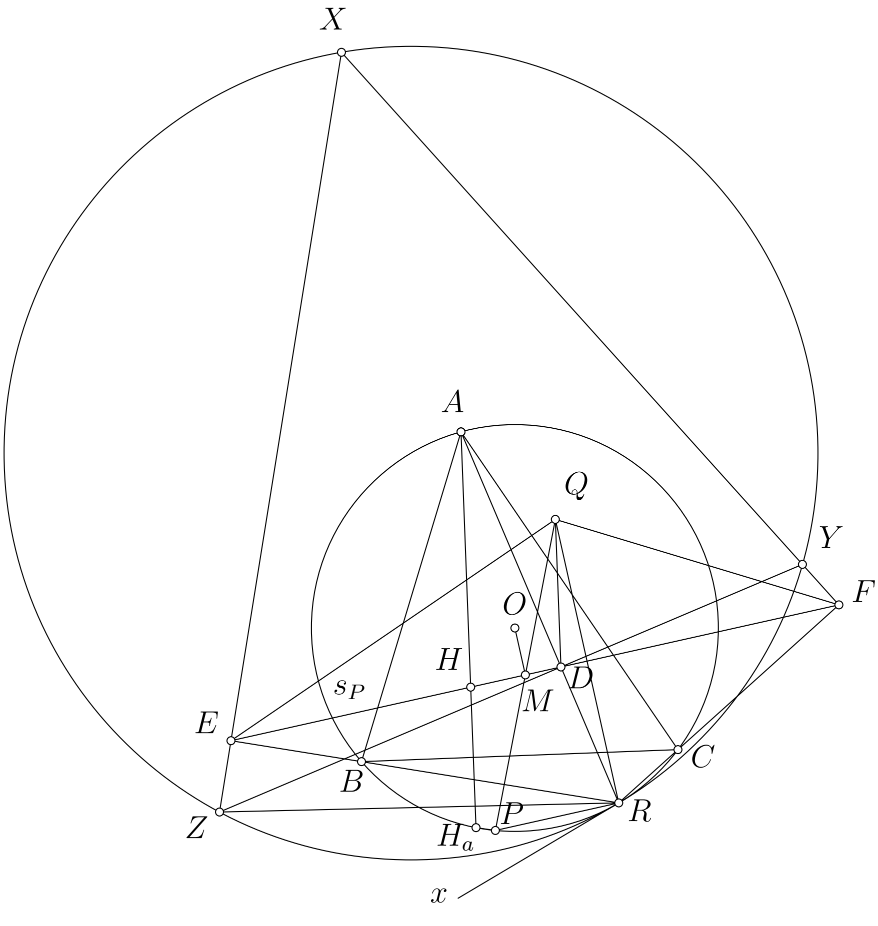
đường tròn $(XYZ)$.
Vậy đường tròn $(O)$ tiếp xúc với $(XYZ)$. □

**Nhận xét.** Bài toán được tác giả thu được sau khi nghịch đảo và biến đổi từ bài toán sau: *Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$; $E, F$ lần lượt nằm trên $CA, AB$. $P$ là điểm bất kì trên $EF$. Một đường tròn đi qua $P$ và tiếp xúc với $BC$ lần lượt cắt $(BPF)$, $(CPE)$ tại các điểm thứ hai là $X, Y$. Gọi $Z$ là giao điểm của $BX$ và $CY$. Chứng minh rằng $(O)$ tiếp xúc với $(XYZ)$.*
Kết quả thu được khá thú vị khi nó là một hệ quả từ **bài toán 3**, khi ta đặc biệt hóa đường thẳng đi qua $P$ thành tiếp tuyến tại $P$ của $(PBC)$.

Bạn đọc hãy thử sức với bài toán trước khi nghịch đảo xem như bài tập.

Cuối cùng là bài toán được tham khảo từ tác giả **Lê Viết Ân** (*GV Thực hành sư phạm TPHCM*).

**Bài toán 6.** Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$ và $P$ là một điểm trên $(O)$. Gọi $s_P$ là đường thẳng *Steiner* của $P$ đối với tam giác $ABC$. Kẻ $OM$ vuông góc với $s_P$ tại $M$. $Q$ là điểm đối xứng với $P$ qua $M$. Đường thẳng qua $Q$ và vuông góc với $BC, CA, AB$ lần lượt cắt $s_P$ tại $D, E, F$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi các đường thẳng qua $D, E, F$ và vuông góc với $AD, BE, CF$ tiếp xúc với $(O)$.




*Lời giải. (Dựa theo ý tưởng của Telv Cohl)* Giả sử tam giác $XYZ$ là tam giác được tạo bởi các đường thẳng qua $D, E, F$ và lần lượt vuông góc với $AD, BE, CF$ như hình vẽ.

Gọi $R$ là điểm đối xứng với $Q$ qua $s_P$. Khi đó, vì $Q$ là điểm đối xứng với $P$ qua $M$ và $OM \perp s_P$ nên $R$ nằm trên $(O)$ và $PR \parallel s_P$.
Gọi $H$ là trực tâm của tam giác $ABC$, $H_a$ là giao điểm thứ hai của $AH$ và $(O)$. Dễ thấy $H \in s_P$ và $H_a$ là điểm đối xứng với $H$ qua $BC$. Sử dụng góc định hướng

$$\begin{aligned}
(RP, RD) &\equiv (DF, DR)(mod\pi) && (\text{vì } PR \parallel s_P)\\
&\equiv (DQ, DF)(mod\pi) && (\text{vì } R \text{ đối xứng với } Q \text{ qua } s_P)\\
&\equiv (HA, HF)(mod\pi) && (\text{vì } AH \parallel QD \perp BC)\\
&\equiv (H_aP, H_aA)(mod\pi) &&\\
&\equiv (RP, RA)(mod\pi) && (\text{vì bốn điểm } A, H_a, P, R \text{ đồng viên})
\end{aligned}$$

Suy ra ba điểm $A, D, R$ thẳng hàng. Chứng minh tương tự, ta có ba điểm $B, E, R$ thẳng hàng; ba điểm $C, F, R$ thẳng hàng.
Vì $R$ nằm trên các đường tròn $(XEF), (YFD), (ZDE)$ nên $R$ là điểm $Miquel$ của tứ giác toàn phần $XEDY.FZ$. Do đó $R \in (XYZ)$.
Kẻ tiếp tuyến $Rx$ của đường tròn $(XYZ)$. Ta có $(RA, Rx) \equiv (RD, RZ) + (RZ, Rx) \equiv (ED, EZ) + (YZ, YR) \equiv (CA, s_P) + (s_P, CR) \equiv (CA, CR)\ (mod\pi)$. Vì vậy $Rx$ là tiếp tuyến tại $R$ của $(O)$. Vậy $(XYZ)$ tiếp xúc với $(O)$ tại $R$. □

**Nhận xét.** Đây là bài toán hay và đẹp. Bạn đọc có thể tham khảo một số mở rộng của nó ở [2].

Các bài toán về đường tròn tiếp xúc luôn đẹp và gây ấn tượng cho người đọc. Thông qua bài viết này, ngoài việc giới thiệu đến bạn đọc một số bài toán về chủ đề tiếp xúc, tác giả hi vọng bạn đọc có thể lấy đó làm cảm hứng để sáng tạo ra những bài toán cho riêng mình thông qua những phương pháp thông dụng như dùng phép nghịch đảo, tổng quát hóa, đặc biệt hóa,... Đây còn là một trong những phương pháp để học tốt phân môn hình học và những phân môn khác trong toán học.

## Tài liệu

[1] AoPS, topic: *Intermadiately property of McCay Cubic*, https://artofproblemsolving.com/community/c6h533078p3050627

[2] AoPS, topic: *Tangent 4*, https://artofproblemsolving.com/community/c6h1140203p5350419

# MỘT ỨNG DỤNG CỦA TAM GIÁC FUHRMANN

Trần Quang Hùng, Hà Nội

TÓM TẮT

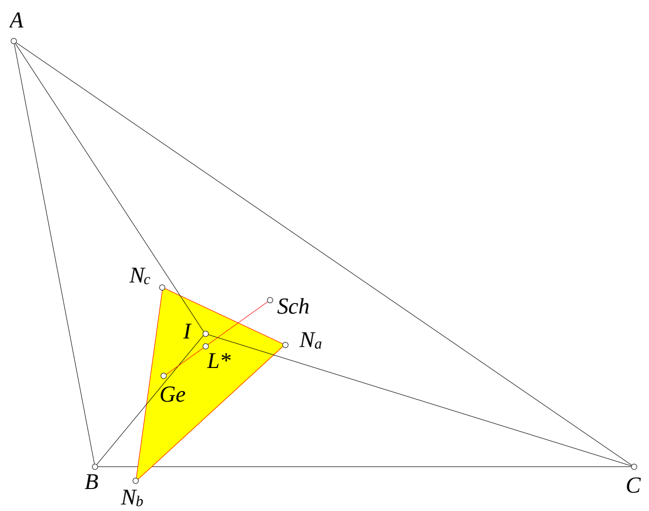
Bài viết này ứng dụng tam giác Fuhrmann vào giải một kết quả hình học đẹp do chính tác giả tìm ra.

## 1. Mở đầu

Nếu tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$. Các phân giác góc $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ cắt lại $(O)$ tại $A'$, $B'$, $C'$. Gọi $F_a$, $F_b$, $F_c$ lần lượt là đối xứng của $A'$, $B'$, $C'$ theo thứ tự qua các đường thẳng $BC$, $CA$, $AB$ thì tam giác $F_aF_bF_c$ gọi là tam giác Fuhrmann của tam giác $ABC$ xem [1]. Trong [1] cũng liệt kê nhiều tính chất quan trọng của tam giác Fuhrmann, đây là các kết quả đẹp có nhiều ứng dụng. Tuy nhiên trong [1] chưa đề cập đến điểm Lemoine của tam giác Fuhrmann. Trong bài viết này, tác giả sẽ sử dụng điểm Lemoine của Fuhrmann để giải một định lý khá thú vị mà chính tác giả bài viết này đề xuất.

Trong quá trình tìm hiểu về tâm đường tròn Euler của các tam giác tạo bởi tâm nội tiếp và các đỉnh của tam giác gốc. Tác giả bài viết đã tìm ra định lý sau

**Định lý 1.** Cho tam giác $ABC$ có tâm đường tròn nội tiếp là $I$. Gọi $N_a$, $N_b$, $N_c$ là tâm đường tròn Euler của các tam giác $IBC$, $ICA$, $IAB$. Gọi $L^*$ là điểm Lemoine của tam giác $N_aN_bN_c$. Gọi $Ge$ và $Sch$ là điểm Gergonne và điểm Schiffer của tam giác $ABC$. Khi đó ba điểm $L^*$, $Ge$, $Sch$ thẳng hàng.



**Chú ý.** Nếu đường tròn nội tiếp $(I)$ tiếp xúc với ba cạnh tam giác $ABC$ tại $D$, $E$, $F$ thì $AD$, $BE$, $CF$ đồng quy tại điểm Gergonne $Ge$ của tam giác $ABC$. Các đường thẳng Euler của các tam giác $IBC$, $ICA$, $IAB$ đồng quy tại điểm Schiffer $Sch$ của tam giác $ABC$.

Định lý 1 sẽ được chứng minh ở phần tiếp theo. Ở trong chứng minh này, tác giả sẽ sử dụng một số biến đổi trên tâm tỷ cự. Cách ký hiệu tâm tỷ cự được tác giả tham khảo trong [2]. Tuy nhiên việc áp dụng cách ký hiệu này vào thực hành giải toán hình học sơ cấp là phương pháp mà tác giả đã tự viết ra và lần đầu tiên thực hành giảng dạy cũng như giới thiệu với các giáo viên chuyên toán của Việt Nam ở Đà Lạt vào năm 2012, xem [4]. Tác giả cũng đã giảng dạy phương pháp biến đổi này cho các khóa học sinh chuyên toán KHTN từ năm 2011 đến năm 2016.

## 2. Chứng minh Định lý 1

Các dữ liệu trong phần này như tọa độ tỷ cự của các đỉnh tam giác Fuhrmann, tỷ lệ cạnh của tam giác Fuhrmann chúng tôi tham khảo [1]. Còn dữ liệu về tọa độ tỷ cự của điểm Gergonne và điểm Schiffer chúng tôi tham khảo [3].

*Chứng minh Định lý 1.* Theo tính chất quen thuộc của tâm đường tròn Euler thì $N_aN_bN_c$ chính là vị tự của tam giác Fuhrmann $F_aF_bF_c$ với tâm $I$ tỷ số $\frac{1}{2}$. Từ đó điểm Lemoine $L^*$ của tam giác $N_aN_bN_c$ là trung điểm của $IL$ trong đó $L$ là điểm Lemoine của $F_aF_bF_c$. Tọa độ tỷ cự của các đỉnh tam giác Fuhrmann là

$$F_a = \left(a^2, -a^2 + c^2 + bc, -a^2 + b^2 + bc\right),$$
$$F_b = \left(-b^2 + c^2 + ac, b^2, a^2 - b^2 + ac\right),$$
$$F_c = \left(b^2 - c^2 + ab, a^2 - c^2 + ab, c^2\right).$$

Các cạnh tam giác Fuhrmann có tỷ lệ như sau

$$(f_a, f_b, f_c) \sim \left(\sqrt{a(p-a)}, \sqrt{b(p-b)}, \sqrt{c(p-c)}\right).$$

Từ đó điểm Lemoine $L$ của tam giác Fuhrmann có tọa độ tỷ cự thuần nhất là

$$L = \frac{f_a^2 \cdot F_a + f_b^2 \cdot F_b + f_c^2 \cdot F_c}{f_a^2 + f_b^2 + f_c^2}$$
$$= \left(\frac{-a^3 + b^3 + c^3 - b^2c - c^2b - 2abc}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca)}, \ldots, \ldots\right).$$

Tâm nội tiếp $I$ của tam giác $ABC$ có tọa độ tỷ cự thuần nhất là

$$I = \left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}\right).$$

Vậy trung điểm $L^*$ của $IL$ có tọa độ tỷ cự là

$$L^* = \frac{I+L}{2} \sim (b^3 + c^3 + a(b^2 + c^2) - (2a^2 + bc)(b + c) - 4abc, \ldots, \ldots).$$

Điểm Gergonne có tọa độ tỷ cự

$$Ge\left(\frac{1}{b+c-a}, \frac{1}{c+a-b}, \frac{1}{a+b-c}\right)$$

và điểm Schiffler có tọa độ tỷ cự là

$$Sch\left(\frac{a}{-b^3-c^3+(a^2+bc)(b+c)}, \frac{b}{-c^3-a^3+(b^2+ca)(c+a)}, \frac{c}{-a^3-b^3+(c^2+ab)(a+b)}\right).$$

Từ đó dễ thấy,

$$\det\begin{pmatrix} Ge \\ Sch \\ L^* \end{pmatrix} = 0$$

hay $L^*$, $Ge$, $Sch$ thẳng hàng. Chúng tôi kết thúc chứng minh. □

# 3. Lời kết

Bài toán này là một bài toán có phát biểu khá thách thức với các học sinh giỏi toán hình học sơ cấp, tuy nhiên việc sử dụng hệ tọa độ tỷ cự đã giúp cho việc giải bài toán trên trở nên nhanh chóng. Đây là một kết quả đẹp, có ý nghĩa, khi mà các bài toán liên quan đến điểm Lemoine của tam giác Fuhrmann còn khá hạn chế, như chúng tôi đã đề cập, điểm Lemoine của tam giác Fuhrmann không được liệt kê trong [1].

Trong thời gian gần đây có một trào lưu xoáy quanh khai thác một bài toán hình học cụ thể. Do vậy bài viết mới này tôi thử xin giới thiệu một kết quả đẹp và mới (với những cái đã biết trong hình học sơ cấp) chứ không bắt nguồn từ bài toán cụ thể nào.

Ở bài viết đầu tiên trong năm mới, tác giả cũng có nhiều suy nghĩ, trăn trở về những bài toán hình học sơ cấp, đặc biệt xuất hiện ở Việt Nam gần đây. Tuy nhiên những suy nghĩ bộn bề đó nhanh chóng được thế chỗ bởi những bài toán hình học đẹp mà một người học trò cũ của tác giả khóa K48 chuyên KHTN đã giúp tác giả biên tập. Người đã luôn đồng hành, giúp đỡ tác giả một cách âm thầm và miệt mài nhất trong những năm tác giả dạy khóa K48 ở chuyên KHTN. Đặc biệt trong năm đó, chuyên đề biến đổi tâm tỷ cự đã được tác giả sử dụng một cách sâu sắc nhất và ở một tầm mới. Sau đó trở đi, tác giả hầu như đã không dạy chuyên đề này cho các học sinh chuyên toán vì những gì đẹp nhất, tác giả đã gửi gắm vào năm cuối cùng đó. Tác giả xin cảm ơn em **Nguyễn Ngọc Chi Lan**, người học trò cũ cần mẫn và âm thầm, người đã giúp tác giả nhiệt tình trong những năm tác giả miệt mài tìm những bài toán mới ở thời điểm đó.

# Tài liệu

[1] Weisstein, Eric W. "Fuhrmann Triangle." From MathWorld–A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/FuhrmannTriangle.html.

[2] P. Yiu, *Introduction to the Geometry of the Triangle*, Florida Atlantic University Lecture Notes, 2001; with corrections, 2013, available at http://math.fau.edu/Yiu/Geometry.html.

[3] C. Kimberling, Encyclopedia of Triangle Centers, http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.

[4] Bộ giáo dục, *Tài liệu bồi dưỡng giáo viên chuyên Toán THPT*, trường hè, Đà Lạt năm 2012.

# CÂU CHUYỆN XUNG QUANH MỘT SỐ TỔNG VÔ HẠN

Trần Nam Dũng
Trường Đại học KHTN ĐHQG Thành phố Hồ Chí Minh

Ta bắt đầu từ bài toán sau

Bài toán 1. *Ký hiệu $\varphi(n)$ là số các số nguyên dương nhỏ hơn hay bằng $n$ và nguyên tố cùng nhau với $n$. Chứng minh rằng ta có đẳng thức*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^4} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}}.$$

Thoạt nhìn ta không có định hướng gì để chứng minh đẳng thức kỳ lạ này. Vế phải không xuất hiện hàm $\varphi$ còn vế trái lại có. Làm thế nào để xử lý?

Lời giải 1. (Nguyễn Mạc Nam Trung) Sử dụng đồng nhất thức

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \prod_{p \in P} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} \right) = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - p^{-k}},$$

trong đó tích được tính trên tập hợp $P$ tất cả các số nguyên tố. Đồng nhất thức này được suy ra từ định lý cơ bản của số học và sự kiện quen thuộc

$$\frac{1}{1 - p^{-k}} = 1 + \frac{1}{p^k} + \frac{1}{p^{2k}} + \cdots$$

Chú ý là khi ta khai triển tích

$$\prod_{p \in P} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} \right),$$

sẽ được các số hạng có dạng

$$\frac{1}{p_1^{k \cdot k_1} \cdot p_2^{k \cdot k_2} \cdots p_s^{k \cdot k_s}}$$

và như thế sẽ thu được tổng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}.$$

Áp dụng điều này, ta có

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}} = \prod_{p\in P}(1-p^{-4})\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{p^{3i}} = \prod_{p\in P}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{p^{3i}} - \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{p^{3i+4}}\right) = \prod_{p\in P}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p^{3i}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right).$$

Bây giờ lại sử dụng ý tưởng của Euler và khai triển tích

$$\prod_{p\in P}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p^{3i}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right),$$

ta sẽ được các số hạng có dạng

$$\prod_{i=1}^{s}\frac{1}{p_i^{3k_i}}\left(1-\frac{1}{p_i}\right) = \prod_{i=1}^{s}\frac{p^{k_i}}{p_i^{4k_i}}\left(1-\frac{1}{p_i}\right) = \frac{\varphi(n)}{n^4},$$

với $n = p_1^{k_1}\cdots p_s^{k_s}$. Và như thế

$$\prod_{p\in P}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p^{3i}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^4}.$$

Phép chứng minh kết thúc. □

Lời giải 2. (Lê Phúc Lữ) Đặt $f(n) = \frac{1}{n^4}$, thì $f(n)$ là hàm nhân tính và điều cần chứng minh có thể viết lại thành

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot f(n).$$

Rõ ràng "*hệ số*" của $f(n)$ ở vế phải là $n$. Ta xét hệ số của $f(n)$ ở vế trái, tức là trong tích

$$(f(1)+f(2)+f(3)+\cdots)(\varphi(1)f(1)+\varphi(2)f(2)+\varphi(3)f(3)+\cdots)$$

Cố định số nguyên dương $n$ nào đó, nếu như $d$ không là ước của $n$ thì rõ ràng với mọi $k$ nguyên dương thì $n \neq kd$ nên $f(n) \neq f(k)f(d)$. Suy ra hệ số của $f(n)$ trong vế trái được đóng góp bởi các $f(d)$ mà $d \mid n$. Lại xét một ước số $d$ của $n$, ta có

$$f(d)f\left(\frac{n}{d}\right) = f(n),$$

nên số hạng chứa $f(n)$ của vế trái chính là

$$\sum_{d\mid n} f(d)\cdot\varphi\left(\frac{n}{d}\right)f\left(\frac{n}{d}\right) = f(n)\sum_{d\mid n}\varphi(d).$$

Cuối cùng, ta chứng minh thêm đẳng thức

$$\sum_{d\mid n}\varphi(d) = n,$$

nữa thì bài toán kết thúc.

Thật vậy $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ sẽ được phân hoạch thành các tập con có ước chung lớn nhất với $n$ đúng bằng $d$ với $d \mid n$, và mỗi nhóm như thế có số phần tử bằng $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$, nên suy ra

$$n = \sum_{d \mid n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d \mid n} \varphi(d).$$

Bài toán kết thúc. □

Lời giải tiếp theo còn thú vị hơn nữa, vì không đi chi tiết vào công thức tính $\varphi(n)$, mà chỉ dựa vào định nghĩa của $\varphi(n)$. Lời giải này được rút từ lời giải một bài toán của cuộc thi AMTS (cuộc thi tìm kiếm tài năng toán học Mỹ).

Lời giải 3. Vì $\varphi(n)$ là số các số nguyên dương nhỏ hơn hay bằng $n$ và nguyên tố cùng nhau với $n$ nên

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^4},$$

chính là tổng của $\frac{1}{s^4}$ qua tất cả các cặp $(r, s)$ với $r \leqslant s$ và $(r, s) = 1$. Còn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

chính là tổng của $\frac{1}{n^4}$ qua tất cả các cặp $(a, n)$ mà $1 \leqslant a \leqslant n$.

Mỗi cặp $(a, n)$ mà $1 \leqslant a \leqslant n$ đều biểu diễn được duy nhất dưới dạng $(kr, ks)$ với $r \leqslant s$, và $(r, s) = 1$ và $k$ nguyên dương. Do đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{a=1}^{n} \frac{1}{n^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{(r,s)} \frac{1}{(ks)^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \sum_{(r,s)} \frac{1}{s^4} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}\right)\left(\sum_{(r,s)} \frac{1}{s^4}\right).$$

Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh. □

Sau khi giải quyết xong bài toán, tự dưng ta đặt câu hỏi. Tổng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^4},$$

có thể tính qua được hai tổng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Vậy hai tổng này có tính được không? Sử dụng Maple, ta sẽ rất ngạc nhiên khi biết được là

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

còn

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^3},$$

thì không có đáp số cụ thể mà chỉ cho đáp số là $\zeta(3)$. Thực ra, nếu ta dùng lệnh `evalf(%)` thì sẽ cho ta kết quả 1.202056903. Nhưng ta biết rằng, với dân toán 1.202056903 không thể "*đẹp*" bằng $\frac{\pi^4}{90}$.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh đẳng thức đẹp đẽ này

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Để chứng minh đẳng thức này, ta sẽ dùng đến một công thức hơi cao cấp một chút, gọi là công thức Taylor. Cái này có thể nói là kết quả sơ cấp nhất trong cao cấp (ở chương trình một số nước như Singapore, AP Calculus, ... thì nằm ở bậc phổ thông). Cụ thể thì nếu hàm số $f(x)$ khả vi vô hạn lần tại 0 thì ta sẽ có công thức

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + O\left(x^n\right).$$

Với hàm $f(x) = \sin x$, ta có được khai triển sau

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{x!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Bây giờ ta sẽ sử dụng lý luận rất độc đáo của Euler sau đây.

Vì $\frac{\sin x}{x}$ có nghiệm là $\pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi, \ldots$ và có hệ số tự do bằng 1 nên ta có

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\cdots = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Chú ý là

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

nên so sánh hệ số của $x^2$ ở hai vế, ta thu được

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - \cdots$$

Từ đó suy ra

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Bằng cách so sánh hệ số của $x^4$ ở hai vế, ta thu được

$$\sum_{m<n} \frac{1}{m^2 n^2} = \frac{\pi^4}{120}.$$

Từ đó mà

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^2-2\sum_{m<n}\frac{1}{m^2n^2}=\frac{\pi^4}{36}-\frac{\pi^4}{60}=\frac{\pi^4}{90}.$$

Chứng minh hoàn tất.

Bằng cách làm tiếp như thế, ta có thể tính được các tổng tiếp theo, ví dụ như

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}.$$

Một cách tổng quát chúng ta tìm được

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=\frac{(-1)^{k+1}B_{2k}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!},$$

với $B_{2k}$ là số Bernoulli thứ $2k$.

Các tổng

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k},$$

với $k$ nguyên dương chính là trường hợp đặc biệt của hàm $\zeta$ mang tên Euler-Riemann

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},$$

một hàm biến số phức. Chuỗi này hội tụ nếu $\mathrm{Re}(s)>1$ nhưng những điểm thú vị nhất lại nằm ở miền $\mathrm{Re}(s)\leqslant 1$. Chẳng hạn $\zeta(-1)=-\frac{1}{12}$ (Ramanujan), $\zeta(0)=-\frac{1}{2}$, $\zeta(-2)=0$.

Giả thiết Riemann, một trong những giả thuyết nổi tiếng nhất đương đại nói rằng mọi không điểm không tầm thường của hàm $\zeta$ đều nằm trên đường thẳng $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$.

Công thức mà chúng ta đã sử dụng ở *lời giải* 1 được gọi là công thức tích Euler

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p}\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right),$$

trong đó tích tính trên tập hợp tất cả các số nguyên tố.

Dưới đây ta sẽ nghiên cứu một chút về $\zeta(1)$, tức là tổng

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Sự kiện tổng này phân kỳ thì rõ rồi, và có thể chứng minh rất sơ cấp nhờ vào đánh giá sau

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geqslant\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Từ đó $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$ với mọi $n$. Suy ra $S_{2^k} \geqslant 1 + \frac{k}{2}$ với mọi $k$, suy ra chuỗi phân kỳ. Ở đây như thường lệ ta đặt

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

là tổng riêng của chuỗi.

Ta có thể đánh giá kỹ hơn về tổng này bằng cách áp dụng định lý Lagrange cho hàm $f(x) = \ln x$ trên đoạn $[n,\ n+1]$. Ta sẽ có

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \frac{1}{c}, \quad c \in (n, n+1).$$

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}.$$

Cho $n$ chạy từ 1 đến $N$ rồi cộng tại, ta có

$$S_{N+1} - 1 < \ln(N+1) < S_N.$$

Từ đó suy ra $S_N > \ln(N+1)$, suy ra chuỗi phân kỳ.

Cũng từ bất đẳng thức trên, ta suy ra (với $N > 1$)

$$0 < S_N - \ln N < 1,$$

hơn nữa

$$S_N - \ln N - (S_{N+1} - \ln(N+1)) = \ln(N+1) - \ln N - \frac{1}{N+1} > 0.$$

Từ đây dãy $S_N - \ln N$ giảm và bị chặn dưới bởi 0. Do đó dãy có giới hạn, giới hạn này được gọi là hằng số Euler-Mascheroni và ký hiệu là $\theta$ hoặc $C$. Ta chứng minh được $C$ là số vô tỷ và tính được gần đúng $C \approx 0.577215664901532$ (thêm nữa cũng được nhưng không cần thiết).

Như vậy ta có công thức $S_N = \ln N + C + O(1)$, trong đó $O(1)$ ký hiệu đại được vô cùng nhỏ so với 1 khi $n$ dần đến vô cùng.

Sử dụng công thức này và công thức tích Euler cho $s = 1$, ta sẽ chứng minh được một kết quả đẹp đẽ là *tổng nghịch đảo của các số nguyên tố là phân kỳ.*

Bài toán 2 (Việt Nam TST 1998). *Cho số nguyên dương $m > 3$. Giả sử $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_k$ là tất cả các số nguyên tố không vượt quá $m$. Chứng minh rằng*

$$\sum_{i=1}^{k} \left( \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} \right) > \ln(\ln m).$$

Lời giải. Xét tích

$$\prod_{i=1}^{k} \left( 1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \cdots \right).$$

Khi khai triển tích này ra, ta sẽ được các phân số có dạng $\frac{1}{p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}}$ với $\alpha_i$ là các số nguyên không âm. Vì $p_1,\ p_2,\ldots,\ p_k$ là tất cả các số nguyên tố không vượt quá $m$ nên trong các phân số có dạng nói trên có tất cả các phân số dạng $\frac{1}{k}$ với $k \leqslant m$. Từ đó ta có

$$\prod_{i=1}^{k}\left(1+\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_i^2}+\cdots\right) > \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}.$$

Lấy logarit tự nhiên của hai vế, chú ý rằng

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} = S_m > \ln m,$$

và

$$1+\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_i^2}+\cdots = 1+\frac{1}{p_i-1},$$

ta có

$$\sum_{i=1}^{k}\ln\left(1+\frac{1}{p_i-1}\right) > \ln(\ln m).$$

Để kết thúc phép chứng minh, ta chỉ cần chỉ ra

$$\ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right) < \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}, \quad \forall x > 2.$$

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right).$$

Ta có

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x} = \frac{2-x}{(x-1)x^3}.$$

Vậy $f'(x) < 0$ với mọi $x > 2$, nên $f$ là hàm giảm trên $(2,+\infty)$. Do đó

$$f(x) > \lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$

với mọi $x > 2$. □

Với lời giải bài toán trên, bản chất ta đã chứng minh được các định lý sau:

Định lý 1. *Ta có*

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p} = \ln(\ln x) + O(1).$$

Định lý 2 (Mertens). *Ta có*

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \Theta\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

Quay lại với hàm $\varphi(n)$. Ở trên ta đã sử dụng hai công thức liên quan đến $\varphi(n)$, đó là công thức tính $\varphi(n)$ và công thức

$$\sum_{d\,|\,n} \varphi(d) = n.$$

Công thức thứ hai (đây là kết quả được tìm ra bởi Gauss) đã được chứng minh bằng một phương pháp rất đẹp ở trên, ta bàn thêm ở đây về công thức tính $\varphi(n)$ và một số hệ quả của nó.

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Cách truyền thống để chứng minh công thức này là chứng minh $\varphi$ là hàm nhân tính số học, tức là $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ với mọi $m$, $n$ nguyên tố cùng nhau. Sau đó thì sử dụng một công thức khá hiển nhiên: $\varphi(pk) = p^k - p^{k-1}$ với $p$ là số nguyên tố và $k$ là số nguyên dương. Đến đây chỉ cần sử dụng định lý cơ bản của số học nữa là xong.

Bỏ qua các chứng minh này, thay vào đó nêu ra một cách chứng minh tổ hợp cho nó. Gọi $p_1, p_2, \ldots, p_k$ là các ước nguyên tố của $n$, gọi $A(i)$ là tập các số nguyên dương nhỏ hơn hay bằng $n$ và chia hết cho $p_i$ khi đó thì

$$\varphi(n) = n - \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right|.$$

Sử dụng công thức bao hàm và loại trừ, ta có

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<t} |A_i \cap A_j \cap A_t| + \cdots$$

Nhưng rõ ràng

$$|A_i| = \frac{n}{p_i},\ |A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, \ldots$$

nên từ đây ta suy ra

$$\varphi(n) = n - \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i} + \sum_{i<j} \frac{n}{p_i p_j} - \sum_{i<j<t} \frac{n}{p_i p_j p_t} + \cdots = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Công thức đã được chứng minh.

Điều thú vị là công thức này lại gần như là tương đương với hệ thức

$$\sum_{d\,|\,n} \varphi(d) = n.$$

Ta sẽ giải thích rõ ở phần sau đây.

Cho $f$ là một hàm số học, tức là hàm xác định trên tập hợp các số nguyên dương (và nhận giá trị trong $C$). Khi đó ta có thể định nghĩa hàm tổng theo các ước của f như sau

$$F(n) = \sum_{d\,|\,n} f(d).$$

Ví dụ nếu $f(n) = 1$ thì ta được $F(n) = \tau(n)$ - số các ước số của $n$, còn nếu $f(n) = n$ thì ta được $F(n) = \sigma(n)$ - tổng các ước số của $n$.

Với hai hàm số $f$ và $g$, ta định nghĩa tích Dirichlet của hai hàm $f$ và $g$ như sau

$$f * g(n) = \sum_{d \mid n} f(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Ta cũng xét một số hàm số học đặc biệt như sau:

- Hàm $\iota(n)$ là hàm bằng 1 với mọi n nguyên dương.
- Hàm $I(n)$ là hàm bằng 1 với $n = 1$ và bằng 0 với mọi $n > 1$.
- Hàm $\mu(n)$, gọi là hàm Mobius, là hàm bằng 1 nếu $n = 1$, bằng 0 nếu $n$ có một ước chính phương ($> 1$) và bằng $(-1)^r$ nếu $n$ là tích của $r$ số nguyên tố phân biệt.

Ý nghĩa của các hàm đặc biệt này như sau:

$$f * 1 = 1 * f = F, \ I * f = f * I = f.$$

Như vậy phép tổng theo các ước chính là phép nhân Dirichlet với 1. Còn $I$ chính là phần tử đơn vị đối với phép nhân Dirichlet. Ta có thể chứng minh dễ dàng rằng tích Diriclet có tính giao hoán, tính kết hợp và tính phân phối đối với phép cộng. Bây giờ ta quan tâm đến sự tồn tại phần tử nghịch đảo của hàm số theo tích Dirichlet, tức là hàm số g sao cho $f * g = I$.

Trước hết ta sẽ chứng minh $\mu$ là nghịch đảo của 1. Để chứng minh điều này, ta cần chứng minh

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = 0, \quad n > 1.$$

Thật vậy, nếu $n > 1$ có các ước nguyên tố phân biệt là $p_1, \ p_2, \ldots, \ p_k$ thì trong tổng

$$\sum_{d \mid n} \mu(d),$$

đa số các số hạng sẽ bằng 0 ngoại trừ $\mu(1)$ và $\mu(d)$ với $d$ là tích của một hay vài thừa số $p_i$.

Từ đó

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = 1 - k + C_k^2 - C_k^3 + \cdots = (1-1)^k = 0.$$

Phép chứng minh hoàn tất. Như vậy $\mu * 1 = I$. Bây giờ ta sẽ dùng tính chất này để suy ra một công thức rất quan trọng

Định lý 3 (Công thức nghịch đảo Mobius). *Nếu $F = 1 * f$ thì $f = \mu * F$, nói cách khác nếu*

$$F(n) = \sum_{d \mid n} f(d) \quad \text{thì} \quad f(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right).$$

*Điều ngược lại cũng đúng, tức là nếu $f = \mu * F$ thì $F = 1 * f$.*

*Chứng minh.* Vì $F = 1 * f$ nên nhân hai vế cho $\mu$, ta được

$$\mu * F = \mu * (1 * f) = (\mu * 1) * f = I * f = f.$$

Phép chứng minh hoàn tất. □

Bây giờ ta đi tìm nghịch đảo của hàm số $f$ đối với tích Dirichlet. Cho $f$ là hàm số học với $f(1) \neq 0$. Khi đó xét hàm số $g$ được xác định (bằng truy hồi) như sau

$$g(1) = \frac{1}{f(1)}, \quad g(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{d \mid n, d<n} f\left(\frac{n}{d}\right) g(d).$$

Đặt $e = f * g$. Với $n = 1$ thì $e(1) = f(1) \cdot g(1) = 1$. Với $n > 1$ ta có

$$\begin{aligned} e(n) &= \sum_{d \mid n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = f(1)g(n) + \sum_{d \mid n, d<n} f\left(\frac{n}{d}\right) g(d) \\ &= -\sum_{d \mid n, d<n} f\left(\frac{n}{d}\right) g(d) + \sum_{d \mid n, d<n} f\left(\frac{n}{d}\right) g(d) = 0. \end{aligned}$$

Cuối cùng, ta sẽ chứng minh tính chất được đề cập ở phần dẫn nhập cho mục này bằng ngôn ngữ công thức nghịch đảo Mobius.

Trên ngôn ngữ tích Dirichlet, tính chất này được viết dưới dạng $\varphi * 1 = N$, trong đó $N$ là hàm số xác định bởi $N(n) = n$ với mọi $N$. Theo công thức nghịch đảo Mobius, điều này tương đương với $\varphi = \mu * N$. Xét $\mu * N$ là tổng

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) N\left(\frac{n}{d}\right).$$

Trong tổng này $\mu(d)$ sẽ bằng 0 khi $d$ có ước chính phương, do đó nếu $n$ có các ước nguyên tố là $p_1, p_2, \ldots, p_k$ thì $\mu(d)$ chỉ khác 0 khi $d = 1$ hoặc $d$ là ước của một số số $p_i$ từ đó thì

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) N\left(\frac{n}{d}\right) = n - \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i} + \sum_{i<j} \frac{n}{p_i p_j} - \sum_{i<j<t} \frac{n}{p_i p_j p_t} + \cdots = \varphi(n).$$

Vậy $\mu * N = \varphi$ và ta có điều phải chứng minh.

Bây giờ ta quay lại với mấy đẳng thức kỳ lạ là $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$, $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, $\zeta(-2) = 0$. Viết dưới dạng hàm $\zeta$ thì không để ý, nhưng viết lại dưới dạng tổng thì thật kỳ lạ

$$1 + 2 + 3 + \cdots = -\frac{1}{12}, \quad 1 + 1 + 1 + \cdots = -\frac{1}{2}, \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots = 0.$$

Ta lập luận như sau. Đặt

$$\begin{aligned} A &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \\ B &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots \\ C &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots \end{aligned}$$

Ta có
$$A = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - A.$$
Suy ra $A = \frac{1}{2}$. Tiếp theo
$$\begin{aligned} A + B &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots \\ &= (1 + 1) - (1 + 2) + 1 + 3 - (1 + 4) + 1 + 5 - (1 + 6) + \cdots \\ &= 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + \cdots = 1 - B. \end{aligned}$$
Suy ra $B = \frac{1}{4}$. Cuối cùng ta có
$$\begin{aligned} C - B &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots - (1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots) \\ &= (1 - 1) + (2 + 2) + (3 - 3) + (4 + 4) + (5 - 5) + (6 + 6) + \cdots \\ &= 4(1 + 2 + 3 + \cdots) = 4C. \end{aligned}$$
Suy ra $3C = -B = -\frac{1}{4}$. Suy ra $C = -\frac{1}{12}$.

Tiếp theo, đặt
$$D = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$$
thì
$$D - A = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots - (1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 2(1 + 1 + 1 + 1 + \cdots) = 2D.$$
Suy ra $D = -A = -\frac{1}{2}$.

Đây chính là các biến đổi mà Ramanujan đã sử dụng để tìm ra các tổng mà thực ra không ... tồn tại (chuỗi tương ứng không hội tụ). Nhưng các con số này đều có những ý nghĩa nhất định.

Lưu ý rằng, bằng cách biến đổi khác đi, ta có thể thu được các giá trị khác cho các tổng nói trên, hay nói mạnh hơn là gần như muốn chúng bằng mấy cũng được.

Xem nhé, ví dụ
$$\begin{aligned} B &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots = (1 - 2) + (3 - 4) + (5 - 6) + \cdots \\ &= -1 - 1 - 1 - 1 - \cdots = -D = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$
Còn nếu xét
$$B = 1 + (-2 + 3) + (-4 + 5) + (-6 + 7) + \cdots = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots = D = -\frac{1}{2}.$$
Bây giờ xét
$$\begin{aligned} E &= 12 - 22 + 32 - 42 + 52 - 62 + \cdots \\ F &= 12 + 22 + 32 + 42 + 52 + 62 + \cdots \end{aligned}$$
Thì ta có
$$E = -3 - 7 - 11 - \cdots = -4(1 + 2 + 3 + \cdots) + 1 + 1 + 1 + = -4C + D.$$
Và $F - E = (22 + 22) + (42 + 42) + \cdots = 8F$. Suy ra $F = -\frac{E}{7}$.

Ta có thể "*điều chỉnh*" cách tính để $E = 0$ và suy ra $F = 0$. Nói chung là ta đùa giỡn với các tổng vô hạn một chút.

Thực ra thì những đẳng thức như $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$, $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, $\zeta(-2) = 0$ đều có những nguồn gốc sâu xa và chặt chẽ của nó dưới góc độ hàm biến số phức (chú ý, một hàm biến phức thì không đơn trị, ví dụ $\ln(1)$ không phải chỉ bằng 0 mà bằng $(2k+1)\frac{\pi i}{2}$ với $k$ là số nguyên và $i$ là đơn vị ảo ($i^2 = -1$).

Tuy nhiên, do câu chuyện của chúng ta chỉ xoay quanh những vấn đề sơ cấp hoặc khởi đầu của cao cấp nên chúng ta sẽ không đi quá xa như vậy.

Quay trở lại với hằng số Euler-Mascheroni với định nghĩa là

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right).$$

Ngoại trừ công thức mang tính định nghĩa này, $C$ còn xuất hiện còn có nhiều công thức tính dưới dạng chuỗi có tốc độ hội tụ mạnh hơn, cho phép chúng ta tính $C$ gần đúng nhanh hơn mà không phải tính quá nhiều số hạng. Trong đó có hai công thức có dạng rất giống nhau như sau

$$C = \sum_{m=2}^{\infty}(-1)^m\frac{\zeta(m)}{m} \qquad \text{(A.M.Gliksman)},$$

$$C = 2\left(1 - \ln 2 - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\xi(2m+1)}{2m+1}\right), \quad \text{với} \quad \xi(r) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)^r} \qquad \text{(Otto Dunkel).}$$

Ta chứng minh đẳng thức đầu tiên. Đẳng thức thứ hai được chứng minh tương tự. Sử dụng công thức khai triển Taylor

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Cho $x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}$ rồi cộng lại vế theo vế, ta được

$$\ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}\right) - \cdots$$

Chú ý là

$$\ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = \ln n,$$

nên từ đây ta suy ra

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}\right)+\cdots$$

Chuyển đẳng thức trên qua giới hạn, ta được điều phải chứng minh.

Đẳng thức thứ hai được chứng minh dựa vào đẳng thức

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(2i+1)} = 2(1-\ln 2),$$

và khai triển

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2n+1)^{2k-1}}.$$

Hai đẳng thức trên, tuy nhiên không có nhiều ý nghĩa về tính toán, vì thứ nhất còn phải thông qua tính giá trị các hàm $\zeta$ và $\xi$, và quan trọng hơn tốc độ hội tụ thấp. Ta có một công thức đẹp hơn cho $C$, cũng dưới dạng chuỗi, cũng có hàm $\zeta$, nhưng có tốc độ hội tụ nhanh hơn đáng kể

$$C = \ln\frac{4}{\pi} + \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^m \frac{\zeta(m)}{2^{m-1}m}, \quad \text{(Euler)}.$$

Chứng minh công thức này, được trình bày dưới đây, được lấy từ bài viết của Jonathan Sondow năm 2005, *Double Integrals for Euler's Constant and* $\frac{4}{\pi}$ *and Analog of Hadjicostas Formula.*

Theo định nghĩa ta có

$$C = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right).$$

Áp dụng công thức khai triển $ln(1+x)$ cho $x=1$, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \ln 2.$$

Mặt khác, theo công thức tích Wallis thì

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^{n-1}} = \frac{\pi}{2}.$$

Từ đó mà

$$\prod_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\frac{\pi}{2}.$$

Suy ra

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = \ln 2 - \ln\frac{\pi}{2} = \ln\frac{4}{\pi}.$$

Từ đó

$$C - \ln\frac{4}{\pi} = 2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2m} - \ln\left(\frac{2m+1}{2m}\right)\right).$$

Một lần nữa lại sử dụng khai triển

$$\ln\left(\frac{2m+1}{2m}\right) = \frac{1}{2m} - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(2m)^n}.$$

Cho $m = 1, 2, 3, \dots$ rồi cộng lại, ta có

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2m}-\ln\left(\frac{2m+1}{2m}\right)\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n(2m)^n}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n2^n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^n}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta(n)}{n2^n}.$$

Từ đó suy ra

$$C-\ln\frac{4}{\pi}=2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta(n)}{n2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta(n)}{n2^{n-1}}.$$

Và đó chính là điều phải chứng minh.

Bây giờ lại nảy sinh ra công thức tích Wallis. Sao lại có điều kỳ lạ như vậy được nhỉ ? Tích của các phân số

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots=\frac{\pi}{2}.$$

Một cách gọn hơn, ta có

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^{n-1}}.$$

Wallis đã tìm được công thức này bằng cách nào ? Hóa ra là ông đã tìm được nó một cách tình cờ, trong khi giải một bài toán tích phân. Cụ thể là tích phân

$$I_n=\int_0^{\pi}\sin^n x\,dx.$$

Ta dễ dàng tính được $I_0 = \pi,\ I_1 = 2,\ I_2 = \frac{\pi}{2}$. Để tính $I_n$ một cách tổng quát, ta sẽ sử dụng phương pháp tích phân từng phần để tìm công thức truy hồi.

Đặt $u = \sin^{n-1}x,\ dv = \sin x\,dx$ thì $du = (n-1)\sin^{n-2}x\cos x\,dx,\ v = -\cos x$, khi đó

$$\begin{aligned}I_n&=-\sin^{n-1}x\cos x|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2x\,dx\\&=(n-1)\int_0^{\pi}\sin^{n-2}x(1-\sin^2x)dx=(n-1)(I_{n-2}-I_n).\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2},\ \forall n \geqslant 2$. Từ đó ta dễ dàng tìm được

$$I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot I_0,\qquad I_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}\cdot I_1.$$

Chia hai đẳng thức trên vế theo vế, ta được

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}=\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1}\right)\frac{I_1}{I_0}=\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1}\right)\frac{2}{\pi}.$$

Chú ý rằng $\dfrac{2n}{2n+1} = \dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} \leqslant \dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leqslant 1$ nên $\lim \dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$, do đó trong đẳng thức trên, cho $n$ dần đến vô cùng, ta thu được điều phải chứng minh.

Trong tạp chí AMM, số tháng 12 năm 2007, có đăng phép chính minh sơ cấp của Johan Wastlund cho công thức tích Wallis như sau Ta xét dãy số

$$(s_n): \quad s_1 = 1,\, s_n = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n-2}, \quad \forall n \geqslant 2.$$

Tích riêng của tích Wallis với số thừa số là số lẻ có thể viết dưới dạng

$$o_n = \frac{2^2\cdot 4^2\cdots(2n-2)^2\cdot 2n}{1\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2} = \frac{2n}{s_n^2}, \tag{1}$$

trong khi đó tích riêng đó với số thừa số là số chẵn sẽ có dạng

$$e_n = \frac{2^2\cdot 4^2\cdots(2n-2)^2}{1\cdot 3^2\cdots(2n-3)^2\cdot(2n-1)} = \frac{2n-1}{s_n^2}. \tag{2}$$

Ta quy ước $e_1 = 1$. Rõ ràng là $e_n < e_{n+1}$ và $o_n > o_{n+1}$. So sánh (1) và (2), ta suy ra $e_n < o_n$. Từ đó ta phải có

$$e_1 < e_2 < e_3 < \cdots < o_3 < o_2 < o_1,$$

vì

$$\frac{2i}{s_i^2} = o_i \geqslant o_n, \quad \frac{2i-1}{s_i^2} = e_i \leqslant e_n, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Ta suy ra

$$\frac{2i-1}{e_n} \leqslant s_i^2 \leqslant \frac{2i}{o_n}. \tag{3}$$

Sẽ tiện lợi nếu quy ước $s_0 = 0$, chú ý rằng theo định nghĩa thì (3) đúng cho cả trường hợp $i = 0$. Đặt $a_n = s_{n+1} – s_n$ thì $a_0 = 1$ và

$$a_n = s_{n+1} - s_n = s_n\left(\frac{2n+1}{2n} - 1\right) = \frac{s_n}{2n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2n-1}{2n}.$$

Sử dụng các hệ thức $a_{i+1} = \dfrac{2i+1}{2(i+1)}a_i,\; a_{j+1} = \dfrac{2i+1}{2(j+1)}a_j$, ta chứng minh được hệ thức

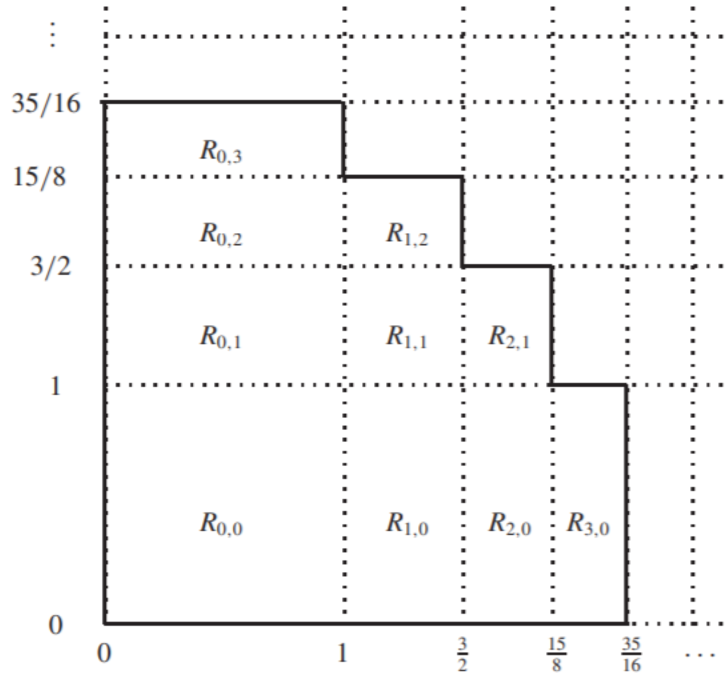
$$a_ia_j = \frac{j+1}{i+j+1}a_ia_{j+1} + \frac{i+1}{i+j+1}a_{i+1}a_j. \tag{4}$$

Nếu ta bắt đầu từ $a_0^2$ và áp dụng liên tiếp (4), ta thu được hệ thức

$$1 = a_0a_n + a_1a_{n-1} + \cdots + a_na_0. \tag{5}$$

Tiếp theo là một *thiết kế hình học* độc đáo, ta chia góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ thành các hình chữ nhật bằng cách vẽ các đường thẳng $x = s_n$ và $y = s_n$.

Gọi $R_{i,j}$ là hình chữ nhật với góc dưới bên trái $(s_i, s_j)$ và góc trên bên phải $(s_{i+1}, s_{j+1})$. Diện tích của $R_{i,j}$ bằng $a_ia_j$. Như vậy đẳng thức (5) khẳng định là tổng diện tích các hình chữ nhật




$R_{i,j}$ mà $i + j = n$ bằng 1. Ta gọn $P_n$ là miền đa giác tạo bởi tất cả các hình chữ nhật $R_{i,j}$ với $i + j < n$, thế thì diện tích của $P_n$ bằng $n$.

Các điểm góc bên ngoài của $P_n$ là các điểm $(s_i, s_j)$ với $i + j = n + 1$ và $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Theo định lý Pythagore, khoảng cách từ các điểm đó đến gốc tọa độ bằng $\sqrt{s_i^2 + s_j^2}$. Theo (3), các khoảng cách này bị chặn trên bởi $\sqrt{\dfrac{2(i+j)}{o_n}} = \sqrt{\dfrac{2(n+1)}{o_n}}$.

Tương tự, các điểm góc bên trong của $P_n$ là các điểm $(s_i, s_j)$ với $i + j = n$ và $0 \leqslant i, j \leqslant n$. Khoảng cách từ các điểm đó đến gốc tọa độ bị chặn dưới bởi $\sqrt{\dfrac{2(i+j-1)}{e_n}} = \sqrt{\dfrac{2(n-1)}{e_n}}$.

Như vậy $P_n$ chứa một phần tư đường tròn có tâm tại gốc tọa độ và có bán kính $\sqrt{\dfrac{2(n-1)}{e_n}}$ và chứa trong một phần tư đường tròn có tâm tại gốc tọa độ và có bán kính $\sqrt{\dfrac{2(n+1)}{o_n}}$.

Vì diện tích của một phần tư đường tròn bán kính $r$ bằng $\frac{1}{4}\pi r^2$, trong khi đó diện tích của $P_n$ bằng $n$ nên ta có

$$\frac{(n-1)\pi}{2e_n} < n < \frac{(n+1)\pi}{2o_n} \quad \Longrightarrow \quad \frac{(n-1)\pi}{2n} < e_n < o_n < \frac{(n+1)\pi}{2n}.$$

Từ đây rõ ràng là khi $n$ dần đến vô cùng thì cả $e_n$ và $o_n$ đều dần đến $\frac{\pi}{2}$.

Ở trên, ta đã làm việc với các tổng vô hạn như là với các tổng hữu hạn, từ đó mà ra được nhiều kết quả kỳ quái như

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = -\frac{1}{12}.$$

Trong mục này, ta sẽ chỉ ra rằng ngay cả với những tổng hội tụ thì việc hoán đổi vị trí các số hạng cũng có thể làm thay đổi giá trị của tổng, thậm chí thay đổi tính hội tụ.

Ví dụ ta đã biết

$$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2.$$

Thế nhưng nếu gom lại thành tổng có dạng

$$B = \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) + \cdots$$

ta sẽ được một kết quả khác. Thật vậy, tổng riêng thứ $n$ của tổng trên sẽ bằng

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right) + \left(\frac{1}{2(n+1)} + \cdots + \frac{1}{4n}\right).$$

Dấu ngoặc thứ nhất bằng tổng riêng thứ $4n$ của tổng $A$ ban đầu, nên dần đến $\ln 2$còn dấu ngoặc thứ hai sẽ dần đến $\frac{1}{2}(\ln 2n - \ln n) = \frac{1}{2}\ln 2$ khi $n$ dần đến vô cùng. Do đó $B = \frac{3}{2}\ln 2$.

Nếu ta lại gom 3 số hạng dương rồi mới lấy một số hạng âm thành tổng C:

$$C = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{6}\right) + \cdots$$

thì ta sẽ tính được $C = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3$.

Thậm chí ta có thể gom để mỗi dấu ngoặc đều có giá trị lớn hơn 1 như sau

$$D = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{79} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{81} + \cdots + \frac{1}{839} - \frac{1}{6}\right) + \cdots$$

và kết quả là được một dãy phân kỳ.

Điều thú vị là với dãy số

$$E = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12},$$

thì sự gom số hạng như thế không dẫn đến sự thay đổi tổng. Cụ thể là tổng

$$F = \left(1 + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{4^2}\right) + \cdots$$

vẫn bằng $\frac{\pi^2}{12}$.

Vấn đề nằm ở chỗ nào? Tại sao với tổng $A$ thì có sự thay đổi, còn với tổng $E$ thì không? Câu trả lời xin dành cho bạn đọc.

Tôi kết thúc phần này bằng một bài toán mà thầy Đỗ Bá Khang đã ra cho đội tuyển IMO 1983 trong đợt tập huấn vào mùa hè năm 1983.

Bài toán 3. *Cho chuỗi số $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối. Chứng minh rằng với mọi số thực $s$ cho trước, luôn luôn tìm được một song ánh $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ sao cho chuỗi $a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + a_{\varphi(3)} + \cdots$ hội tụ và có tổng là $s$.*

Cuối cùng là một số kết quả liên quan đến những vấn đề nêu trên được nêu ra mà không chứng minh, xem như các bài tập dành cho bạn đọc

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right] \varphi(k) = \frac{n(n+1)}{2}.$

(b) $\displaystyle\sum_{d\,|\,n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} = \frac{n}{\varphi(n)}.$

(c) $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n,\,(k,n)=1} k = \frac{1}{2} n\varphi(n).$

(d) (Menon, 1965) $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n,\,(k,n)=1} (k-1, n) = \varphi(n)\tau(n).$

(e) $\sigma(n) = \displaystyle\sum_{d\,|\,n} \varphi(d)\tau(n/d)$, nói cách khác $\sigma = \varphi * \tau$.

(f) $\displaystyle\sum_{d\,|\,n} \mu(d)\tau(n/d) = 1$, nói cách khác $\mu * \tau = 1$.

(g) $\displaystyle\sum_{d\,|\,n} \mu(d)\sigma(n/d) = n$, nói cách khác $\mu * \sigma = N$.

(h) Hàm số học $f$ được gọi là nhân tính số học nếu $f(1) = 1$ và $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$, với mọi $m, n$ nguyên tố cùng nhau. Tích Diriclet của hai hàm nhân tính số học là một hàm nhân tính số học. Trường hợp riêng, nếu f là hàm nhân tính số học thì hàm tổng theo các ước của nó, tức là $F(n) = \sum_{d\,|\,n} f(d)$ cũng là hàm nhân tính số học.

(i) Cho $f$ là một hàm nhân tính số học và $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ là phân tích của n ra thừa số nguyên tố. Khi đó

$$\sum_{d\,|\,n} \mu(d) f(d) = (1 - f(p_1))(1 - f(p_2)) \cdots (1 - f(p_k)).$$

(j) Với $|x| < 1$ thì

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)x^n}{1 - x^n} = \frac{x}{(1-x)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)x^n}{1 + x^n} = \frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)^2} \qquad \text{(Liuoville)}.$$

(k) Với $|x| < 1$ thì
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)x^n}{1-x^n} = x.$$

(l) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(k)}{k} = \frac{6}{\pi^2}.$

(m) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(k)}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^r = \frac{6}{(1+r)\pi^2}.$

(n) (Chuỗi Dirichlet và tích Dirichlet) Cho hàm số học $f$, khi đó Chuỗi Dirichlet của $f$ là hàm số
$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}.$$

Giữa chuỗi Dirichlet và tích Dirichlet được định nghĩa ở phần 4 có mối quan hệ sau : Nếu các hàm $f$ và $g$ có các chuỗi Dirichlet tương ứng là $F(s), G(s)$ thì tích Dirichlet $f * g$ có chuỗi Dirichlet là $F(s) \cdot G(s)$.

(o) Nếu $s > 1$, thì
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \zeta^2(s),$$

và nếu $s > 2$, thì
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-1).$$

# MỘT VÀI ĐÁNH GIÁ TRÊN DÃY SỐ

Nguyễn Hoàng Vinh
Trường THPT Chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai

Ở chuyên đề này, tôi trình bày một số cách để đánh giá các số hạng của một dãy số thông qua việc so sánh với các đại lượng khác. Đây là cơ sở để sử dụng định lý kẹp hoặc mở rộng các kết quả về giới hạn.

Bài toán 1. *Xét dãy số $(x_n)$ cho bởi công thức*

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n}, \quad \forall n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

Trước tiên, ta thử tính toán một vài số hạng từ dãy số này

| A | B | C |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1.414214 |
| 3 | 2 | 1.732051 |
| 4 | 2.5 | 2 |
| 5 | 2.6 | 2.236068 |
| 6 | 2.923077 | 2.44949 |
| 7 | 3.052632 | 2.645751 |
| 8 | 3.293103 | 2.828427 |
| 9 | 3.429319 | 3 |
| 10 | 3.624427 | 3.162278 |
| 11 | 3.759056 | 3.316625 |
| 12 | 3.926266 | 3.464102 |
| 13 | 4.056339 | 3.605551 |
| 14 | 4.20486 | 3.741657 |
| 15 | 4.32948 | 3.872983 |
| 16 | 4.464619 | 4 |
| 17 | 4.583732 | 4.123106 |
| 18 | 4.708768 | 4.242641 |
| 19 | 4.822656 | 4.358899 |
| 20 | 4.939738 | 4.472136 |
| 21 | 5.048798 | 4.582576 |
| 22 | 5.159406 | 4.690416 |
| 23 | 5.264057 | 4.795832 |
| 24 | 5.369254 | 4.898979 |

Ở cột $A$ là giá trị của $n$, cột $B$ là giá trị của $x_n$ và cột $C$ là giá trị của $\sqrt{n}$. Điều này cho phép quy nạp để dự đoán

$$\sqrt{n} \leqslant x_n \leqslant \sqrt{n} + 1.$$

Ta có thể chứng minh quy nạp kết quả trên. Chú ý đánh giá

$$x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n} < \sqrt{n} + 1, \quad x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n} > 1 + \frac{n}{\sqrt{n} + 1}.$$

Xét bất đẳng thức

$$1 + \frac{n}{\sqrt{n} + 1} > \sqrt{n + 1},$$

$$\Leftrightarrow n + \sqrt{n} + 1 > \sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n + 1},$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 3n + 1 + 2\sqrt{n} + 2n\sqrt{n} > n^2 + 2n + 1 + 2\sqrt{n}\,(n + 1).$$

Hiển nhiên đúng, vậy ta chứng minh được $\sqrt{n} < x_n < \sqrt{n} + 1$. Từ đây thu được kết quả

Kết quả 1.1. *Chứng minh*

$$\lim \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 1.$$

Mấu chốt là dự đoán sự so sánh với đại lượng $\sqrt{n}$. Tất nhiên sự ước lượng này ngoài các kinh nghiệm từ việc tính toán, ta còn thể đặt lượng so sánh này là

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n, \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

Khi đó, trong quá trình quy nạp, ta đưa về kết quả

$$1 + \frac{n}{z_n} > y_{n+1}, \quad 1 + \frac{n}{y_n} < z_{n+1},$$

và ta cố gắng thử từ các dãy đơn giản nhất là $y_n = n^\alpha$ và dãy $(z_n)$ dự trên dãy $(y_n)$.

Tiếp tục tính toán, cột thứ tư là giá trị $\frac{x_n}{\sqrt{n}}$ và cột thứ năm là $x_n - \sqrt{n}$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 50 | 7.551043 | 7.071068 | 1.067878688 | 0.479974805 |
| 51 | 7.621602 | 7.141428 | 1.067237769 | 0.480173718 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 100 | 10.4863 | 10 | 1.04863015 | 0.486301497 |
| 101 | 10.53625 | 10.04988 | 1.048396129 | 0.48637508 |
| 102 | 10.58595 | 10.0995 | 1.048165498 | 0.48644768 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 200 | 14.63269 | 14.14214 | 1.034687455 | 0.490554697 |
| 201 | 14.66803 | 14.17745 | 1.034602823 | 0.490579685 |
| 202 | 14.70327 | 14.21267 | 1.034518811 | 0.49060448 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 358 | 19.41394 | 18.92089 | 1.026058619 | 0.493052207 |
| 359 | 19.44036 | 18.9473 | 1.026022836 | 0.493062355 |
| 360 | 19.46674 | 18.97367 | 1.0259872 | 0.493072459 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 713 | 27.19721 | 26.70206 | 1.018543371 | 0.495146208 |
| 714 | 27.21593 | 26.72078 | 1.018530513 | 0.495149727 |

Từ các kết quả này và các số liệu với $n$ lớn hơn cho phép ta dự đoán

$$\lim\left(x_n - \sqrt{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Việc chứng minh này không hề đơn giản như kết quả 1.1 Yêu cầu ở đây là cần đánh giá chặt chẽ hơn và những tính toán khó giúp ích được.

Ta thử xét biến đổi

$$x_{n+1} \cdot x_n = x_n + n.$$

Chú ý rằng, bảng đánh giá trên cho ta nhận xét là dãy tăng, việc chứng minh dãy tăng ta chưa xét đến. Nhưng có thể để dùng đánh giá

$$x_n^2 < x_{n+1} \cdot x_n = x_n + n < n + \sqrt{n} + 1,$$

$$\Rightarrow x_n < \sqrt{n + \sqrt{n} + 1}, \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

và

$$x_n^2 > x_{n-1} \cdot x_n = x_{n-1} + n - 1 > \sqrt{n-1} + n - 1,$$

$$\Rightarrow x_n > \sqrt{n + \sqrt{n-1} - 1}, \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

Đây là gợi ý trong việc chặn dãy đã cho. Ta sẽ chứng minh quy nạp các kết quả này dưới đây

1) Chứng minh

$$1 + \frac{n}{\sqrt{n + \sqrt{n} + 1}} > \sqrt{n + \sqrt{n}}.$$

2) Chứng minh

$$1 + \frac{n}{\sqrt{n-1+\sqrt{n-1}}} < \sqrt{n+2+\sqrt{n+1}}, \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

Từ đó đưa đến kết quả sau:

Kết quả 1.2. *Chứng minh rằng*

$$\lim\left(x_n - \sqrt{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Tất nhiên, bài toán sẽ chưa hoàn chỉnh nếu không chứng minh được đây là dãy tăng dù kết quả của đánh giá

$$\sqrt{n+\sqrt{n-1}-1} < x_n < \sqrt{n+\sqrt{n}+1},$$

có thể chứng minh quy nạp.

Xét phương trình

$$x^2 = x + n \Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4n-1}+1\right),$$

nên nếu chứng minh được đánh giá

$$x_n < \frac{1}{2}\left(\sqrt{4n+1}+1\right), \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

thì có nghĩa là suy ra kết quả

$$x_{n+1} > \frac{1}{2}\left(\sqrt{4n+1}+1\right),$$

hay

$$x_n \geqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{4n-3}+1\right), \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

hay suy ra cần chứng minh kết quả

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{4n-3}+1\right) \leqslant x_n < \frac{1}{2}\left(\sqrt{4n+1}+1\right), \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

Kết quả này chứng minh bằng quy nạp. Chú ý, từ

$$x_n < \frac{1}{2}\left(\sqrt{4n+1}+1\right),$$

ta đã có

$$x_{n+1} > \frac{1}{2}\left(\sqrt{4n+1}+1\right).$$

Bây giờ

$$x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n} \leqslant 1 + \frac{2n}{\sqrt{4n-3}+1},$$

và cần chứng minh
$$1 + \frac{2n}{\sqrt{4n-3}+1} \leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{4n+5}+1\right),$$
và đánh giá này được chứng minh là đúng.

Mặt khác
$$x^2 < x + n \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(-\sqrt{4n+1}+1\right) < x < \frac{1}{2}\left(\sqrt{4n+1}+1\right),$$
và có thể suy ra đây là dãy tăng do $x_n \cdot x_{n+1} = x_n + n > x_n^2$.

Kết quả 1.3. *Dãy số đã cho là một dãy tăng.*

Bài toán 2. *Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi*
$$u_1 = 1,\; u_{n+1} = \frac{n}{u_n} + \frac{u_n}{n}.$$

Tương tự ý trên, ta tính một vài giá trị trước. Việc quan sát các kết quả về $x_n$ gợi ý đến đối chiếu giá trị $\sqrt{n}$ đồng thời tính $\frac{x_n}{\sqrt{n}}$. Ta có thể dự đoán
$$x_n \geqslant \sqrt{n}, \quad \lim \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 1.$$

| B | C | D | E |
|---|---|---|---|
| n | x[n] | căn (n) | x[n]/(căn n) |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1.41421 | 1.414213562 |
| 3 | 2 | 1.73205 | 1.154700538 |
| 4 | 2.166666667 | 2 | 1.083333333 |
| 5 | 2.387820513 | 2.23607 | 1.067865797 |
| 6 | 2.571523834 | 2.44949 | 1.049820209 |
| 7 | 2.7618342 | 2.64575 | 1.043875208 |
| 8 | 2.929095255 | 2.82843 | 1.035591559 |
| 9 | 3.097355698 | 3 | 1.032451899 |
| 10 | 3.249855007 | 3.16228 | 1.027694389 |
| 11 | 3.402045855 | 3.31662 | 1.02575542 |
| 12 | 3.542625437 | 3.4641 | 1.022667875 |
| 13 | 3.682537094 | 3.60555 | 1.021352024 |
| 14 | 3.813446979 | 3.74166 | 1.019186576 |
| 15 | 3.943608331 | 3.87298 | 1.018235293 |
| 16 | 4.066530387 | 4 | 1.016632597 |
| 17 | 4.188716231 | 4.12311 | 1.015912909 |
| 18 | 4.304917794 | 4.24264 | 1.014678855 |
| 19 | 4.420426612 | 4.3589 | 1.014115415 |
| 20 | 4.530881708 | 4.47214 | 1.01313595 |

*Ở đây, tôi không trình bày chi tiết các bước đầu của quy nạp vì có thể kiểm tra qua bảng số liệu gửi kèm.*

Việc chứng minh quy nạp $x_n \geqslant \sqrt{n}$ kéo theo việc phải tìm cách chặn trên cho giá trị $x_n$ bởi một hàm số theo $n$. Không khó để nghĩ việc chứng minh $n+1 > x_n^2 > n$, đến đây, tiến hành quy nạp ta sẽ gặp bước cuối ở trường hợp

1) Chứng minh
$$x_{n+1}^2 = \frac{n^2}{x_n^2} + \frac{x_n^2}{n^2} + 2 \geqslant \frac{n^2}{n+1} + \frac{n+1}{n^2} + 2,$$
và cần chứng minh
$$\frac{n^2}{n+1} + \frac{n+1}{n^2} + 2 \geqslant n+1.$$

2) Chứng minh
$$x_{n+1}^2 = \frac{n^2}{x_n^2} + \frac{x_n^2}{n^2} + 2 \leqslant \frac{n^2}{n} + \frac{n+1}{n^2} + 2 \leqslant n+2.$$

Ta cần điều chỉnh các bước quy nạp lại. Đánh giá ở 2) chưa chặt do ta ghép cả hai đầu đánh giá của $x_n$ vào. Việc này có thể điều chỉnh bằng cách xét hàm số
$$f(x) = \frac{n}{x} + \frac{x}{n}, \quad x \in \left[\sqrt{n}, \sqrt{n+1}\right],$$
thì hàm số này nghịch biến với $n \geqslant 4$. Điều này cho phép đánh giá
$$x_{n+1}^2 = (f(x_n))^2 \leqslant \left(f\left(\sqrt{n}\right)\right)^2 = n + \frac{1}{n} + 2, \tag{1}$$
và tất nhiên vẫn chưa đủ để suy ra $x_{n+1}^2 \leqslant n+2$.

Nếu quan sát 2) và đánh giá (1), ta có thể điều chỉnh để (1) đúng thông qua đánh giá
$$n+2 \geqslant x_n^2 \geqslant n.$$
Nhưng khi ấy, đánh giá này lại làm cho 1) sai. Nghĩa là phải thêm vào $x_n \leqslant n+1+?$ một lượng phù hợp để vừa không anh hưởng đến 1) và vừa cho 2) đúng hoặc ngược lại.

Ta xét thử
$$x_{n+1}^2 = (f(x_n))^2 \leqslant \left(f\left(\sqrt{n}\right)\right)^2 = n + \frac{1}{n} + 2,$$
thì chỉ cần sửa lại đánh giá trở thành
$$x_{n+1}^2 \leqslant n + 2 + \frac{1}{n},$$
là được. Hay khác đi, ta cần chứng minh
$$n \leqslant x_n^2 \leqslant n + 1 + \frac{1}{n-1}, \quad \forall n \geqslant 2.$$

Khi đó, ở bước cuối của quy nạp, ta cần chứng minh hai kết quả (với phương pháp dùng hàm số như đã kể trên để làm chặt đánh giá)

1) Chứng minh

$$x_{n+1}^2 = (f(x_n))^2 \leqslant \left(f\left(\sqrt{n}\right)\right)^2 = n + 2 + \frac{1}{n}, \ \forall n \geqslant 4.$$

2) Chứng minh

$$x_{n+1}^2 = (f(x_n))^2 \geqslant \left(f\left(\sqrt{n+1+\frac{1}{n-1}}\right)\right)^2$$

$$= \frac{n^2}{n+1+\frac{1}{n-1}} + \frac{n+1+\frac{1}{n-1}}{n^2} + 2 = n + 1 + \frac{1}{n-1} \geqslant n + 1.$$

Vậy, bổ sung các bước còn lại của phương pháp quy nạp toán học, ta đưa đến kết quả

$$n \leqslant x_n^2 \leqslant n + 1 + \frac{1}{n-1}, \quad \forall n \geqslant 2.$$

Kết quả 1.4. *Chứng minh*

$$\lim \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 1.$$

Kết quả này hướng ta đến vấn đề đánh giá chặt hơn

$$n + \frac{1}{n-2} \leqslant x_n^2 \leqslant n + 1 + \frac{1}{n-1}, \quad \forall n \geqslant 3.$$

Vậy quay lại 1), ta có đánh giá

$$x_{n+1}^2 = (f(x_n))^2 \leqslant \left(f\left(\sqrt{n+\frac{1}{n-2}}\right)\right)^2 = \frac{n^2}{n+\frac{1}{n-2}} + \frac{n+\frac{1}{n-2}}{n^2} + 2, \quad \forall n \geqslant 4.$$

Và cần chứng minh

$$\frac{n^2}{n+\frac{1}{n-2}} + \frac{n+\frac{1}{n-2}}{n^2} + 2 < n + 2 + \frac{1}{n}, \quad \forall n \geqslant 4,$$

và đánh giá này có thể chứng minh là đúng. Kết quả này dẫn đến

Kết quả 1.5. *Chứng minh rằng*

$$\lim \left(\sum_{i=3}^{n} x_i^2 - \frac{1}{2} n (n+1)\right) = +\infty$$

Ở đây, tôi tính thêm giá trị $\sqrt{n}\left(x_n - \sqrt{n}\right)$ ở cột cuối

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 398 | 19.96249917 | 19.9499 | 1.000629668 | 19.97504741 | 19.95 | 0.250608 |
| 399 | 19.98754045 | 19.975 | 1.000628591 | 20.00006281 | 19.97505 | 0.250808 |
| 400 | 20.01253023 | 20 | 1.000626512 | 20.02504697 | 20.00006 | 0.250605 |
| 401 | 20.03750894 | 20.025 | 1.000625446 | 20.05 | 20.02505 | 0.250804 |
| 402 | 20.06243653 | 20.0499 | 1.000623387 | 20.07492201 | 20.05 | 0.250602 |
| 1023 | 31.99219733 | 31.9844 | 1.000244687 | 32.00001529 | 31.98439 | 0.250314 |
| 1024 | 32.00781987 | 32 | 1.000244371 | 32.01563645 | 32.00002 | 0.250236 |
| 1025 | 32.02343968 | 32.0156 | 1.000244209 | 32.03125 | 32.01564 | 0.250314 |

Điều này cho phép dự đoán

$$\lim \sqrt{n}\left(x_n - \sqrt{n}\right) = \frac{1}{4},$$

và so với đánh giá tìm được ở phân trên thì

$$\sqrt{n}\left(\sqrt{n + \frac{1}{n-2}} - \sqrt{n}\right) < \sqrt{n}\left(x_n - \sqrt{n}\right) < \sqrt{n}\left(\sqrt{n + 1 + \frac{1}{n-2}} - \sqrt{n}\right) < \frac{1}{2}.$$

Hay cho phép dự đoán một kết quả chặt hơn là

$$\sqrt{n + \frac{1}{2} + ?} \leqslant x_n \leqslant \sqrt{n + \frac{1}{2} + ??}$$

với $n$ đủ lớn. Phần đánh giá này xin dành cho bạn đọc.

Bài toán 3. *Ta xét một dãy rất quen thuộc đã xuất hiện trong khá nhiều kì thi*

$$(x_n) : \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{n}{x_n} \end{cases}$$

Một kết quả thường thấy nhất là

Kết quả 1.6. *Chứng minh rằng*

$$n \leqslant x_n \leqslant n + \frac{1}{n}, \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

Đánh giá trên có thể chứng minh dễ dàng qua quy nạp, lưu ý mấu chốt là kĩ thuật xét hàm như đã nói ở bài toán 2 mới có thể chứng minh được vấn đề. Đánh giá

$$x_{n+1} \geqslant n + \frac{n}{n + \frac{1}{n}},$$

là chưa đủ chặt và thay vào đó là

$$x_{n+1} \geqslant f(n) = n + \frac{n}{n} \quad \text{với} \quad f(x) = x + \frac{n}{x},$$

đồng biến trên $[n, +\infty)$ sẽ giúp giải quyết bài toán.

Mặt khác, thử xét một đại lượng $y_n$ để xây dựng một kết quả chặt hơn là

$$x_n \geqslant n + y_n, \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots,$$

điều này kéo theo cần đánh giá

$$f(n + y_n) = n + y_n + \frac{n}{n + y_n} \geqslant n + y_{n+1},$$

$$\Leftrightarrow y_n + \frac{n}{n + y_n} \geqslant 1 + y_{n+1} \Leftrightarrow y_n - y_{n+1} \geqslant \frac{y_n}{n + y_n} \tag{2}$$

Ở đây, ta thử chọn $y_n = f(n)$ với $f(n)$ là hàm nghịch biến, có thể xét kết quả đơn giản nhất là

$$y_n = \frac{1}{n^2}, \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

và (2) cho ta

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant \frac{1}{n^3 + 1}, \quad \forall n \geqslant 1.$$

Đánh giá này được chứng minh là đúng.

Kết quả 1.7. *Tính*

$$\lim \sqrt{n}\,(x_n - n).$$

Ở đây, ta tính 20 giá trị đầu

| C | D | E | F |
|---|---|---|---|
| **n** | **x[n]** | **n+1/n** | **1+1/(2n)** |
| 1 | 2 | 2 | 1.5 |
| 2 | 2.5 | 2.5 | 2.25 |
| 3 | 3.3 | 3.33333 | 3.16667 |
| 4 | 4.20909 | 4.25 | 4.125 |
| 5 | 5.15941 | 5.2 | 5.1 |
| 6 | 6.12852 | 6.16667 | 6.08333 |
| 7 | 7.10755 | 7.14286 | 7.07143 |
| 8 | 8.09242 | 8.125 | 8.0625 |
| 9 | 9.081 | 9.11111 | 9.05556 |
| 10 | 10.0721 | 10.1 | 10.05 |
| 11 | 11.0649 | 11.0909 | 11.0455 |
| 12 | 12.0591 | 12.0833 | 12.0417 |
| 13 | 13.0542 | 13.0769 | 13.0385 |
| 14 | 14.05 | 14.0714 | 14.0357 |
| 15 | 15.0464 | 15.0667 | 15.0333 |
| 16 | 16.0434 | 16.0625 | 16.0313 |
| 17 | 17.0407 | 17.0588 | 17.0294 |
| 18 | 18.0383 | 18.0556 | 18.0278 |
| 19 | 19.0362 | 19.0526 | 19.0263 |
| 20 | 20.0343 | 20.05 | 20.025 |

Một kết quả đáng quan tâm là

$$x_n > n + \frac{1}{2n}, \quad n = 1, 2, \ldots, 20,$$

nhưng kết quả tổng quát khó có thể chứng minh quy nạp vì nó sẽ làm cho đánh giá ở (2) là sai khi cho $y_n = \frac{1}{2n}$. Và đặc biệt, thay đổi giá trị $x_1 = 1.5$ thì đánh giá này không còn đúng. Nghĩa là một đánh giá phụ thuộc vào giá trị đầu của $x_1$.

Đặt

$$x_n = n + y_n \Rightarrow y_{n+1} = y_n - 1 + \frac{n}{n + y_n}.$$

Xét hàm số

$$f(x) = x - 1 + \frac{n}{x+n}, \quad n \in \mathbb{Z}^+,$$

với

$$f'(0) = 1 - \frac{1}{n},$$

nên dùng kết quả về bất đẳng thức tiếp tuyến, ta chứng minh

$$f(x) \geqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)x,$$

$$\Leftrightarrow x - 1 + \frac{n}{x+n} \geqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)x,$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{n} - \frac{x}{x+n} \geqslant 0.$$

Và bất đẳng thức này đúng với mọi $x > 0$. Điều này suy ra

$$y_{n+1} \geqslant \frac{n-1}{n} y_n, \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots,$$

hay suy ra

$$y_{n+1} \geqslant \frac{1}{n} y_2 = \frac{1}{2n}, \quad \forall n > 1$$
$$\Rightarrow x_n \geqslant n + \frac{1}{2(n-1)}, \quad \forall n > 1.$$

Từ đây suy ra điều cần chứng minh.

Kết quả 1.8. *Chứng minh rằng*

$$\lim \left( \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{2} n(n+1) \right) = +\infty.$$

Kết quả 1.9. *Chứng mnh rằng dãy số $u_n = n(x_n - n)$ có giới hạn hữu hạn là $L$ và $L > \frac{1}{2}$.*

Ta thấy rằng, các đánh giá trên sinh ra đa phần từ tính toán các số hạng đầu và dự đoán mang tính ước lượng thông qua sự xuất hiện của $n$ trong dãy số. Phần tiếp theo, tôi thử liên kết dãy số với hàm số và các công cụ đánh giá trên đó.

Bài toán 4. *Dãy số $(u_n)$ xác định bởi*

$$u_1 = 1,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + n}, \quad \forall n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

Kết quả 1.10. *Tính*

$$\lim \frac{u_n}{\sqrt{n}} \qquad \text{và} \qquad \lim \left(u_n - \sqrt{n}\right).$$

Để chứng minh ý đầu, ta cần quy nạp

$$\sqrt{n-1} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{n + \sqrt{n}}, \quad \forall n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

Chỉ cần chứng minh quy nạp vế phải, hai chứng minh

$$\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} \leqslant \sqrt{n + 1 + \sqrt{n+1}},$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n + \sqrt{n}} \leqslant 1 + \sqrt{n+1},$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} \leqslant 2\sqrt{n+1} + 2.$$

Điều này đúng với mọi giá trị $n$ nguyên dương. Từ đây cho ta

$$\lim \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1.$$

Ý sau, thử xem xét phương pháp này. Xét hàm số

$$f(x) = \sqrt{x+n} \Rightarrow f(0) = \sqrt{n},$$

và

$$f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad f''(0) = -\frac{1}{4n\sqrt{n}},$$

Sử dụng khai triển Maclaurin, ta có

$$\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot x - \frac{1}{4n\sqrt{n}} \cdot x^2 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot x, \quad \forall x > 0.$$

Từ đây cho phép đánh giá

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{u_n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{4n\sqrt{n}} \cdot u_n^2 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{u_n}{\sqrt{n}}, \quad \forall n > 1,$$

đồng thời chú ý $\lim \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1$, điều này suy ra

$$\lim \left(u_n - \sqrt{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Rõ ràng, đánh giá này khá hữu hiệu trong việc tính giới hạn của một dãy sinh ra từ dãy ban đầu và cách sử dụng định lý kẹp không phức tạp như ở trên.

Bài toán 5. *Cho dãy số $(x_n)$ xác định bởi*

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sin x_n.$$

Không khó để chỉ ra $\lim x_n = 0$ và đồng thời dùng khai triển Maclaurin cho phép đánh giá

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{24}, \quad \forall x > 0.$$

Điều này suy ra

$$\lim \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n^3} = \frac{1}{6},$$

và kết quả này khó có thể suy ra từ định lý kẹp.

Hơn nữa, ta có thể tìm một lượng $(y_n)$ phù hợp để $\lim x_n y_n = L \neq 0$. Từ đánh giá

$$\lim \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n^3} = \frac{1}{6},$$

và kết quả

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1,$$

cho ta ý tưởng xét

$$\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n)}{x_n^2 x_{n+1}^2},$$

suy ra

$$\lim \left( \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \right) = \lim \left( \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n^3} \cdot \frac{x_n + x_{n+1}}{x_{n+1}} \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} \right) = \frac{1}{3}.$$

Áp dụng định lý Stol ta có

$$\lim \frac{1}{n x_n^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \lim \sqrt{n} \cdot x_n = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Qua các bài toán trên, phân tích cách tìm những đánh giá hợp lý trên một dãy số, ta rút ra một số kinh nghiệm qua việc chặn hoặc ước lượng một cách hợp lý những đại lượng phù hợp.

# ỨNG DỤNG TÍNH CHIA HẾT CỦA 0 TRONG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Nguyễn Tất Thu
Trường THPT Chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai

Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu ứng dụng chia hết của số 0 trong việc giải một số bài phương trình hàm liên quan đến chia hết.

Ta biết, với hai số nguyên $a,\ b$ mà $a \neq 0$ và $a \,\vdots\, b$ thì $|a| \geqslant |b|$. Do đó, nếu $a \,\vdots\, b$ mà $|a| < |b|$ thì ta có $a = 0$. Từ đây, ta suy ra được: *Nếu số nguyên a chia hết cho vô hạn số nguyên thì* $a = 0$. Tính chất này khá đơn giản, nhưng nó là công cụ khá mạnh khi áp dụng vào các bài toán giải phương trình hàm liên quan đến chia hết.

Ý tưởng của phương pháp này như sau: *Khi ta cần tìm một hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn tính chất chia hết nào đó và ta dự đoán được đáp số của bài toán là hàm $g(n)$, ta tìm cách chứng minh với số nguyên $n$ cố định thì $f(n) - g(n)$ chia hết cho vô hạn số nguyên.*

Để thực hiện ý tưởng này, ta thường đi xác định giá trị của hàm $f$ trên một tập vô hạn nào đó, ta thường chọn là tập các số nguyên tố.

Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ sao cho với mọi $m,\ n \in \mathbb{N}$, ta có*

$$f(m) + f(n) \mid m + n. \tag{1}$$

Lời giải. Kí hiệu $P(a, b)$ là phép thế $m = a,\ n = b$ vào (1), khi đó

$P(1, 1)$, ta có

$$2f(1) \mid 2 \Rightarrow f(1) = 1.$$

$P(p-1, 1)$ với $p$ là số nguyên tố, ta có

$$f(p-1) + 1 \mid p \Rightarrow f(p-1) + 1 = p \Rightarrow f(p-1) = p - 1.$$

$P(p-1, p)$, ta có

$$p - 1 + f(p) \mid 2p - 1. \tag{2}$$

$P(p, p)$, ta có

$$2f(p) \mid 2p \Rightarrow f(p) \mid p. \tag{3}$$

Từ (2) và (3), ta có $f(p) = p$. Xét $n$ là số nguyên dương bất kì và $p$ là số nguyên tố, khi đó

$$f(n) + p = f(n) + f(p) \mid n + p.$$

Suy ra

$$f(n) + p \mid (n + p) - (f(n) + p) = n - f(n)\ ,\ \forall\ p \text{ nguyên tố.}$$

Điều này dẫn tới $f(n) = n,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Thử lại ta thấy nghiệm hàm này thỏa. Do đó, đây là nghiệm hàm cần tìm. $\square$

Nhận xét. Trong lời giải trên, ta đi tính giá trị của hàm $f$ tại các điểm số nguyên tố. Do $f(m) + f(n) \mid m + n$, nên ta chọn $m,\ n$ sao cho $m + n$ là số nguyên tố để sử dụng tính chất số nguyên tố chỉ có hai ước nguyên dương là 1 và chính nó. Khi xác định được $f(p) = p$ với mọi $p$ là số nguyên tố, kết hợp với việc dự đoán được $f(n) = n$ là nghiệm hàm của bài toán, ta thay $m$ hoặc $n$ là số nguyên tố và sử dụng tính chia hết để tạo ra đại lượng $f(n) - n$ chia hết cho vô hạn số nguyên. Từ đó, dẫn tới $f(n) = n$. Quy trình này được áp dụng tương tự cho các ví dụ tiếp theo.

Ví dụ 2 (Indonesian MO 2020). *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn*

$$n^2 + f(m)f(n) \vdots f(n) + m, \tag{4}$$

*với mọi số nguyên dương $m,\ n$.*

Lời giải. Kí hiệu tương tự như trên, khi đó

$P(1,1)$, ta có

$$f(1) + 1 \mid f(1)^2 + 1 = (f(1) + 1)(f(1) - 1) + 2,$$

suy ra

$$f(1) + 1 \mid 2 \Rightarrow f(1) = 1.$$

$P(p,p)$, $p$ là số nguyên tố, ta có

$$f(p) + p \mid p^2 + f(p)^2 = (f(p) + p)(f(p) - p) + 2p^2.$$

Suy ra

$$f(p) + p \mid 2p^2 \Rightarrow f(p) \in \{p,\ p^2 - p,\ 2p^2 - p\}.$$

$P(p,1)$ ta có

$$1 + f(p) \mid p^2 + f(p) = 1 + f(p) + p^2 - 1 \Rightarrow 1 + f(p) \mid p^2 - 1.$$

Nếu $f(p) = 2p^2 - p$ thì $1 + f(p) = 1 + 2p^2 - p > p^2 - 1$, suy ra vô lí.

Nếu $f(p) = p^2 - p$ thì $1 + f(p) = p^2 - p + 1 > p^2 - 1\ ,\ \forall p > 2$.

Suy ra $f(p) = p\ ,\ \forall p > 2$. Hơn nữa $f(2) = 2^2 - 2 = 2$, nên ta có $f(p) = p,\ \forall p$ nguyên tố.

Xét $m$ là số nguyên dương bất, kì. $P(p,m)$, ta có

$$p + m \mid p^2 + pf(m) = p(p + m) + p(f(m) - m) \Rightarrow p + m \mid f(m) - m,\ \forall p \text{ nguyên tố.}$$

Suy ra $f(m) - m = 0$, hay $f(m) = m,\ \forall m \in \mathbb{Z}^+$. Thử lại ta thấy hàm $f(m) = m$ thỏa phương trình hàm đã cho.

Vậy $f(m) = m,\ \forall m \in \mathbb{Z}^+$ là nghiệm hàm cần tìm. $\square$

Ví dụ 3 (MO SL 2019, N4). *Tìm tất cả các hàm* $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ *sao cho*

$$a + f(b) \mid a^2 + bf(a), \tag{5}$$

*với mọi số nguyên dương a và b thỏa* $a + b > C$ *với* $C$ *là một hằng số.*

Lời giải. $P(1, n)$ ta có
$$1 + f(n) \mid 1 + nf(1).$$
Kí hiệu $S$ là tập các số nguyên dương $n$ sao cho $1 + nf(1)$ là số nguyên tố. Do $(1, f(1)) = 1$, nên $S$ là tập vô hạn. Khi đó, ta có

$$1 + f(n) = 1 + nf(1) \Rightarrow f(n) = nf(1), \ \forall n \in S.$$

Với $a$ là số nguyên dương cố định, $P(a, n)$ với $n \in S$ ta có

$$a + f(n) = a + nf(1) \mid a^2 + nf(a),$$

suy ra

$$a + nf(1) \mid f(1)\left(a^2 + nf(a)\right) - f(a)\left(a + nf(1)\right) = f(1)a^2 - af(a), \ \forall n \in S.$$

Suy ra $f(1)a^2 - af(a) = 0$, hay $f(a) = f(1)a$ với mọi $a \in \mathbb{Z}^+$.

**Cách 2:** Với $b \in \mathbb{Z}^+$ và $n$ là số nguyên dương sao cho $nb - f(b) > C$. Khi đó, $P(nb - f(b), b)$ ta có
$$nb \mid (nb - f(b))^2 + bf(nb - f(b)) \Rightarrow b \mid f(b)^2.$$
Do đó, $p \mid f(p)^2$ hay $p \mid f(p) \Rightarrow f(p) = k(p) \cdot p$. Hơn nữa $P(1, b)$ với $b > C$ ta có

$$1 + f(b) \mid a + bf(1) \Rightarrow f(b) \leqslant bf(1).$$

Suy ra $k(p) \leqslant f(1)$ với $p$ là số nguyên tố lớn tùy ý. Do đó, tồn tại vô hạn số nguyên tố $p$ lớn tùy ý sao cho $k(p) = k \in \mathbb{Z}^+$. Đặt $S = \{p \mid k(p) = k\}$, ta có $S$ là tập vô hạn. $P(a, p)$, $p \in S$, $a \notin S$ ta có

$$a + kp \mid a^2 + pf(a) - a(a + kp) = p(f(a) - ka).$$

Mà $(a + kp, p) = 1$, nên ta có

$$a + kp \mid f(a) - ka, \ \forall p \in S.$$

Suy ra $f(a) = ka$, $\forall a \notin S$. Từ đó, ta có $f(a) = ka$, $\forall a \in \mathbb{Z}^+$ với $k$ là số nguyên dương. □

Ví dụ 4. *Tìm tất cả các hàm* $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ *thỏa mãn*

$$n! + f(m)! \mid f(n)! + f(m!),$$

*với mọi* $m, n \in \mathbb{Z}^+$.

Lời giải. Cho $m = n = 1$, ta có

$$1 + f(1)! \mid f(1)! + f(1) \Rightarrow 1 + f(1)! \mid f(1) - 1.$$

Mà $1 + f(1)! > |f(1) - 1|$, nên $f(1) = 1$. Cho $m = 1$, ta có

$$n! + 1 \mid f(n)! + 1 \Rightarrow f(n)! \geqslant n! \Rightarrow f(n) \geqslant n.$$

Cho $(m, n) = (1, p - 1)$ với $p$ là số nguyên tố, ta có

$$p \mid (p-1)! + 1 \mid f(p-1)! + 1 \Rightarrow f(p-1) < p \Rightarrow f(p-1) = p - 1.$$

Cho $n = p - 1$, ta có

$$(p-1)! + f(m)! \mid (p-1)! + f(m!),$$

hay

$$(p-1)! + f(m)! \mid f(m!) - f(m)!$$

với mọi số nguyên tố $p$, dẫn tới $f(m!) = f(m)!$. Do đó ta có thể viết lại đề bài như sau

$$n! + f(m)! \mid f(m)! + f(n)! \Rightarrow n! + f(m)! \mid f(n)! - n!$$

với mọi số nguyên dương $m$. Suy ra $f(n)! = n! \Rightarrow f(n) = n$. □

Ví dụ 5 (IMO Shortlist 2016). *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$ ta có*

$$0 \neq f(m) + f(n) - mn \mid mf(m) + nf(n).$$

Lời giải. $P(1, 1)$ ta có

$$2f(1) - 1 \mid 2f(1) \Rightarrow 2f(1) - 1 \mid 2f(1) - (2f(1) - 1) = 1 \Rightarrow f(1) = 1.$$

$P(p, 1)$ với $p \geqslant 7$ là số nguyên tố, ta có $f(p) + 1 - p \mid pf(p) + 1$. Suy ra

$$f(p) + 1 - p \mid pf(p) + 1 - p(f(p) + 1 - p) = p^2 - p + 1.$$

Suy ra $p^2 - p + 1 = k(f(p) + 1 - p)$. Hơn nữa $p^2 - p + 1$ là số lẻ, nên ta có $k$ lẻ

- Nếu $k = 1$, ta có $f(p) = p^2$.
- Nếu $k > 1$, ta có $k \geqslant 3$, hay

  $$f(p) \leqslant \frac{1}{3}(p^2 + 2p - 2).$$

  $P(p, p)$ với $p \geqslant 7$ là số nguyên tố, ta có

  $$2f(p) - p^2 \mid 2pf(p).$$

  Suy ra

  $$2f(p) - p^2 \mid 2pf(p) - p\left(2f(p) - p^2\right) = p^3.$$

  Mặt khác, với $p \geqslant 7$ ta có

  $$-p^2 < 2f(p) - p^2 \leqslant \frac{2}{3}\left(p^2 + 2p - 2\right) - p^2 < -p.$$

  Mà $2f(p) - p^2$ là một ước của $p^3$, suy ra vô lí. Do đó, ta có $f(p) = p^2$, $\forall p \geqslant 7$, $p$ nguyên tố.

Xét $n$ là số nguyên dương bất kì, cho $m = p$ ta có

$$f(p) + f(n) - pn \mid pf(p) + nf(n) - n(f(p) + f(n) - pn) = pf(p) - nf(p) + pn^2.$$

Mà $f(p) = p^2$, nên

$$p^2 - pn + f(n) \mid p\left(p^2 - pn + n^2\right).$$

Xét $p$ là số nguyên tố lớn tùy ý, khi đó $(f(n), p) = 1$, nên $\left(p, p^2 - pn + f(n)\right) = 1$. Suy ra

$$p^2 - pn + f(n) \mid \left(p^2 - pn + n^2\right) - \left(p^2 - pn + f(n)\right) = n^2 - f(n).$$

Vì $n^2 - f(n)$ chia hết cho $p^2 - pn + f(n)$ với mọi số nguyên tố $p$ lớn tùy ý, nên

$$n^2 - f(n) = 0 \Rightarrow f(n) = n^2.$$

Thử lại ta thấy hàm $f(n) = n^2$ thỏa bài toán. □

Ví dụ 6 (Balkan MO 2017). *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn*

$$n + f(m) \mid f(n) + nf(m),$$

*với mọi $m,\ n \in \mathbb{Z}^+$.*

Lời giải. Từ giả thiết ta có

$$n + f(m) \mid f(n) + nf(m) - n(n + f(m)) = f(n) - n^2,\ \forall m, n \in \mathbb{Z}^+.$$

$P(1, 1)$, ta có

$$1 + f(1) \mid 2f(1) \Rightarrow 1 + f(1) \mid 2f(1) - 2(f(1) + 1) = -2.$$

Suy ra $f(1) = 1$. Xét $p$ là số nguyên tố, khi đó $P(p, p)$ ta có

$$p + f(p) \mid (p + 1)f(p).$$

Nếu $p \nmid f(p)$ thì ta có $(p + f(p), f(p)) = 1$. Do đó $p + f(p) \mid p + 1$, hay $f(p) = 1$. Suy ra với mọi số nguyên tố $p$ thì hoặc $f(p) = 1$, hoặc $p \mid f(p)$.

Đặt $A = \{p \in \mathcal{P} \colon f(p) = 1\}$ và $B = \{p \in \mathcal{P} \colon p \mid f(p)\}$. Vì tập các số nguyên tố là vô hạn, nên trong hai tập $A$ và $B$ có ít nhất một tập có vô hạn phần tử.

- Nếu $A$ là tập vô hạn, khi đó với số nguyên dương $m$, $P(p, m)$ với $p \in A$ ta có

  $$p + f(m) \mid p^2 - 1 \Rightarrow p + f(m) \mid p^2 - 1 - (p^2 - f(m)^2) = f(m)^2 - 1,\ \forall p \in A.$$

  Vì $A$ là tập vô hạn, nên ta có $f(m) = 1,\ \forall m \in \mathbb{Z}^+$.

- Nếu $B$ là tập vô hạn, khi đó với $n$ là số nguyên dương, $P(n, p)$ với $p \in B$ ta có

  $$n + f(p) \mid f(n) - n^2.$$

  Vì $p \in B$, nên $p \mid f(p)$ do đó $f(p)$ lớn tùy ý. Từ đó ta có $f(n) - n^2 = 0$ hay $f(n) = n^2$.

Thử lại ta thấy hai hàm $f(n) = 1$ và $f(n) = n^2$ thỏa bài toán. □

Ví dụ 7 (Canada MO 2008). *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa*

$$f(n)^p \equiv n \pmod{f(p)},$$

*với mọi số nguyên dương $n$ và mọi số nguyên tố $p$.*

Lời giải. Cho $n = p$, ta có

$$p \equiv 0 \pmod{f(p)},$$

suy ra $f(p) = p$ hoặc $f(p) = 1$. Đặt $A = \{p \in \mathcal{P} \colon f(p) = p\}$.

- Nếu $A$ là tập vô hạn, khi đó ta có

  $$n \equiv f(n)^p \equiv f(n) \pmod{p}, \forall p \in A.$$

  Suy ra $f(n) = n$.

- Nếu $A =$ , khi đó $f(p) = 1$, $\forall p \in \mathcal{P}$. Ta thấy các hàm này thỏa bài toán.

- Nếu $A \neq$ và $A$ hữu hạn. Gọi $q$ là phần tử lớn nhất của tập $A$. Nếu $q \geqslant 3$, thì với mọi số nguyên tố $p > q$, ta có

  $$p \equiv (f(p))^q \equiv 1 \pmod{q}.$$

  Giữa hai số $q$ và $2q$ luôn tồn tại một số nguyên tố$p$ và $p \equiv 1 \pmod{q}$. Điều này vô lí. Do đó $q = 2$, hay $A = \{2\}$. Tức là $f(2) = 2$ và $f(p) = 1$ với mọi số nguyên tố $p \geqslant 3$. Khi đó, ta có

  $$n \equiv f(n)^2 \pmod{2},$$

  suy ra $f(n)$ và $n$ cùng tính chẵn lẻ.

Vậy

- $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.
- $f(p) = p$, $\forall p \in \mathcal{P}$.
- $f(2) = 2$, $f(p) = 1$, $\forall p \in \mathcal{P}$, $p \geqslant 3$ và $f(n)$ với $n$ cùng tính chẵn lẻ với $n$ là hợp số.

Thử lại ta thấy các nghiệm này đều thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Ví dụ 8 (IMO Shortlist 2012, N3). *Cho $n$ là số nguyên dương lẻ. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn*

$$f(x) - f(y) \mid x^n - y^n,$$

*với mọi $x$, $y \in \mathbb{Z}$.*

Lời giải. Ta thấy, nếu $f$ là hàm thỏa yêu cầu bài toán thì $f + c$ cũng thỏa yêu cầu bài toán. Do đó, ta có thể giả sử $f(0) = 0$. Xét $p$ là một số nguyên tố, $P(p, 0)$ ta có

$$f(p) \mid p^n \Rightarrow f(p) = \pm p^d,\ 0 \leqslant d \leqslant p.$$

Do $f$ thỏa bài toán thì $-f$ cũng thỏa bài toán, nên ta chỉ xét $f(p) = p^d$. Nếu $d = 0$ thì $f$ là hàm hằng, do đó $f(x) - f(y) = 0,\ \forall x,\ y \in \mathbb{Z}$. Do đó $d > 0$ và $d$ lẻ.

Ta viết $n = md + r,\ 0 \leqslant r < d$. Khi đó $P(p, y)$ ta có

$$p^d - f(y) \mid p^n - y^n = p^r \cdot p^{md} - y^n = p^r \cdot f(p)^m - y^n.$$

Suy ra

$$p^d - f(y) \mid p^r f(p)^m - y^n - p^r(f(p)^m - f(y)^m) = p^r f(y)^m - y^n.$$

mà $d > r$, nên với số nguyên tố $p$ đủ lớn, ta có

$$p^d - f(y) > |p^r f(y)^m - y^n| \Rightarrow p^r - f(y)^m - y^n = 0,\ \forall y \in \mathbb{Z}.$$

Suy ra $r = 0$ và

$$f(y)^m = y^n = (y^d)^m \Rightarrow f(x) = y^d.$$

Vậy $f(x) = \pm x^d + c$ là hàm cần tìm với $d$ là ước nguyên dương của $n$. □

Ví dụ 9 (BMO 2020). *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ sao cho với mọi số nguyên dương $n$, ta luôn có*

*i)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$ *là số chính phương.*

*ii)* $f(n)$ *chia hết* $n^3$.

Lời giải. Ta chứng minh $f(n) = n^3$ bằng phương pháp quy nạp. Với $n = 1$, ta có

$$f(1) \mid 1^3 = 1 \Rightarrow f(1) = 1.$$

Giả sử $f(i) = i^3$ với mọi $i \in [1, k-1]$, $k \geqslant 2$. Ta chứng minh $f(k) = k^3$. Ta có

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(k) = (1^3 + \cdots + (k-1)^3) + f(k) = \left(\mathrm{C}_k^2\right)^2 + f(k) = m^2,$$

với $m > \mathrm{C}_k^2$ là số nguyên dương. Ta viết $m = \mathrm{C}_k^2 + \ell$ với $\ell \leqslant k$ là số nguyên dương nào đó. Ta có

$$f(k) = m^2 - \left(\mathrm{C}_k^2\right)^2 = \ell(k(k-1) + \ell) = \ell(k^2 - k + \ell).$$

Do $f(k) \mid k^3$, nên ta có

$$\ell(k^2 - k + \ell) \mid k^3\ell - k\ell(k^2 - k + \ell) = k^2\ell - k\ell^2,$$

hay

$$k^2 - k + \ell \mid k^2 - k\ell.$$

Tuy nhiên, ta luôn có

$$k^2 - k + \ell > k^2 - k\ell,$$

nên suy ra $k^2 - k\ell = 0$, hay $l = k$. Suy ra $f(k) = k^3$. Vậy $f(n) = n^3$ là hàm cần tìm. □

Qua các ví dụ trên, ta thấy việc sử dụng tính chia hết của số 0 giúp chúng ta giải quyết bài toán một cách tự nhiên và đơn giản. Sau đây là một số bài tập cũng được giải quyết theo cách trên.

Bài 1 (IMO Shortlist 2013, N1). Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n, \qquad m, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Bài 2 (APMO 2019). Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$f(a) + b \mid a^2 + f(a)f(b), \qquad \forall a, b \in \mathbb{Z}^+.$$

Bài 3 (INMO 2018). Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn đồng thời

(i) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$.

(ii) $m + n \mid f(m) + f(n)$.

Với mọi $m, n \in \mathbb{Z}^+$.

Bài 4. Cho $k \in \mathbb{N}^*$, tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ sao cho với $\forall m, n$ ta có

$$f(m) + f(n) \,\Big|\, (m+n)^k.$$

# XUNG QUANH BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRONG ĐỀ THI VMO 2020 - 2021

Võ Quốc Bá Cẩn

Trong đề thi VMO 2020 – 2021, ngày thứ nhất, có bài toán phương trình hàm sau.

**Bài toán 1.** *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x)f(y)=f(xy-1)+xf(y)+yf(x),\quad \forall x,\,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải của chúng tôi cho bài toán này như sau.

**Lời giải.** Đặt $a=f(1)$. Thay $y=1$ vào phương trình $(1)$, ta được

$$(a-1)f(x)=f(x-1)+ax,\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Nếu $a=1$ thì ta có $f(x-1)=-x$ với mọi số thực $x$, từ đó $f(x)=-x-1$ với mọi số thực $x$. Tuy nhiên, khi thử lại, hàm này không thỏa mãn các yêu cầu bài toán. Do đó $a\neq 1$.

Từ phương trình $(2)$, ta dễ dàng tính được $f(2)=\frac{3a}{a-1}$ và $f(3)=\frac{3a^2}{(a-1)^2}$. Thay $x=y=2$ vào phương trình $(1)$, ta được $\big(f(2)\big)^2=f(3)+4f(2)$, hay

$$\left(\frac{3a}{a-1}\right)^2=\frac{3a^2}{(a-1)^2}+\frac{12a}{a-1}.$$

Giải phương trình trên, ta được $a=0$ hoặc $a=2$.

- Trường hợp 1: $\boldsymbol{a=2}$. Khi đó, phương trình $(2)$ có thể được viết lại thành

  $$f(x)=f(x-1)+2x,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

  Từ đó $f(0)=0$. Ngoài ra, phương trình $(1)$ có thể được viết lại thành

  $$f(x)f(y)=f(xy)-2xy+xf(y)+yf(x),\quad \forall x,\,y\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

  Thay $y=\frac{1}{x}+1$ với $x\neq 0$ vào phương trình trên, ta được

  $$f(x)\left[f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{x}+2\right]=f(x+1)-2x-2+x\left[f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{x}+2\right]+\left(\frac{1}{x}+1\right)f(x),$$

hay

$$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}f(x)=2x+2+xf\left(\frac{1}{x}\right),\quad \forall x\neq 0.$$

Thay $y=\frac{1}{x}$ với $x\neq 0$ vào phương trình $(3)$, ta được

$$f(x)\left(\frac{1}{x}\right)=xf\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}f(x),\quad \forall x\neq 0.$$

Kết hợp với kết quả trên, ta được $\frac{2}{x}f(x)=2x+2$ với mọi số thực $x\neq 0$. Từ đó $f(x)=x^2+x$ với mọi số thực $x\neq 0$. Mà $f(0)=0$ nên ta có $f(x)=x^2+x$ với mọi số thực $x$. Hàm này thỏa mãn các yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 2: $\boldsymbol{a=0}$. Khi đó, phương trình $(2)$ có thể được viết lại thành

  $$f(x)=-f(x-1),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

  Từ đó $f(0)=0$ và $f(-1)=0$. Ngoài ra, phương trình $(1)$ có thể được viết lại thành

  $$f(x)f(y)=-f(xy)+xf(y)+yf(x),\quad \forall x,\,y\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

  Thay $y\frac{1}{x}+1$ với $x\neq 0$ vào phương trình trên, ta được

  $$-f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x+1)-xf\left(\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x}+1\right)f(x),$$

  hay

  $$-f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=-xf\left(\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x}+2\right)f(x),\quad \forall x\neq 0.$$

  Thay $y=\frac{1}{x}$ với $x\neq 0$ vào phương trình $(4)$, ta được

  $$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=xf\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}f(x),\quad \forall x\neq 0.$$

  Kết hợp hai kết quả trên lại, ta được $\left(\frac{2}{x}+2\right)f(x)=0$ với mọi số thực $x\neq 0$. Từ đó $f(x)=0$ với mọi số thực $x\notin\{0,\,-1\}$. Mà $f(0)=f(-1)=0$ nên ta có $f(x)=0$ với mọi số thực $x$. Hàm này thỏa mãn các yêu cầu bài toán.

Tóm lại, có hai hàm số thỏa mãn yêu cầu là $f(x)=0$ và $f(x)=x^2+x$. $\square$

Có thể thấy ý tưởng chính của lời giải là thiết lập một mối quan hệ "kiểu truy hồi" giữa $f(x-1)$ và $f(x)$ để từ đó tính được giá trị của hàm số tại mọi điểm nguyên theo một tham số nào đó (chẳng hạn, trong bài toán này ta tính theo $a=f(1)$). Sau đó, bằng phép thế thích hợp, ta tìm được giá trị của tham số và thiết lập được những hệ thức quan trọng giúp ích cho việc giải bài toán.

Sử dụng ý tưởng này, ta có thể giải được nhiều bài toán phương trình ham hay và khó trong các đề thi Olympic Toán. Chúng ta hãy cùng xem xét các bài toán sau.

**Bài toán 2 (IMO Shortlist, 2005).** *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+y)+f(x)f(y)=f(xy)+2xy+1,\quad \forall x,\, y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

**Lời giải.** Đặt $a=f(1)$. Thay $y=1$ phương trình $(1)$, ta được

$$f(x+1)=(1-a)f(x)+2x+1,\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ đây, ta dễ dàng tính được $f(2)=-a^2+a+3$. Mặt khác, bằng cách thay $x=y=2$ vào phương trình $(1)$, ta lại có $\big(f(2)\big)^2=9$. Do đó $(-a^2+a+3)^2=9$, hay $a\in\{-2,\,0,\,1,\,3\}$.

- Trường hợp 1: $\boldsymbol{a=1}$. Hệ thức $(2)$ có thể được viết lại thành $f(x+1)=2x+1$ với mọi số thực $x$. Từ đó $f(x)=2(x-1)=2x-1$ với mọi số thực $x$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.
- Trường hợp 2: $\boldsymbol{a=0}$. Hệ thức $(2)$ có thể được viết lại thành

  $$f(x+1)=f(x)+2x+1,\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2'}$$

  Thay $y$ bởi $y+1$ vào phương trình $(1)$ rồi sử dụng hệ thức $(2')$, ta được

  $$f(x+y)+2(x+y)+1+f(x)\big[f(y)+2y+1\big]=f(xy+x)+2(xy+x)+1,\quad \forall x,\, y\in\mathbb{R}.$$

  Đối chiếu kết quả này với chính phương trình $(1)$, ta được

  $$f(xy+x)=(2y+1)f(x)+f(xy)+2y+1,\quad \forall x,\, y\in\mathbb{R}.$$

  Thay $y=\frac{1}{x}$ với $x\neq 0$ vào phương trình trên và sử dụng hệ thức $(2')$, ta được

  $$\left(\frac{2}{x}+1\right)f(x)+\frac{2}{x}+1=f(x+1)=f(x)+2x+1,$$

  từ đó $f(x)=x^2-1$ với mọi $x\neq 0$. Mặt khác, từ $(2')$, ta cũng dễ thấy $f(0)=-1=0^2-1$ nên $f(x)=x^2-1$ với mọi số thực $x$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.
- Trường hợp 3: $\boldsymbol{a=-2}$. Hệ thức $(2)$ có thể được viết lại thành

  $$f(x+1)=3f(x)+2x+1,\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2''}$$

  Thay $y$ bởi $y+1$ vào phương trình $(1)$ rồi sử dụng hệ thức $(2'')$, ta được

  $$3f(x+y)+2(x+y)+1+f(x)\big[3f(y)+2y+1\big]=f(xy+x)+2(xy+x)+1,\quad \forall x,\, y\in\mathbb{R}.$$

  Đối chiếu kết quả này với chính phương trình $(1)$, ta được

  $$f(xy+x)=(2y+1)f(x)+3f(xy)+4xy+2y+3,\quad \forall x,\, y\in\mathbb{R}.$$

  Thay $y=\frac{1}{x}$ với $x\notin\{0,\,1\}$ vào phương trình trên và sử dụng hệ thức $(2'')$, ta được

  $$\left(\frac{2}{x}+1\right)f(x)+\frac{2}{x}+1=f(x+1)=3f(x)+2x+1,$$

  từ đó $f(x)=-x-1$ với mọi số thực $x\notin\{0,1\}$. Mặt khác, từ $(2'')$, dễ thấy $f(0)=-1=-0-1$. Ngoài ra, ta cũng có $f(1)=-2=-1-1$ nên $f(x)=-x-1$ với mọi số thực $x$. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn các yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 4: $\boldsymbol{a = 3}$. Hệ thức $(2)$ có thể được viết lại thành

$$f(x+1) = -2f(x) + 2x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2'''}$$

Thay $y$ bởi $y+1$ vào phương trình $(1)$ rồi sử dụng hệ thức $(2'')$, ta được

$$-2f(x+y)+2(x+y)+1+f(x)\big[-2f(y)+2y+1\big] = f(xy+x)+2(xy+x)+1, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Đối chiếu kết quả này với chính phương trình $(1)$, ta được

$$f(xy+x) = (2y+1)f(x) - 2f(xy) - 6xy + 2y - 2, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Thay $y = \frac{1}{x}$ với $x \notin \left\{0,\ -\frac{2}{3}\right\}$ vào phương trình trên, ta được

$$\left(\frac{2}{x}+1\right)f(x) + \frac{2}{x} - 14 = f(x+1) = -2f(x) + 2x + 1,$$

từ đó $f(x) = \frac{2x^2+15x-2}{3x+2}$ với mọi số thực $x \notin \left\{0,\ -\frac{2}{3}\right\}$. Suy ra $f(-1) = 15$. Mặt khác, từ $(2''')$, ta dễ dàng tính được $f(0) = -1$ và $f(-1) = 0 \neq 15$, mâu thuẫn.

Vậy các hàm số thỏa mãn yêu cầu là $f(x) = x-1$, $f(x) = x^2-1$ và $f(x) = -x-1$. □

Bài toán 3. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải. Đặt $a = f(1)$. Thay $y = 1$ vào phương trình $(1)$, ta được

$$f(x+1) = (a-1)f(x) + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ đó, ta tính được $f(2) = a^2 - a + 1$ và $f(4) = a^4 - 3a^3 + 4a^2 - 2a + 1$. Mặt khác, từ $(1)$, ta lại có $2f(4) = \big(f(2)\big)^2 + 1$ nên $2(a^4 - 3a^3 + 4a^2 - 2a + 1) = (a^2 - a + 1)^2 + 1$, hay $a(a-2)(a-1)^2 = 0$. Suy ra $a \in \{0,\ 1,\ 2\}$.

- Trường hợp 1: $\boldsymbol{a = 1}$. Hệ thức $(2)$ có thể được viết lại thành $f(x+1) = 1$ với mọi số thực $x$. Từ đó, ta có $f(x) = 1$ với mọi số thực $x$. Hàm này thỏa mãn các yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 2: $\boldsymbol{a = 0}$. Hệ thức $(2)$ có thể được viết lại thành

$$f(x+1) + f(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2'}$$

Từ đó, ta có $f(0) = 1$ và $f(x+2) = 1 - f(x+1) = f(x)$ với mọi số thực $x$. Thay $y = 2$ vào phương trình $(1)$, ta được $f(2x) = f(x)f(2) - f(x+2) + 1 = f(x) - f(x+2) + 1 = 1$ với mọi số thực $x$. Suy ra $f(x) = 1$ với mọi số thực $x$, mâu thuẫn vì $f(1) = 0$.

- Trường hợp 3: $\boldsymbol{a = 2}$. Hệ thức $(2)$ có thể được viết lại thành

$$f(x+1) = f(x) + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2''}$$

Thay $y$ bởi $y+1$ vào phương trình $(1)$ và sử dụng hệ thức $(2'')$, ta được

$$f(xy+x) = f(x)\big[f(y)+1\big] - f(x+y), \quad \forall x,\, y \in \mathbb{R}.$$

Đối chiếu kết quả này với chính phương trình $(1)$, ta được

$$f(x+xy) = f(x) + f(xy) - 1, \quad \forall x,\, y \in \mathbb{R}.$$

Thay $y$ bởi $\frac{y}{x}$ với $x \neq 0$ vào phương trình trên, ta được

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - 1, \quad \forall x \neq 0,\, y \in \mathbb{R}.$$

Mặt khác, từ $(2'')$, ta dễ dàng suy ra $f(0) = 1$ nên $f(0+y) = f(0) + f(y) - 1$. Do đó, ta có

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - 1, \quad \forall x,\, y \in \mathbb{R}.$$

Đặt $g(x) = f(x) - 1$ thì từ kết quả trên, ta dễ dàng suy ra $g$ là hàm cộng tính trên $\mathbb{R}$. Ngoài ra, từ phương trình $(1)$, ta cũng có

$$g(xy) = \big[g(x)+1\big]\big[g(y)+1\big] - g(x+y) - 1 = g(x)g(y) + g(x) + g(y) - g(x+y) = g(x)g(y).$$

Suy ra $g$ cũng là hàm nhân tính trên $\mathbb{R}$. Hàm $g$ vừa cộng tính vừa nhân tính trên $\mathbb{R}$ và $g(1) = 1$ nên $g(x) = x$ với mọi số thực $x$. Do đó $f(x) = x+1$ với mọi số thực $x$. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn các yêu cầu bài toán.

Vậy các hàm số thỏa mãn yêu cầu là $f(x) = 1$ và $f(x) = x+1$. □

**Bài toán 4 (Bulgaria, 2005).** *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ thỏa mãn*

$$f(x^2+y) = \big(f(x)\big)^2 + \frac{f(xy)}{f(x)} \tag{1}$$

*với mọi số thực $x,\, y \neq 0$ sao cho $x^2 + y \neq 0$. (Ở đây $\mathbb{R}^*$ được ký hiệu là tập các số thực khác $0$.)*

**Lời giải.** Đặt $a = f(1)$. Thay $x = 1$ vào phương trình $(1)$, ta được

$$f(y+1) = \frac{1}{a} f(y) + a^2, \quad \forall y \notin \{0,\, -1\}. \tag{2}$$

Từ đây, ta dễ dàng tính được $f(2) = a^2 + 1$ và $f(5) = \frac{a^5+a^4+a^3+a^2+1}{a^3}$. Mặt khác, thay $x = 2$ và $y = 1$ vào phương trình $(1)$, ta lại có $f(5) = \big(f(2)\big)^2 + 1$. Do đó

$$\frac{a^5+a^4+a^3+a^2+1}{a^3} = (a^2+1)^2 + 1,$$

hay

$$(a^3-1)(a^2+a+1)^2 = 0.$$

Suy ra $a = 1$. Hệ thức $(2)$ có thể được viết lại thành

$$f(y+1) = f(y) + 1, \quad \forall y \notin \{0,\, -1\}. \tag{2'}$$

Thay $y$ bởi $y+1$ với $y \notin \{0,\ -1,\ -x^2,\ -x^2-1\}$ vào phương trình $(1)$ và sử dụng hệ thức $(2')$, ta được

$$f(x^2+y)+1 = \big(f(x)\big)^2 + \frac{f(xy+x)}{f(x)}.$$

Đối chiếu với chính phương trình $(1)$, ta được

$$f(xy+x) = f(xy)+f(x), \quad \forall x,\, y \in \mathbb{R}^*,\ y \notin \{0,\ -1,\ -x^2,\ -x^2-1\}.$$

Thay $y$ bởi $\frac{y}{x}$ vào phương trình trên, ta được

$$f(x+y) = f(x)+f(y), \quad \forall x,\, y \in \mathbb{R}^*,\ y \notin \{0,\ -x,\ -x^3,\ -x^3-x\}. \tag{3}$$

Từ đây, dễ dàng suy ra hàm $f$ cộng tính trên $\mathbb{R}^+$. Mặt khác, thay $y=1$ (xét $x>0$) vào phương trình $(1)$ và sử dụng hệ thức $(2')$, ta được $f(x^2)+1 = f(x^2+1) = \big(f(x)\big)^2+1$. Suy ra $f(x^2) = \big(f(x)\big)^2 > 0$ với mọi số thực $x>0$. Nói riêng, ta có $f(x)>0$ với mọi số thực $x>0$. Do đó, với mọi $x>y>0$, ta có $f(x) = f(x-y+y) = f(x-y)+f(y) > f(y)$. Suy ra hàm $f$ cộng tính và tăng ngặt trên $\mathbb{R}^+$. Từ đó, kết hợp với $f(1)=1$, ta được $f(x)=x$ với mọi số thực $x>0$.

Bây giờ, trong $(3)$, ta cố định $x \in \mathbb{R}^*$ và chọn $y>0$ đủ lớn sao cho $y+x>0$ và $y \neq \{-x^3,\ -x^3-x\}$, ta dễ dàng tính được $f(x) = f(x+y)-f(y) = (x+y)-y = x$. Do đó $f(x)=x$ với mọi $x\in\mathbb{R}^*$. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn các yêu cầu bài toán. $\square$

Trong một số tình huống, để tăng tính hiệu quả, thay vì đi tìm mối quan hệ giữa $f(x+1)$ và $f(x)$, ta có thể đi tìm mối quan hệ giữa $f(x+c)$ và $f(x)$ với $c$ là hằng số thực nào đó.

Bài toán 5. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn*

$$f\big(x^2+f(y)\big) = y+\big(f(x)\big)^2, \quad \forall x,\, y\in\mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Lời giải. Đặt $a=f(1)$. Từ phương trình $(1)$, ta được

$$f\big(f(y)+1\big) = y+a^2, \quad \forall y\in\mathbb{N}^*.$$

Thay $y$ bởi $f(y)+1$ vào phương trình trên, ta được

$$f(y+a^2+1) = f(y)+a^2+1, \quad \forall y\in\mathbb{N}^*.$$

Từ đó, bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$f\big(y+n(a^2+1)\big) = f(y)+n(a^2+1), \quad \forall y,\, n\in\mathbb{N}^*. \tag{2}$$

Bây giờ, thay $x$ bởi $x+a^2+1$ vào $(1)$ và sử dụng kết quả $(2)$ ở trên, ta được

$$f\big((x+a^2+1)^2+f(y)\big) = y+\big(f(x)+a^2+1\big)^2, \quad \forall x,\, y\in\mathbb{N}^*.$$

Mặt khác, cũng theo kết quả $(2)$, ta có

$$\begin{aligned} f\big((x+a^2+1)^2+f(y)\big) &= f\big(x^2+f(y)+2x(a^2+1)+(a^2+1)^2\big) \\ &= f\big(x^2+f(y)\big)+2x(a^2+1)+(a^2+1)^2 \\ &= y+\big(f(x)\big)^2+2x(a^2+1)+(a^2+1)^2. \end{aligned}$$

Do đó

$$\big(f(x)\big)^2 + 2x(a^2+1) + (a^2+1)^2 = \big(f(x)+a^2+1\big)^2, \quad \forall x \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đây, ta dễ dàng suy ra $f(x) = x$ với mọi số nguyên dương $x$. Thử lại, ta thấy hàm số này thỏa mãn các yêu cầu bài toán. □

Bài toán 6. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f\big(xf(x) + f(y)\big) = \big(f(x)\big)^2 + y \tag{1}$$

*với mọi số thực $x,\ y > 0$. (Ở đây $\mathbb{R}^+$ được ký hiệu là tập các số thực dương.)*

Lời giải. Đặt $a = f(1)$. Từ giả thiết, ta có

$$f\big(f(y) + a\big) = y + a^2, \quad \forall y > 0 \tag{2}$$

và

$$f\big(xf(x) + a\big) = f^2(x) + 1, \quad \forall x > 0. \tag{3}$$

Từ $(2)$, dễ thấy $f$ đơn ánh và $f$ có thể nhận mọi giá trị trên $(a^2,\ +\infty)$. Kết hợp $(2)$ và $(3)$, ta có

$$f\big(f^2(x) + 1 + a\big) = f\ \big(f\big(xf(x)+a\big) + a\big) = xf(x) + a + a^2, \quad \forall x > 0.$$

Từ đây, kết hợp với $(2)$ và $(1)$, ta được

$$f\ \big(f\big(f^2(x) + a + 1\big) + f(y) - a - a^2\big) = f^2(x) + f\big(f(y)+a\big) - a^2.$$

Do $f^2(x) + a + 1$ có thể nhận mọi giá trị trên $\big(a^4 + a + 1,\ +\infty\big)$ và $f(y) + a$ có thể nhận mọi giá trị trên $(a^2 + a,\ +\infty)$ nên từ phương trình trên, ta có

$$f\big(f(x) + y - 2a - a^2\big) = x + f(y) - 1 - a - a^2 \tag{4}$$

với mọi $x,\ y > a^4 + a + 1$. Trong $(2)$, thay $y$ bởi $f(y) + a$, ta được

$$f(y + a + a^2) = f(y) + a + a^2, \quad \forall y > 0.$$

Từ đó, bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$f\big(y + n(a+a^2)\big) = f(y) + n(a+a^2), \quad \forall y > 0,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Cố định $x > a^4 + a + 1$ và $y > 0$. Rõ ràng tồn tại số nguyên dương $n_1$ sao cho $n_1(a+a^2) > a^4 + a + 1$. Bây giờ, thay $y$ bởi $f\big(y + (n_1+1)(a+a^2)\big) + a = f(y) + (n_1+1)(a+a^2) + a$ vào phương trình $(4)$ và sử dụng kết quả $(2)$, ta được

$$f\big(f(x) + f(y) + n_1(a+a^2)\big) = x + y + n_1(a+a^2) + a^2 - 1,$$

hay

$$f\big(f(x) + f(y)\big) = x + y + a^2 - 1, \quad \forall x > a^4 + a + 1,\ y > 0.$$

Tiếp tục, cố định $x,\ y > 0$ và thay $x$ bởi $x + n_1(a+a^2)$ vào phương trình trên, ta được

$$f\big(f(x) + f(y) + n_1(a+a^2)\big) = x + y + n_1(a+a^2) + a^2 - 1,$$

hay
$$f\big(f(x)+f(y)\big) = x+y+a^2-1, \quad \forall x,\, y>0.$$
Thay $(x,\, y)$ bởi $\left(\frac{x+y}{2},\, \frac{x+y}{2}\right)$ vào phương trình trên và đối chiếu, ta suy ra hàm $f$ thỏa mãn phương trình hàm Jensen. ta được
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad \forall x,\, y>0. \tag{5}$$

Phương trình $(5)$ được gọi là phương trình hàm Jensen. Với miền $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thì nghiệm của phương trình hàm này có dạng $f(x) = mx+b$ với $m,\, b$ là các hằng số thực không âm thỏa mãn $m+b>0$. Một trong các phương pháp thông dụng để giải phương trình này là thêm biến.

Với mọi số thực $x,\, y,\, z>0$, ta có
$$f\left(\frac{x+y+z}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y+z)}{2} = \frac{f(x)+\frac{f(2y)+f(2z)}{2}}{2} = \frac{2f(x)+f(2y)+f(2z)}{4}.$$
Bằng cách đảo vị trí của $x$ và $y$, ta thu được
$$f(2x)-2f(x) = f(2y)-2f(y), \quad \forall x,\, y>0.$$
Từ đó suy ra tồn tại hằng số $b$ sao cho $f(2x)-2f(x) = -b$ với mọi số thực $x>0$. Phương trình $(5)$ có thể được viết lại thành
$$f(x+y)+b = f(x)+f(y), \quad \forall x,\, y>0.$$
Đặt $g(x) = f(x)-b$. Khi đó, dễ thấy hàm $g$ cộng tính từ $\mathbb{R}^+$ vào $(-b,\, +\infty)$. Vì $g$ cộng tính nên bằng quy nạp, ta dễ dàng chứng minh được
$$g(nx) = ng(x), \quad \forall x>0,\, n\in\mathbb{N}^*.$$
Do $g(nx) > -b$ nên ta có $g(x) > -\frac{b}{n}$ với mọi số thực $x>0$ và với mọi số nguyên dương $n$. Cho $n\to+\infty$, ta được $g(x)\geqslant 0$ với mọi số thực $x>0$. Từ đó, với mọi số thực $x>y>0$, ta có
$$g(x) = g(x-y+y) = g(x-y)+g(y) \geqslant g(y).$$
Suy ra hàm $g$ không giảm và cộng tính từ $\mathbb{R}^+$ vào $[0,\, +\infty)$ (ta vừa chứng minh $g(x)\geqslant 0$ với mọi $x>0$ ở trên). Và vì thế, ta có $g(x) = mx$ với mọi số thực $x>0$, trong đó $m$ là hằng số thực không âm (do $g$ không giảm), hay $f(x) = mx+b$ với mọi số thực $x>0$. Vì $f(x)>0$ với mọi $x>0$ nên $mx+b>0$ với mọi $x>0$, tức ta phải có $b\geqslant 0$ và $m+b>0$.

Bây giờ, thay kết quả này trở lại phương trình $(1)$ và đồng nhất hệ số, ta được $f(x)=x$ với mọi $x>0$. Hàm này thỏa mãn các yêu cầu bài toán. □

Bài toán 7. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn*
$$f\big(x+f(xy)\big) = f(x)+xf(y) \tag{1}$$
*với mọi số thực $x,\, y>0$. (Ở đây $\mathbb{R}^+$ được ký hiệu là tập các số thực dương.)*

Lời giải. Đặt $a = f(1)$. Thay $x = 1$ vào phương trình $(1)$, ta được

$$f\big(f(y)+1\big) = f(y) + a, \quad \forall y > 0. \tag{2}$$

Nói riêng, ta có $f(1+a) = 2a$. Thay $x = 1 + a$ và thay $y$ bởi $\frac{y}{1+a}$ vào phương trình $(1)$, ta được

$$f\big(1 + a + f(y)\big) = 2a + (1+a)f\left(\frac{y}{1+a}\right), \quad \forall y > 0.$$

Mặt khác, theo $(2)$, ta lại có

$$f\big(1 + a + f(y)\big) = f\left(1 + f\big(1 + f(y)\big)\right) = a + f\big(1 + f(y)\big) = 2a + f(y).$$

Do đó

$$f(y) = (1+a)f\left(\frac{y}{1+a}\right), \quad \forall y > 0.$$

Thay $y = 1 + a$ vào phương trình trên, ta được $2a = a(1+a)$. Từ đó $a = 1$ và như thế ta có

$$f(y) = 2f\left(\frac{y}{2}\right), \quad \forall y > 0. \tag{3}$$

Phương trình $(2)$ có thể được viết lại thành

$$f\big(f(y)+1\big) = f(y) + 1, \quad \forall y > 0.$$

Từ đây, bằng quy nạp, ta dễ dàng chứng minh được $f(n) = n$ và

$$f\big(f(y)+n\big) = f(y) + n, \quad \forall y > 0,\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{4}$$

Lần lượt thay $y$ bởi $\frac{1}{x}$ và $\frac{2}{x}$ vào phương trình $(1)$ với chú ý ở kết quả $(3)$, ta được

$$f(x+1) = f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right), \quad \forall x > 0$$

và

$$f(x+2) = f(x) + 2xf\left(\frac{1}{x}\right), \quad \forall x > 0.$$

Từ đó suy ra

$$f(x+2) - f(x+1) = xf\left(\frac{1}{x}\right), \quad \forall x > 0.$$

Thay $x$ bởi $f(x)$ vào phương trình trên và sử dụng kết quả $(4)$, ta suy ra

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{f(x)}, \quad \forall x > 0.$$

Thay $x$ bởi $\frac{1}{f(x)}$ vào phương trình và sử dụng chính kết quả này, ta được

$$f\big(f(x)\big) = f(x), \quad \forall x > 0. \tag{5}$$

Bây giờ, ta sẽ chứng minh hàm $f$ đơn ánh. Thật vậy, giả sử tồn tại hai số thực $u > v > 0$ sao cho $f(u) = f(v)$. Thay $y$ bởi $\frac{u}{x}$ và $\frac{v}{x}$ vào phương trình $(1)$ rồi đối chiếu các kết quả với nhau, ta được

$$f\left(\frac{u}{x}\right) = f\left(\frac{v}{x}\right), \quad \forall x > 0.$$

Từ đó suy ra $f(x) = f(kx)$ với mọi số thực $x > 0$, trong đó $k = \frac{u}{v} > 1$. Thay $y$ bởi $\frac{y}{x}$ vào phương trình $(1)$ và sử dụng kết quả này, ta được

$$f\big(x + f(y)\big) = f(x) + xf\left(\frac{y}{x}\right) = f(kx) + xf\left(\frac{y}{x}\right).$$

Thay $x = \frac{f(y)}{k-1}$ vào phương trình trên, ta được $\frac{f(y)}{k-1} f\left(\frac{(k-1)y}{f(y)}\right) = 0$, mâu thuẫn. Vậy $f$ đơn ánh.

Từ đây, kết hợp với kết quả $(5)$, ta suy ra $f(x) = x$ với mọi số thực $x > 0$. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn các yêu cầu bài toán. □

Bài toán 8 (VMO, 2017). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn hệ thức*

$$f\big(xf(y) - f(x)\big) = 2f(x) + xy \tag{1}$$

*với mọi số thực $x$, $y$.*

Lời giải. Thay $x = 1$ vào phương trình $(1)$, ta được

$$f\big(f(y) - f(1)\big) = y + 2f(1), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ đây có thể thấy hàm $f$ là một song ánh. Do đó, tồn tại duy nhất số thực $a$ để $f(a) = 0$. Thay $x = a$ vào phương trình $(1)$, ta được

$$f\big(af(y)\big) = ay, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Trong phương trình $(3)$, cho $y = 0$, ta được $f\big(af(0)\big) = 0 = f(a)$. Từ đó, do $f$ đơn ánh nên ta có $af(0) = a$. Suy ra $a = 0$ hoặc $f(0) = 1$.

Xét trường hợp $a = 0$, tức $f(0) = 0$. Thay $y = 0$ vào phương trình $(1)$, ta được $f\big(-f(x)\big) = 2f(x)$. Do $f$ toàn ánh nên ta có $f(x) = -2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tuy nhiên, khi thử lại, hàm này không thỏa mãn phương trình $(1)$. Do đó $a \neq 0$, suy ra $f(0) = 1$.

Thay $x = 0$ vào phương trình $(1)$, ta được $f(-1) = 2$. Thay $y = a$ vào $(3)$, ta được $a^2 = f(0) = 1$, suy ra $a = 1$ (do $f(-1) = 2$), tức $f(1) = 0$. Từ đó, phương trình $(2)$ có thể viết lại dưới dạng

$$f\big(f(y)\big) = y, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{2'}$$

Bây giờ, lần lượt thay $y$ bởi $f(y)$ và thay $x$ bởi $f(x)$ vào phương trình $(1)$, kết hợp với $(2')$, ta thu được các kết quả sau

$$f\big(xy - f(x)\big) = 2f(x) + xf(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{3}$$

và

$$f\big(f(x)f(y) - x\big) = 2x + yf(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Thay $x=-1$ vào hai phương trình $(3)$ và $(4)$, ta được

$$f(-y-2)=4-f(y)\Rightarrow f(y-2)+f(-y)=4,\quad \forall y\in\mathbb{R} \tag{5}$$

và

$$f\big(2f(y)+1\big)=-2+2y\Rightarrow f(2y-2)=2f(y)+1,\quad \forall y\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Thay $y=0$ vào phương trình $(3)$, ta được

$$f\big(f(x)-x\big)=2x\Rightarrow f(x)-x=f(2x),\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{7}$$

Thay $y=1$ vào phương trình $(1)$, ta được

$$f\big(-f(x)\big)=2f(x)+x\Rightarrow f(-x)=2x+f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{8}$$

Kết hợp hai kết quả $(5)$ và $(8)$, ta được

$$4-f(x-2)=2x+f(x)\Rightarrow f(x)+f(x-2)=4-2x,\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{9}$$

Kết hợp hai kết quả $(6)$ và $(7)$, ta được

$$f(2x)=f(x)-x=2f(x+1)+1\Rightarrow 2f(x)+x=f(x-1),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Thay kết quả này vào phương trình $(9)$, ta được

$$4-2x=f(x)+2f(x-1)+x-1=f(x)+2\big[2f(x)+x\big]+x-1=5f(x)+3x-1.$$

Từ đó suy ra $f(x)=-x+1$ với $x\in\mathbb{R}$. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn các yêu cầu bài toán. $\square$

Bài toán 9. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f\big(x+xy+f(y)\big)=\left[f(x)+\frac{1}{2}\right]\left[f(y)+\frac{1}{2}\right],\quad \forall x,\, y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải. Giả sử $f(-1)\neq -\frac{1}{2}$. Khi đó, thay $y=-1$ vào phương trình $(1)$, ta được

$$f\big(f(-1)\big)=\left[f(x)+\frac{1}{2}\right]\left[f(-1)+\frac{1}{2}\right],\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Suy ra $f$ là hàm hằng, tức $f(x)=c$ với mọi số thực $x$, trong đó $c$ là hằng số thực. Tuy nhiên, khi thử lại, hàm này không thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do đó $f(-1)=-\frac{1}{2}$. Từ $(2)$, ta suy ra $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$.

Thay $y=-\frac{1}{2}$ và $x=0$ vào phương trình $(1)$, ta được $f(0)=\frac{1}{2}\left[f(0)+\frac{1}{2}\right]$. Từ đó $f(0)=\frac{1}{2}$. Thay $y=0$ vào phương trình $(1)$, ta được

$$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f(x)+\frac{1}{2},\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Giả sử tồn tại số thực $a \neq -\frac{1}{2}$ sao cho $f(a) = 0$. Từ $(3)$, ta suy ra $f\left(a - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$. Thay $y = a - \frac{1}{2}$ vào phương trình $(1)$, ta được

$$f\left(\left(a + \frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{2}\right) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì $\left(a + \frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{2}$ là hàm bậc nhất theo $x$ nên có thể nhận mọi giá trị trên $\mathbb{R}$. Do đó, từ kết quả trên, ta suy ra $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, mâu thuẫn vì $f(-1) = -\frac{1}{2}$. Do đó, $f(x) = 0$ khi và chỉ khi $x = -\frac{1}{2}$.

Bây giờ, thay $x = -1$ vào phương trình $(1)$, ta được

$$f\left[f(y) - y - 1\right] = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với kết quả trên, ta được $f(y) = y + \frac{1}{2}$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = x + \frac{1}{2}$ thỏa mãn các yêu cầu bài toán. □

Bài toán 10. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x)f\left(yf(x) - 2\right) = x^2 f(y) - 2f(x), \quad \forall x,\, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải. Rõ ràng $f(x) \equiv 0$ là một nghiệm của phương trình đã cho. Xét trường hợp $f(x) \not\equiv 0$. Thay $x = y = \sqrt{2}$ vào phương trình $(1)$, ta được

$$f\left(\sqrt{2}\right) f\left(\sqrt{2} f\left(\sqrt{2}\right) - 2\right) = 0. \tag{2}$$

Giả sử tồn tại số thực $a \neq 0$ sao cho $f(a) = 0$. Thay $x = a$ vào phương trình $(1)$, ta được $a^2 f(y) = 0$ với mọi số thực $y$. Từ đó $f(y) = 0$ với mọi số thực $y$, mâu thuẫn. Do đó, ta phải có $f(x) \neq 0$ với mọi số thực $x \neq 0$. Kết hợp với $(2)$, ta suy ra $f(0) = 0$ và $f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$.

Bây giờ, thay $x = \sqrt{2}$ vào phương trình $(1)$, ta được

$$f\left(\sqrt{2}y - 2\right) = \sqrt{2} f(y) - 2, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Thay $y = \sqrt{2}$ vào phương trình $(1)$ và sử dụng kết quả trên, ta được

$$f(x) f\left(f(x)\right) = x^2, \quad \forall x,\, y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Thay $x$ bởi $\sqrt{2} f(x) - 2$ vào phương trình trên và sử dụng kết quả $(3)$, ta được

$$\left[\sqrt{2} f(x) - 2\right]\left[\sqrt{2} f\left(f(x)\right) - 2\right] = \left(\sqrt{2}x - 2\right)^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với $(4)$, ta được

$$f(x) + f\left(f(x)\right) = 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Từ $(4)$ và $(5)$, ta suy ra $f(x) = f\left(f(x)\right) = x$ với mọi số thực $x$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = x$ thỏa mãn các yêu cầu bài toán.

Vậy các hàm số thỏa mãn yêu cầu là $f(x) = 0$ và $f(x) = x$. □

Bài toán 11 (Iran, 2010). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ thỏa mãn*

$$f\left(y + \frac{x + f(x)}{2}\right) = 2x - f(x) + f\big(f(y)\big) \qquad (1)$$

*với mọi số thực không âm $x$, $y$. (Ở đây $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ được ký hiệu là tập các số thực không âm.)*

Lời giải. Trước hết, ta sẽ chứng minh hàm $f$ đơn ánh. Thật vậy, giả sử tồn tại hai số không âm $a$, $b$ với $a > b$ sao cho $f(a) = f(b)$. Khi đó, từ $(1)$, ta có

$$f\left(y + \frac{a + f(a)}{2}\right) = 2a - f(a) + f\big(f(y)\big)$$

và

$$f\left(y + \frac{b + f(b)}{2}\right) = 2b - f(b) + f\big(f(y)\big).$$

Suy ra

$$f\left(y + \frac{a + f(a)}{2}\right) = f\left(y + \frac{b + f(a)}{2}\right) + 2(a - b), \quad \forall y \geqslant 0.$$

Từ đây, ta có

$$f(y + c) = f(y) + 4c$$

với mọi $y \geqslant \frac{b+f(a)}{2}$, trong đó $c = \frac{a-b}{2} > 0$. Và như thế, bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$f(y + nc) = f(y) + 4nc$$

với mọi $y \geqslant \frac{b+f(a)}{2}$ và mọi $n \in \mathbb{N}$. Bây giờ, thay $x$ bởi $x + 2c$ vào $(1)$ và xét $x$, $y \geqslant \frac{b+f(a)}{2}$, ta được

$$f\left(y + \frac{x + f(x)}{2} + 5c\right) = 2x - f(x) - 4c + f\big(f(y)\big),$$

hay

$$f\left(y + \frac{x + f(x)}{2}\right) + 20c = 2x - f(x) - 4c + f\big(f(y)\big).$$

Đối chiếu với phương trình $(1)$, ta được $20c = -4c$, mâu thuẫn. Vậy hàm $f$ đơn ánh.

Đặt $d = f(0)$. Thay $x = d$ và $y = 0$ vào phương trình $(1)$, ta được

$$f\left(\frac{d + f(d)}{2}\right) = 2d. \qquad (1)$$

Thay $x = 0$ vào phương trình $(1)$, ta được

$$f\left(y + \frac{d}{2}\right) = f\big(f(y)\big) - d, \quad \forall y \geqslant 0. \qquad (2)$$

Do đó, phương trình $(1)$ có thể được viết lại thành

$$f\left(y + \frac{x + f(x)}{2}\right) = 2x - f(x) + d + f\left(y + \frac{d}{2}\right), \quad \forall x, y \geqslant 0.$$

Thay $x = \frac{d}{2}$ và $y = 0$ vào phương trình này, ta được

$$f\left(\frac{\frac{d}{2} + f\left(\frac{d}{2}\right)}{2}\right) = 2d. \tag{3}$$

Từ $(1)$ và $(3)$, với chú ý $f$ là hàm đơn ánh, ta suy ra $\frac{d}{2} + f(d) = \frac{d}{2} + f\left(\frac{d}{2}\right)$. Mặt khác, từ $(2)$, ta cũng có $f\left(\frac{d}{2}\right) = f(d) - d$. Do đó $\frac{d}{2} + f(d) = f(d) - d$, hay $d = 0$.

Vì $d = 0$ nên phương trình $(2)$ có thể được viết lại thành $f(y) = f\big(f(y)\big)$ với mọi $y \geqslant 0$. Do $f$ đơn ánh nên từ đây, ta suy ra $f(y) = y$ với mọi $y \geqslant 0$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = x$ thỏa mãn các yêu cầu của bài toán. □

Bài toán 12 (IMO Shortlist, 2012). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-1) \neq 0$ và*

$$f(1 + xy) - f(x + y) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải. Đặt $f(-1) = m$. Thay $x = y = 1$ vào phương trình $(1)$, ta được $f(1) = 0$. Thay $y = -1$ và thay $x$ bởi $x + 1$ vào phương trình $(1)$, ta được

$$f(-x) = f(x) + mf(x + 1), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Bây giờ, thay $y$ bởi $-y$ vào phương trình $(1)$ và sử dụng kết quả trên, ta được

$$\begin{aligned} f(1 - xy) &= f(x)f(-y) + f(x - y) = f(x)f(y) + mf(x)f(y + 1) + f(x - y) \\ &= f(x)f(y) + mf(1 + x + xy) - mf(1 + x + y) + f(x - y), \end{aligned}$$

hay

$$f(1 - xy) - f(x)f(y) + mf(1 + x + y) = mf(1 + x + xy) + f(x - y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Đảo vị trí của $x$ và $y$ trong $(3)$ rồi đối chiếu kết quả thu được với $(3)$, ta được

$$mf(1 + x + xy) + f(x - y) = mf(1 + y + xy) + f(y - x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ đây, kết hợp với kết quả $(2)$, ta được

$$m\big[f(1 + x + xy) - f(1 + y + xy)\big] = f(y - x) - f(x - y) = mf(x - y + 1),$$

hay

$$f(1 + x + xy) = f(1 + y + xy) + f(x - y + 1), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Thay $y$ bởi $y - 1$ vào phương trình trên, ta được

$$f(1 + xy) = f(y - x + xy) + f(x - y + 2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Chú ý rằng với mọi số thực $a \geqslant 0$ và với mọi số thực $b$, luôn tồn tại hai số thực $x$, $y$ sao cho $xy = a$ và $x - y = b$. Do đó, từ phương trình $(4)$, ta suy ra

$$f(1 + b) = f(b - a) + f(a + 2), \quad \forall a \geqslant 0, b \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Từ $(2)$, bằng cách cho $x = 1$, ta được $f(2) = 1$. Từ đó, bằng cách thay $a = 0$ vào phương trình $(5)$, ta được

$$f(b+1) = f(b) + 1, \quad \forall b \geqslant 0. \tag{6}$$

Bây giờ, trong phương trình $(5)$, xét $a \geqslant 0$ và sử dụng kết quả trên, ta được

$$1 + f(b) = f(1+b) = f(b-a) + f(a+2) = f(b-a) + f(a+1) + 1 = f(b-a) + f(a) + 2,$$

hay

$$f(b) = f(b-a) + f(a) + 1, \quad \forall a,\, b \geqslant 0.$$

Từ đó suy ra

$$g(b) = g(b-a) + g(a), \quad \forall a,\, b \geqslant 0, \tag{7}$$

trong đó $g(x) = f(x) + 1$. Thay $b$ bởi $b + a$ vào phương trình $(7)$, ta suy ra hàm $g$ cộng tính trên $[0,\, +\infty)$. Bây giờ, xét $x,\, y \geqslant 0$, từ phương trình $(1)$, ta có

$$\begin{aligned} 1 + g(xy) - g(x+y) = 1 + f(xy) - f(x+y) &= f(1+xy) - f(x+y) = f(x)f(y) \\ &= \big[g(x) - 1\big]\big[g(y) - 1\big] = g(x)g(y) - g(x) - g(y) + 1 \\ &= g(x)g(y) - g(x+y) + 1. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $g(xy) = g(x)g(y)$ với mọi $x,\, y \geqslant 0$. Như vậy, hàm $g$ vừa cộng tính vừa cộng tính trên miền $[0,\, +\infty)$. Kết hợp với $g(1) = f(1) + 1 = 1$, ta được $g(x) = x$ với mọi số thực $x \geqslant 0$. Từ đây, kết hợp với $(7)$, ta được $g(b-a) = b - a$ với mọi số thực $a,\, b \geqslant 0$. Vì biểu thức $b - a$ có thể nhận mọi giá trị trên $\mathbb{R}$ nên từ đây, ta suy ra $g(x) = x$ với mọi số thực $x$. Từ đó $f(x) = x - 1$ với mọi số thực $x$. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn các yêu cầu bài toán. □

## Bài tập tự luyện

Bài toán 1 (KHTN, 2013). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(x) + f(y) + f(xy) + 2xy, \quad \forall x,\, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2 (MEMO, 2010). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y+1)f(x) + (x+1)f(y), \quad x,\, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 3 (KHTN, 2010). *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f(x^3 + y) = \big(f(x)\big)^3 + \frac{f(xy)}{f(x)}$$

*với mọi số thực $x,\, y > 0$. (Ở đây $\mathbb{R}^+$ được ký hiệu là tập các số thực dương.)*

Bài toán 4. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f\big(x^2 + f(y)\big) = y + \big(f(x)\big)^2$$

*với mọi số thực $x,\, y > 0$. (Ở đây $\mathbb{R}^+$ được ký hiệu là tập các số thực dương.)*

Bài toán 5. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *thỏa mãn*

$$f\big(x^2 + y + f(y)\big) = 2y + \big(f(x)\big)^2$$

*với mọi số thực* $x,\ y > 0$. (*Ở đây* $\mathbb{R}^+$ *được ký hiệu là tập các số thực dương.*)

Bài toán 6. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f(x)f\big(yf(x) - 1\big) = x^2 f(y) - f(x), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 7 (IMO Shortlist, 2009). *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f\big(xf(x+y)\big) = f\big(yf(x)\big) + x^2, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 8 (IMO, 2015). *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) = x + f(x+y) + yf(x), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

# SÁNG TẠO QUA CÁC ĐẲNG THỨC VECTOR

Đậu Thanh Kỳ
(GV THPT Huỳnh Thúc Kháng, Nghệ An)

TÓM TẮT

Trong quá trình dạy học, nếu giáo viên thường xuyên quan tâm đến việc hướng dẫn học sinh cách học, cách khai thác sách giáo khoa và khuyến khích các em đề xuất bài toán mới, dạy học như vậy chắc chắn sẽ góp phần bồi dưỡng năng lực tự học, hứng thú, khả năng tự tìm tòi kiến thức cho học sinh và đặc biệt là phát triển được tư duy học sinh. Nội dung sáng kiến kinh nghiệm đề cập đến việc khai thác và sáng tạo các bài toán mới từ khái niệm và bài tập toán trong sách giáo khoa, sách bài tập thông qua ví dụ cụ thể. Tổng quan về đề tài gồm : Thứ nhất là khai thác khái niệm tích vô hướng. Khái niệm tích vô hướng có nhiều ứng dụng, đã có một số bài viết liên quan trên báo toán học và tuổi trẻ như: "Ứng dụng tích vô hướng vào việc giải một số bài toán đại số" của tác giả Phạm Bảo hay "Ứng dụng tích vô hướng để giải một số dạng toán" của tác giả Trần Tuấn Điệp, Đỗ Mạnh Môn. Về vấn đề khai thác và sáng tạo bài toán bất đẳng thức, cực trị từ khái niệm tích vô hướng chưa được tác giả nào nghiên cứu. Thứ hai, là hướng khai thác bài 73 trang 64, SBT hình học 11 nâng cao.

## 1. Khai thác khái niệm

Xét tình huống khái niệm tích vô hướng (Sách giáo khoa hình học 10).

### 1.1. Khái niệm và một số tính chất

Trước tiên xin nhắc lại khái niệm tích vô hướng của hai vector.

Tích vô hướng của hai vector $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ là một số, kí hiệu là $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}$, được xác định bởi

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|.\left|\overrightarrow{b}\right| cos\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right).$$

Từ $\left|cos\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)\right| \leq 1$ ta rút ra được các kết quả sau

**Bài toán 1.** *1. Cho $n$ điểm $A_1A_2...A_n$, và n số dương $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.O là điểm thoả mãn $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{0}$ khi đó với mọi điểm M ta có bất đẳng thức*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.MA_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i.MA_i \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2$$

*Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M$ trùng với $O$.*

*2. Cho $n$ điểm $A_1A_2...A_n$ và n số dương $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.O là điểm thoả mãn $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0}$ khi đó với mọi điểm M ta có bất đẳng thức*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i$$

*(trong đó $\overrightarrow{e_i}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OA_i}$ và $|\overrightarrow{e_i}| = 1$, i=1,2,... ) Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv O$.*

*Chứng minh.* 1) Ta có

$$\alpha_i OA_i.MA_i \geq \alpha_i \overrightarrow{OA_i}.\overrightarrow{MA_i}, \forall i = \overline{1,n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i.MA_i \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}.\overrightarrow{MA_i}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i.MA_i \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}\right) = \overrightarrow{MO}.\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\alpha_i.MA_i^2 + \alpha_i OA_i^2 \geq 2\alpha_i MA_i.OA_i \ , \forall i = \overline{1,n}, \alpha_i > 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.MA_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i.MA_i \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.MA_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2 \geq 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i.MA_i.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.MA_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i MA_i$$

Từ hai điều trên, ta suy ra điều phải chứng minh.

2) Ta có

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{OA_i} MA_i.OA_i \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{OA_i} \overrightarrow{MA_i}.\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{MO} \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{OA_i}.\overrightarrow{OA_i} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i \geq \overrightarrow{MO} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{e_i} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i$$

Bài toán được giải quyết. □

## 1.2. Khai thác và sáng tạo các bài toán mới

Trong hệ quả 1, xuất hiện giả thiết $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{0}$ do đó để sáng tạo bài toán mới ta kết hợp với các đẳng thức vector

### 1.2.1. Kết hợp với khái niệm trọng tâm tam giác

Bài toán 2. *G là trọng tâm tam giác ABC ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ nên ta có*

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq MA.GA + MB.GB + MC.GC \geq GA^2 + GB^2 + GC^2$$

Vì $GA = \frac{2}{3}m_a,\ GB = \frac{2}{3}m_b,\ GC = \frac{2}{3}m_c$ nên

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{4}{9}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right) = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

Suy ra với mọi điểm $M$ ta có

$$\begin{aligned}
& m_a.MA + m_b.MB + m_c.MC \geq \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \\
& 3\left(MA^2 + MB^2 + MC^2\right) \geq a^2 + b^2 + c^2 \\
& 3\left(MA^2 + MB^2 + MC^2\right) \geq 2\left(m_a.MA + m_b.MB + m_c.MC\right)
\end{aligned}$$

Đặc biệt hóa:

- Với $M \equiv O$ ta có

  $$OA^2 + OB^2 + OC^2 \geq OA.GA + OB.GB + OC.GC \geq GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

  Mặt khác ta có $OA = OB = OC = R$, ta có $R\left(GA + GB + GC\right) \leq 3R^2$ hay $m_a + m_b + m_c \leq \frac{9}{2}R$, suy ra

  $$\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \geq \frac{2}{R}$$
  $$R\left(GA + GB + GC\right) \geq GA^2 + GB^2 + GC^2$$

  hay

  $$\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{m_a + m_b + m_c} \leq \frac{3R}{2}$$

  $3R^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2$ hay $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq \frac{27}{4}R^2$ , $9R^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$

- Với $M \equiv I$ ta có

  $$IA.GA + IB.GB + IC.GC \geq GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

  Mặt khác $IA = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}},\ IB = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}},\ IC = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}}$ do đó ta có

  $$\frac{m_a}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{m_b}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{m_c}{\sin\frac{C}{2}} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2r}.$$

### 1.2.2. Kết hợp với tâm đường tròn nội tiếp

Bài toán 3. *Cho tam giác $ABC$ ngoại tiếp đường tròn tâm $I$, gọi $\overrightarrow{e_i}$, $i = 1, 2, 3$ là véc tơ đơn vị tương ứng cùng hướng với vector $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IC}$. Chứng minh rằng*

$$\cos\frac{A}{2}\overrightarrow{e_1} + \cos\frac{B}{2}\overrightarrow{e_2} + \cos\frac{C}{2}\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{0}$$

Suy ra $\frac{\cos\frac{A}{2}}{IA}\overrightarrow{IA} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{IB}\overrightarrow{IB} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{IC}\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$ Ta thu được bất đẳng thức

$$\cos\frac{A}{2}.\left(MA - IA\right) + \cos\frac{B}{2}.\left(MB - IB\right) + \cos\frac{C}{2}.\left(MC - IC\right) \geq 0$$

Mặt khác

$$\cos\frac{A}{2}.IA + \cos\frac{B}{2}.IB + \cos\frac{C}{2}.IC = AE + BF + CD = \frac{a+b+c}{2}$$

(Với $D, E, F$ là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$ với các cạnh $BC, CA, AB$).
Do đó

$$\cos\frac{A}{2}.MA + \cos\frac{B}{2}.MB + \cos\frac{C}{2}.MC \geq \frac{a+b+c}{2}$$

với mọi điểm M. Tổng quát

Bài toán 4. *Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n(n \geq 3)$ ngoại tiếp đường tròn tâm J. Chứng minh rằng với điểm M bất kỳ thì*

$$\sum_{i=1}^{n} cos\frac{A_i}{2}.\left(mA_i\ -\ JA_i\right) \geq 0$$

*(Đề của tác giả đã được đang trên báo TH & TT, bài T8/389 tháng 11/2009)*

### 1.2.3. Kết hợp với trực tâm tam giác

Bài toán 5. *Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có $I$ là trung điểm của đường cao $AH$. Chứng minh rằng*

$$a^2\overrightarrow{IA} + b^2\overrightarrow{IB} + c^2\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$$

Ta thu được bất đẳng thức

$$a^2.IA\left(MA - IA\right) + b^2.IB\left(MB - IB\right) + c^2.IC\left(MC - IC\right) \geq 0$$

Hay

$$\left(MA - IA\right).IA\sin^2 A. + \left(MB - IB\right).IB\sin^2 B + \left(MC - IC\right).IC\sin^2 C \geq 0$$

với mọi điểm $M$.

Giả thiết thêm tam giác cân cạnh $x$ thì $IA = \frac{\sqrt{2}x}{4}$, $IB = \frac{\sqrt{10}x}{4}$ ta được bài toán:

Bài toán 6. *Cho tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$. Xác định điểm M sao cho*

$$2\sqrt{2}MA + \sqrt{10}\left(MB + MC\right)$$

*đạt giá trị nhỏ nhất.*

### 1.2.4. Kết hợp với điểm $T$ bất kỳ

Bài toán 7. *Cho tam giác $ABC$ với các cạnh $AB = c, BC = a, CA = b$. Xét $T$ là điểm bất kỳ nằm trong tam giác,đặt $S_{TBC}$=$S_a$; $S_{TAC}$=$S_b$; $S_{TAB}$=$S_c$. Chứng minh rằng*

$$S_a\overrightarrow{TA}+S_b.\overrightarrow{TB}+S_c\overrightarrow{TC}=\overrightarrow{0}.$$

Khi T trùng với :

- $I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$ ta có $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$ nên ta có $aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 \geq aMA.IA + bMB.IB + cMC.IC \geq aIA^2 + bIB^2 + cIC^2$ Mặt khác $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$ nên cho $M \equiv O$ ta có

  $$aOA^2 + bOB^2 + cOC^2 \geq aOA.IA + bOB.IB + cOC.IC \geq abc.$$

  Kết hợp với công thức

  $$IA = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}},\ IB = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}},\ IC = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}},\ S = \frac{abc}{4R} = pr.$$

  Ta có

  $$\begin{aligned}
  &(a+b+c)\,R \geq aIA + bIB + cIC\\
  &\Leftrightarrow (\sin A + \sin B + \sin C)\,R \geq \sin A.IA + \sin B.IB + \sin C.IC\\
  &\Leftrightarrow (\sin A + \sin B + \sin C)\,R \geq \sin A.IA + \sin B.IB + \sin C.IC\\
  &\Leftrightarrow \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}} \geq \frac{2r}{R}
  \end{aligned}$$

  Ta cũng có

  $$a.IA+b.IB+c.IC \geq \frac{abc}{R} \Leftrightarrow a.IA+b.IB+c.IC \geq 4S \Leftrightarrow \frac{a}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{b}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{c}{\sin\frac{C}{2}} \geq 4p.$$

- $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ ta có

  $$\sin 2A.\overrightarrow{OA} + \sin 2B.\overrightarrow{OB} + \sin 2C.\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}.$$

  Với $ABC$ là tam giác nhọn thì $\sin 2A > 0, \sin 2B > 0, \sin 2C > 0$. Ta có

  $$\begin{aligned}
  &\sin 2A.MA.OA + \sin 2B.MB.OB + \sin 2C.MC.OC \geq \sin 2A.OA^2 + \sin 2B.OB^2 + \sin 2C.OC^2\\
  &\Leftrightarrow \sin 2A.MA + \sin 2B.MB + \sin 2C.MC \geq R\,(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)
  \end{aligned}$$

  Áp dụng định lý hàm số sin, cosin và đẳng thức

  $$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$$

  ta được bài toán

Bài toán 8. *Cho tam giác $ABC$ nhọn , nội tiếp đường tròn bán kính bằng 1 và $BC = a, AC = b, AB = c$, với mọi $M$ nằm trong mặt phẳng tam giác thì*

$$a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)MA+b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)MB+c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)MC \geq a^2b^2c^2$$

*(Bài 185, trang 49, Tuyển tập 200 bài thi vô địch toán)*

- $H$ là trực tâm tam giác ta có

$$\tan A.\overrightarrow{HA}+\tan B.\overrightarrow{HB}+\tan C.\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{0}$$

nên

$$\begin{aligned}&\tan A.MA^2+\tan B.MB^2+\tan C.MC^2\\&\geq \tan A.MA.HA+\tan B.MB.HB+\tan C.MC.HC\\&\geq HA^2+HB^2+HC^2.\end{aligned}$$

Mặt khác, nếu tam giác ABC nhọn, gọi $A', B', C'$ lần lượt là chân đường cao hạ từ $A, B, C$. Xét tam giác $HA'C$ vuông tại $A'$ ta có

$$HC=\frac{CA'}{\sin CHA'}=\frac{CA'}{\sin B}=\frac{AC.cosC}{\sin B}=2RcosC \Rightarrow tanC.HC=c$$

tương tự ta có $\tan A.HA=a,\ \tan B.HB=b$ Suy ra

$$tanA.MA^2+\tan B.MB^2+\tan C.MC^2 \geq a.MA+b.MB.+cMC \geq HA^2+HB^2+HC^2.$$

### 1.2.5. Kết hợp với bài toán hình chiếu

Bài toán 9. *Cho tam giác ABC với các cạnh AB=c, BC=a, CA=b. $T$ là điểm bất kỳ nằm trong tam giác. Gọi $D, E, F$ lần lượt là hình chiếu $T$ lên cạnh $BC, CA, AB$. Đặt $S_{TBC}$=$S_a$; $S_{TAC}$=$S_b$; $S_{TAB}$=$S_c$. Chứng minh rằng*

$$h_1^2+h_2^2+h_3^2 \geq \frac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Gọi $x, y, z$ lần lượt là khoảng cách từ $T$ lên $BC, CA, AB$. Ta đặc biệt hóa bài toán như sau

- Tam giác $ABC$ đều ta được $yz\overrightarrow{TD}+zx.\overrightarrow{TE}+xy.\overrightarrow{TF}=\overrightarrow{0}$ nên

$$\begin{aligned}&yzMD^2+zxME^2+xzMF^2 \geq yzMD.TD+zxME.TE+xyMF.TF\\&\geq yzTD^2+zxTE^2+xyTF^2\end{aligned}$$

hay

$$\frac{MD^2}{x}+\frac{ME^2}{y}+\frac{MF^2}{z} \geq MD+ME+MF \geq x+y+z.$$

- $T$ trùng với trọng tâm $G$ của $\triangle\ ABC$, ta được kết quả $a^2.\overrightarrow{GD}+b^2.\overrightarrow{GE}+c^2.\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{0}$

$$a^2MD^2+b^2ME^2+c^2MF^2 \geq a^2MD.GD+b^2ME.GE+c^2MF.GF$$
$$\geq a^2GD^2+b^2GE^2+c^2GF^2$$

Mặt khác $3GD=h_a, 3GE=h_b, 3GF=h_c$ do đó

$$(aMD)^2+(bME)^2+(cMF)^2 \geq \frac{1}{3}\left(a^2h_aMD+b^2h_bME+c^2h_cMF\right)$$
$$\geq \left(\frac{1}{3}ah_a\right)^2+\left(\frac{1}{3}bh_b\right)^2+\left(\frac{1}{3}ch_c\right)^2$$

hay $(aMD)^2+(bME)^2+(cMF)^2 \geq \frac{4}{3}S^2$ và $a.MD+bME+C.MF \geq 2S$

- $T$ trùng với $O$ tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle\ ABC$ thì

$$tanA.\overrightarrow{OD}+tanB.\overrightarrow{OE}+tanC.\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{0}$$

nên ta có

$$tanA.MD^2+\tan B.ME^2+\tan C.MF^2$$
$$\geq tanA.MD.OD+tanB.ME.OE+tanC.MF.OF$$
$$\geq tanA.OD^2+tanB.OE^2+tanC.OF^2$$

Suy ra

$$tanA.MD^2+\tan B.ME^2+\tan C.MF^2 \geq R^2\left(tanA+tanB+tanC\right)$$

và

$$tanA.MD+tanB.ME+tanC.MF \geq R\left(tanA+tanB+tanC\right).$$

Mặt khác

$$tanA+tanB+tanC=tanA.tanB.tanC$$

nên nếu tam giác ABC nhọn thì

$$\frac{MD^2}{\tan B.\tan C}+\frac{ME^2}{\tan C.\tan A}+\frac{MF^2}{\tan A.\tan B} \geq R^2$$

và

$$\frac{MD}{\tan B.\tan C}+\frac{ME}{\tan C.\tan A}+\frac{MF}{\tan A.\tan B} \geq R$$

với mọi điểm $M$.

- $T$ trùng với $I$ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC ta có

$$a\overrightarrow{ID}+b\overrightarrow{IE}+c\overrightarrow{IF}=\overrightarrow{0}$$

nên

$$aMD^2+bME^2+cMF^2 \geq aMD.ID+bME.IE+cMF.IF \geq aID^2+bIE^2+cIF^2.$$

Mặt khác $ID=IE=IF=r$ nên

$$aMD^2+bME^2+cMF^2 \geq r\left(aMD+bME+cMF\right)$$

và

$$aMD^2+bME^2+cMF^2 \geq 3r^2.$$
$$aMD+bME+cMF \geq 3r.$$

Từ các kết quả trên ta có thể đề xuất bài toán cực trị sau

Bài toán 10. *Cho tam giác ABC với các cạnh $AB = c, BC = a, CA = b$, xét $M$ là điểm bất kì trong tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$\begin{aligned}
&MA^2 + MB^2 + MC^2\\
&m_aMA + m_bMB + m_cMC\\
&aMA^2 + bMB^2 + cMC^2\\
&aMA.IA + bMB.IB + cMC.IC\\
&\sin 2A.MA^2 + \sin 2B.MB^2 + \sin 2C.MC^2\\
&\sin 2A.MA + \sin 2B.MB + \sin 2C.MC.
\end{aligned}$$

Thêm giả thiết tam giác ABC nhọn thì ta được bài toán sau

Bài toán 11.

$$\begin{aligned}
&G = tanA.MA^2 + \tan B.MB^2 + \tan C.MC^2\\
&H = a.MA + b.MB. + cMC
\end{aligned}$$

Ta cũng có bài toán sau

Bài toán 12. *Với $D, E, F$ lần lượt là hình chiếu $M$ lên cạnh $BC, CA, AB$ và $x, y, z$ lần lượt là khoảng cách từ $T$ lên $BC, CA, AB$*

$$\begin{aligned}
&K = \frac{MD^2}{x} + \frac{ME^2}{y} + \frac{MF^2}{z}\\
&L = MD + ME + MF\\
&M = a^2MD^2 + b^2ME^2 + c^2MF^2\\
&N = tanA.MD^2 + tanB.ME^2 + tanC.MF^2\\
&P = tanA.MD + tanB.ME + tanC.MF\\
&Q = aMD^2 + bME^2 + cMF^2\\
&I = aMD + bME + cMF
\end{aligned}$$

Thêm giả thiết tam giác $ABC$ nhọn thì ta được

Bài toán 13.

$$\begin{aligned}
&R = \frac{MD^2}{\tan B.\tan C} + \frac{ME^2}{\tan C.\tan A} + \frac{MF^2}{\tan A.\tan B}\\
&Z = \frac{MD}{\tan B.\tan C} + \frac{ME}{\tan C.\tan A} + \frac{MF}{\tan A.\tan B}
\end{aligned}$$

### 1.2.6. Kết hợp với $G$ là trọng tâm tứ diện $ABCD$

Bài toán 14. *Với $G$ là trọng tâm tứ diện $ABCD$ ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$ Ta thu được bất đẳng thức*

$$\begin{aligned}
&MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 \geq MA.GA + MB.GB + MC.GC + MD.GD\\
&\geq GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2
\end{aligned}$$

Với tứ diện $ABCD$ gần đều với $a, b, c$ là độ dài các cặp cạnh đối diện thì trọng tâm G trùng với tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện. Khi đó ta có

$$GA = GB = GC = GD = R = \frac{\sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}}{4}$$

Do đó

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 \geq \frac{\sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}}{4}\left(MA+MB+MC+MD\right)$$

và

$$MA + MB + MC + MD \geq \sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}.$$

Ta được bài toán

Bài toán 15. *Cho tứ diện gần đều $ABCD$ có tổng bình phương các cạnh bằng $16$. Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có*

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 \geq MA + MB + MC + MD \geq 4$$

### 1.2.7. Kết hợp với bài toán điểm bất kỳ trong tứ diện

Bài toán 16. *Cho tứ diện ABCD, O là một điểm bất kỳ trong tứ diện. Đặt $V_A = V_{OBCD}; V_B = V_{OACD}$, $V_C = V_{OABD}; V_C = V_{OABD}$. Chứng minh rằng*

$$V_A.\overrightarrow{OA} + V_B.\overrightarrow{OB} + V_C.\overrightarrow{OC} + V_D.\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$$

Ta thu được các bất đẳng thức

$$V_A.OA\left(MA-OA\right)+V_B.OB\left(MB-OB\right)+V_C.OC\left(MC-OC\right)+V_D.OD\left(MD-OD\right)\geq 0$$
$$V_A.MA\left(MA-OA\right)+V_B.MB\left(MB-OB\right)+V_C.MC\left(MC-OC\right)+V_D.MD\left(MD-OD\right)\geq 0$$

### 1.2.8. Kết hợp với bài toán hình chiếu trong tứ diện

Bài toán 17. *Cho tứ diện $ABCD$ có $O$ là một điểm bất kỳ trong tứ diện. Gọi $A_1, B_1, C_1, D_1$ lần lượt là hình chiếu của $O$ lên mặt phẳng $(BCD); (ACD); (ABD); (ABC)$. Đặt $S_A = S_{BCD}$; $S_B = S_{ACD}$; $S_C = S_{ABD}$; $S_D = S_{ABC}$ $V_A = V_{OBCD}; V_B = V_{OACD}; V_C = V_{OABD}; V_C = V_{OABD}$ Chứng minh rằng*

$$\frac{S_A^2}{V_A}\overrightarrow{OA_1} + \frac{S_B^2}{V_B}\overrightarrow{OB_1} + \frac{S_C^2}{V_C}\overrightarrow{OC_1} + \frac{S_D^2}{V_D}\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{0}.$$

Ta thu được các bất đẳng thức

$$\frac{S_A^2}{V_A}.OA\left(MA-OA\right)+\frac{S_B^2}{V_B}.OB\left(MB-OB\right)+\frac{S_C^2}{V_C}.OC\left(MC-OC\right)+\frac{S_D^2}{V_D}.OD\left(MD-OD\right)\geq 0,$$

$$\frac{S_A^2}{V_A}.MA\left(MA-OA\right)+\frac{S_B^2}{V_B}.MB\left(MB-OB\right)+\frac{S_C^2}{V_C}.MC\left(MC-OC\right)+\frac{S_D^2}{V_D}.MD\left(MD-OD\right)\geq 0$$

## 1.3. Khai thác từ kết quả 2

Trong hệ quả xuất hiện giả thiết $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0}$ nên để sáng tạo bài toán ta xuất phát từ đẳng thức trên.

### 1.3.1. Từ đẳng thức cơ bản

Từ đẳng thức

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow c\overrightarrow{e_1} + a\overrightarrow{e_2} + b\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{0}$$

với $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ là các vector đơn vị cùng hướng với $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$. Khi đó ta đề xuất được bài toán

Bài toán 18. *Cho tam giác $ABC$ có $O$ là điểm bất kỳ trong tam giác. Qua O kẻ đường thẳng song song với AB, BC, CA cắt $BC, CA, AB$ tại $A1, B1, C1$. Chứng minh rằng với mọi điểm $M$ ta có*

$$cMA_1 + aMB_1 + bMC_1 \geq cOA_1 + aOB_1 + bOC_1.$$

Tổng quát

Bài toán 19. *Cho O là điểm bất kỳ nằm đa giác lồi $A_1A_2...A_n(n \geq 3)$. Qua O kẻ các đường thẳng song song với $A_iA_{i+1}$, $i = \overline{1, n}$ (xem Ai+1=A1) tương ứng cắt các cạnh $A_{i+1}A_{i+2}$ tại Bi. Chứng minh rằng*

$$\sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1} (MB_i - OB_i) \geq 0.$$

### 1.3.2. Từ khái niệm trọng tâm tam giác

$G$ là trọng tâm tam giác $ABC$ khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow m_a\overrightarrow{e_1} + m_b\overrightarrow{e_2} + m_c\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{0}$$

với $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ là các vector đơn vị cùng hướng với $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}$. Ta được bài toán

Bài toán 20. *Cho tam giác $ABC$ với G là trọng tâm. Qua điểm O bất kỳ nằm trong tam giác kẻ đường thẳng song song với $GA, GB, GC$ tương ứng cắt $CA, AB, BC$ tại các điểm $A1, B1, C1$. Chứng minh rằng :*

$$m_a (MA_1 - OA_1) + m_b (MB_1 - OB_1) + m_c (MC_1 - OC_1) \geq 0.$$

### 1.3.3. Từ định lý "con nhím"

Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ $(n \geq 3), \overrightarrow{e_i},\ i = \overline{1,n}$ là các vector đơn vị hướng ra ngoài đa giác và tương ứng vuông góc với $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ (xem $A_{i+1} = A_1$). Chứng minh rằng

$$A_1A_2\overrightarrow{e_1} + A_2A_3\overrightarrow{e_2} + ... + A_nA_1\overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{0}.$$

Ta được bài toán

Bài toán 21. *Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ $(n \geq 3), \overrightarrow{e_i},\ i = \overline{1,n}$, O là điểm bất kỳ nằm trong đa giác. Gọi $B_i$ là hình chiếu điểm O lên $A_iA_{i+1}$ Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có*

$$\sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1}\left(MB_i - OB_i\right) \geq 0$$

### 1.3.4. Kết hợp với bài toán

Cho tam giác ABC và các điểm $A', B', C'$ lần lượt thuộc các cạnh $BC, CA, AB$ và thoả mãn

$$A'B : A'C = B'C : B'A = C'A : C'B = k$$

thì $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}$. Ta thu được bài toán

Bài toán 22. *Cho tam giác ABC, các điểm $A', B', C'$ lần lượt thuộc các cạnh $BC, CA, AB$ và thoả mãn*

$$A'B : A'C = B'C : B'A = C'A : C'B = k$$

*với $k$ là số thực dương cho trước. Qua điểm $O$ bất kỳ nằm trong tam giác kẻ các đường thẳng song song với $AA', BB', CC'$ tương ứng cắt $BC, CA, AB$ tại $A_1,\ B_1,\ C_1$ Chứng minh rằng với mọi điểm $M$ ta có*

$$AA'\left(mA_1 - OA_1\right) + BB'\left(mB_1 - OB_1\right) + CC'\left(mC_1 - OC_1\right) \geq 0.$$

### 1.3.5. Kết hợp với bài toán tâm nội tiếp

Bài toán 23. *Với D,E,F lần lượt là tiếp điểm của cạnh BC,CA,AB với đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì $a\overrightarrow{AD} + b\overrightarrow{BE} + c\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{0}$.*

Ta được bài toán

Bài toán 24. *Cho D, E, F lần lượt là tiếp điểm của cạnh BC, CA, AB với đường tròn nội tam giác ABC, Qua điểm O bất kỳ nằm trong tam giác kẻ các đường thẳng song song với AD, BE, CF tương ứng cắt BC, CA, AB tại A', B', C'. Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có* $a.AD\left(MA' - OA'\right) + b.BE\left(MB' - OB'\right) + c.CF\left(MC' - OC'\right) \geq 0$

### 1.3.6. Kết hợp với bài toán góc chắn cạnh

Cho $N$ là điểm bất kì nằm trong tam giác $ABC$. Đặt$\widehat{BNC} = \alpha$, $\widehat{CNA} = \beta$, $\widehat{ANB} = \gamma$, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ là các vector đơn vị cùng hướng với $\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}, \overrightarrow{NC}$. Chứng minh rằng

$$\sin\alpha.\vec{e_1} + \sin\beta.\vec{e_2} + \sin\gamma\vec{e_3} = \vec{0}.$$

Ta đề xuất được bài toán

Bài toán 25. *Cho tam giác $ABC$; và $N$ là điểm trong tam giác, đặt $\widehat{BNC} = \alpha$, $\widehat{CNA} = \beta$, $\widehat{ANB} = \gamma$. Chứng minh rằng với mọi điểm $M$ ta có*

$$MA\sin\alpha + MB\sin\beta + MC\sin\gamma \geq NA\sin\alpha + NB\sin\beta + NC\sin\gamma.$$

Đặc biệt hóa

- Khi $\widehat{BNC} = 120^0$, $\widehat{CNA} = 90^0$, $\widehat{ANB} = 150^0$ ta được bài toán Cho tam giác ABC nhọn. Tìm điểm $M$ sao cho $MA + 2MB + \sqrt{3}MC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- Cho $M \equiv G$, $N \equiv I$ ta có

  $GA\sin\widehat{BIC} + GB\sin\widehat{CIA} + GC\sin\widehat{AIB} \geq IA\sin\widehat{BIC} + IB\sin\widehat{CIA} + IC\sin\widehat{AIB}$

  Mặt khác

  $$\sin\widehat{BIC} = \sin\left(\pi - \frac{B}{2} - \frac{C}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$

  Tương tự $\sin\widehat{CIA} = \cos\frac{B}{2}$, $\sin\widehat{AIB} = \cos\frac{C}{2}$ và

  $$\cos\frac{A}{2}.IA + \cos\frac{B}{2}.IB + \cos\frac{C}{2}.IC = AE + BF + CD = \frac{a+b+c}{2};$$

  $$GA = \frac{2}{3}m_a, \ GB = \frac{2}{3}m_b, \ GC = \frac{2}{3}m_c.$$

  Ta được bài toán

  Bài toán 26. *Cho tam giác $ABC$. Chứng minh rằng*

  $$m_a\cos\frac{A}{2} + m_b\cos\frac{B}{2} + m_c\cos\frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}(a+b+c).$$

- Cho $M \equiv O$, $N \equiv I$ ta được $OA\cos\frac{A}{2} + OB\cos\frac{B}{2} + OC\cos\frac{C}{2} \geq \frac{a+b+c}{2}$, kết hợp định lý sin ta có

  $$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \geq \sin A + \sin B + \sin C.$$

- Cho $M \equiv H$, $N \equiv I$ và kết hợp với $tanA.HA = a$, $tanB.HB = b$, $tanC.HC = c$ khi tam giác ABC nhọn. Ta được

  $$\frac{a\cos\frac{A}{2}}{t\,anA} + \frac{a\cos\frac{A}{2}}{t\,anA} + \frac{a\cos\frac{A}{2}}{t\,anA} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

  hay

  $$\cos A\cos\frac{A}{2} + \cos B\cos\frac{B}{2} + \cos C\cos\frac{C}{2} \geq \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{2}.$$

## 1.4. Kết hợp với bài toán điểm Toricelli

Bài toán 27. *Xét tam giác $ABC$ có các góc nhỏ hơn $120°$, khi đó tồn tại điểm $T$ sao cho $\widehat{ATB} = \widehat{BTC} = \widehat{CTA} = 120^0$ (T được gọi là điểm Toricelli) lúc đó*

$$\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{0}$$

*với $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ là các vector đơn vị cùng hướng với $\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB}, \overrightarrow{TC}$. Suy ra*

$$MA + MB + MC \geq TA + TB + TC.$$

Ta được bài toán tổng quát

Bài toán 28. *Cho tam giác $ABC$. Tìm điểm $M$ sao cho $MA + MB + MC$ đạt giá trị nhỏ nhất.*

Hướng dẫn.

- Nếu $A < 120°, B < 120°, C < 120°$. Khi đó điểm $M \equiv T$.
- Nếu $A \geq 120^0$ thì $\left|\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right| \leq 1$.Với điểm $M$ bất kỳ ta có

$$\begin{aligned} MA + MB + MC &= MA + \frac{\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AC}}{AC} \\ &= MA + \overrightarrow{MA}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right) + \frac{\overrightarrow{AB}^2}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}^2}{AC} \end{aligned}$$

Khi đó $M \equiv A$. Tương tự đối với các góc $B, C$.

## 1.5. Kết hợp với đa giác đều

Bài toán 29. *Xét đa giác đều $A_1A_2...A_n$ có tâm là O khi đó $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + ... + \overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{0}$ với $\overrightarrow{e_i}$, $i = 1, 2, ...$ là các vector đơn vị cùng hướng với $\overrightarrow{OA_i}$, $i = 1, 2....$ Suy ra với mọi điểm M thì $mA_1 + MA_2 + ... + MA_n \geq OA_1 + OA_2 + ... + OA_n$*

Ta được bài toán: Cho đa giác đều $A_1A_2...A_n$. Tìm điểm $M$ sao cho tổng $mA_1 + MA_2 + ... + MA_n$ nhỏ nhất.

## 1.6. Khai thác trong không gian

Từ đẳng thức

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow a\overrightarrow{e_1}+b\overrightarrow{e_2}+c\overrightarrow{e_3}+d\overrightarrow{e_4}=\overrightarrow{0}$$

Ta thu được bài toán sau

Bài toán 30. *Cho O là điểm bất kỳ nằm trong tứ diện $ABCD$ với $AB=a, BC=b, CD=c, DA=d$. Qua O kẻ đường thẳng song song với các đường thẳng AB, BC, CD, DA tương ứng cắt mặt phẳng $(BCD),(ACD),(ABD),(ABC)$ tại $A',B',C',D'$. Chứng minh rằng với mọi điểm $M$ thì*

$$aMA'+bMB'+cMC'+dMD'\geq aOA'+bOB'+cOC'+dOD'.$$

Xét tứ diện $ABCD$ với $G$ là trọng tâm khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow m_a\overrightarrow{e_1}+m_b\overrightarrow{e_2}+m_c\overrightarrow{e_3}+m_d\overrightarrow{e_4}=\overrightarrow{0}$$

Tương tự ta có bài toán

Bài toán 31. *Cho G là trọng tâm tứ diện ABCD. Qua M là điểm bất kỳ trong tứ diện kẻ đường thẳng song song với các đường thẳng GA, GB, GC, GD tương ứng cắt mặt phẳng (ABC), (BCD), (CDA), (DAB) tại A', B', C', D'.Chứng minh rằng với mọi điểm M thì*

$$m_aMA'+m_bMB'+m_cMC'+m_dMD'\geq m_aOA'+m_bOB'+m_cOC'+m_dOD'$$

*(trong đó $m_a,\ m_b,\ m_c,\ m_d$ tương ứng là độ dài các đường trọng tuyến xuất phát từ đỉnh $A,B,C,D$.)*

Kết hợp định lý "con nhím" trong không gian Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$, $\overrightarrow{e_i},\ i=1,2,3,4$ là các vector đơn vị hướng ra ngoài và vuông góc với mặt phẳng đối diện với đỉnh Ai và $S_i$ là diện tích các mặt đối diện với đỉnh Ai khi đó

$$S_1\overrightarrow{e_1}+S_2\overrightarrow{e_2}+S_3\overrightarrow{e_3}+S_4\overrightarrow{e_4}=\overrightarrow{0}.$$

Với O là điểm bất kỳ nằm trong tứ diện, theo định lý "con nhím", ta có

$$S_1\overrightarrow{e_1}+S_2\overrightarrow{e_2}+S_3\overrightarrow{e_3}+S_4\overrightarrow{e_4}=\overrightarrow{0}$$

với $\overrightarrow{e_i},\ i=\overline{1;4}$ là các vector đơn vị cùng hướng với $\overrightarrow{OB_i},\ i=\overline{1;4}$ với Bi là hình chiếu của điểm O lên mặt phẳng đối diện với đỉnh Ai. Suy ra với mọi điểm M thì

$$S_1MB_1+S_2MB_2+S_3MB_3+S_4MB_4\geq S_1.OB_1+S_2.OB_2+S_3.OB_3+S_4.OB_4.$$

Mặt khác $S_1.OB_1+S_2.OB_2+S_3.OB_3+S_4.OB_4=3V$ , với $V$ là thể tích tứ diện. Ta được bài toán sau

Bài toán 32. *Cho $O$ là điểm nằm trong tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có thể tích là $V$ và $B_i$ là hình chiếu của điểm $O$ lên mặt phẳng đối diện với đỉnh $Ai$ Gọi $S_i$ là diện tích các mặt đối diện với đỉnh Ai. Chứng minh rằng*

$$S_1MB_1 + S_2MB_2 + S_3MB_3 + S_4MB_4 \geq 3V.$$

Xét $H$ là trực tâm và nằm trong tứ diện $A_1A_2A_3A_4$, theo định lý "con nhím", ta có

$$S_1\overrightarrow{e_1}+S_2\overrightarrow{e_2}+S_3\overrightarrow{e_3}+S_4\overrightarrow{e_4}=\overrightarrow{0}$$

với $\overrightarrow{e_i}$, $i = \overline{1;4}$ là các vector đơn vị cùng hướng với $\overrightarrow{HA_i}$, $i = \overline{1;4}$ Suy ra

$$S_1MA_1 + S_2MA_2 + S_3MA_3 + S_4MA_4 \geq S_1.HA_1 + S_2.HA_2 + S_3.HA_3 + S_4.HA_4.$$

Mặt khác

$$S_1.HA_1 + S_2.HA_2 + S_3.HA_3 + S_4.HA_4 = \sum_{i=1}^{4} S_i.(h_i - d_i) = 4.3V - 3V = 9V.$$

(trong đó $h_i$ là chiều cao của tứ diện ứng với đỉnh $A_i$, $d_i$ là khoảng cách từ $H$ tới mặt phẳng đối diện với đỉnh $A_i$, $V$ là thể tích tứ diện). Ta được bài toán

Bài toán 33. *Gọi $H$ là trực tâm và nằm trong tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Xét $S_i$ là diện tích các mặt đối diện với đỉnh $A_i$. Xác định vị trí điểm $M$ sao cho*

$$S_1MA_1 + S_2MA_2 + S_3MA_3 + S_4MA_4$$

*đạt giá trị nhỏ nhất. (Tạp chí TH & TT )*

Kết hợp hai bài toán trên ta được.

Bài toán 34. *Gọi $H$ là trực tâm và nằm trong tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Xét $H_i$ là chân các đường cao hạ từ đỉnh $A_i$. Gọi $S_i$ là diện tích các mặt đối diện với đỉnh $A_i$. Xác định vị trí điểm $M$ sao cho*

$$\left(\sum_{i=1}^{4} S_iMA_i\right)\left(\sum_{i=1}^{4} S_iMH_i\right)$$

*đạt giá trị nhỏ nhất.*

Xét tứ diện $ABCD$ có điểm $O$ thỏa mãn $\widehat{AOB} = \widehat{COD}, \widehat{AOC} = \widehat{BOD}, \widehat{AOD} = \widehat{BOC}$. Trên các tia $OA, OB, OC, OD$ lần lượt đặt các vector đơn vị $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{OC'}$, $\overrightarrow{e_4} = \overrightarrow{OD'}$ khi đó tứ diện $A'B'C'D'$ là tứ diện gần đều nhận $O$ làm tâm mặt cầu ngoại tiếp và $O$ cũng là trọng tâm của nó. Do đó

$$\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4} = \overrightarrow{0}.$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 35. *Cho tứ diện $ABCD$ có điểm $O$ thỏa mãn $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$, $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$, $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$. Chứng minh rằng với mọi $M$ trong không gian, ta có*

$$MA + MB + MC + MD \geq OA + OB + OC + OD.$$

# 2. Khai thác bài toán

Trước hết, ta xét bài toán sau

Bài toán 36. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành.một mặt phẳng (P) lần lượt cắt các cạnh $SA, SB, SC, SD$ tại $A', B', C', D'$. Chứng minh rằng*

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}.$$

*(Bài 73 trang 64 SBT hình học 11 nâng cao)*

## 2.1. Một số cách giải bài toán

*Sử dụng định lí thales.* Gọi O là tâm hình bình hành, O' là giao điểm của SO với mặt phẳng (P). Qua B, D lần lượt dựng đường thẳng song song với B'D' cắt SO' tại E, F. Theo định lý Thales ta có

$$\frac{SB}{SB'} = \frac{SE}{SO'} = \frac{SO - OE}{SO'}; \ \frac{SD}{SD'} = \frac{SF}{SO'} = \frac{SO + OF}{SO'}$$

Mặt khác $OE = OF$ (do $\triangle\, OBE = \triangle\, ODF\, (g.c.g)$) nên

$$\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = 2\frac{SO}{SO'}.$$

Tương tự $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = 2\frac{SO}{SO'}$. Do đó

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$$

□

*Sử dụng phương pháp vector.* Đặt $\overrightarrow{SA} = x\overrightarrow{SA'}$, $\overrightarrow{SA} = x\overrightarrow{SA'}$, $\overrightarrow{SB} = y\overrightarrow{SB'}$, $\overrightarrow{SC} = z\overrightarrow{SC'}$, $\overrightarrow{SA} = t\overrightarrow{SA'}$ $(x, y, z, t$ là các số lớn hơn 1). Ta có

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}\\
&\Rightarrow x\overrightarrow{SA'} + z\overrightarrow{SC'} = y\overrightarrow{SB'} + t\overrightarrow{SD'}\\
&\overrightarrow{SA'} = \frac{y}{x}\overrightarrow{SB'} + \frac{t}{x}\overrightarrow{SD'} - \frac{z}{x}\overrightarrow{SC'}
\end{aligned}$$

Vì $A', B', C', D'$ đồng phẳng nên

$$\frac{y}{x} + \frac{t}{x} - \frac{z}{x} = 1 \Leftrightarrow x + z = y + t$$

hay $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$. □

*Sử dụng phương pháp thể tích.* Nhận xét rằng

$$\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}}=\frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC}$$

trong đó $A', B', C'$ lần lượt là giao điểm của mặt phẳng $(P)$ bất kỳ cắt các cạnh $SA, SB, SC$ của tứ diện $SABC$. Vận dụng kết quả đó thì

$$\begin{aligned}&V_{A'B'C'}+V_{A'C'D'}=V_{A'B'D'}+V_{B'C'D'}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{V_{A'B'C'}}{V_{SABCD}}+\frac{V_{A'C'D'}}{V_{SABCD}}=\frac{V_{A'B'D'}}{V_{SABCD}}+\frac{V_{B'C'D'}}{V_{SABCD}}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}}+\frac{V_{SA'C'D'}}{V_{SACD}}=\frac{V_{SA'B'D'}}{V_{SABD}}+\frac{V_{SB'C'D'}}{V_{SBCD}}\end{aligned}$$

do $V_{SABC}=V_{SACD}=V_{SABD}=V_{SBCD}=\frac{1}{2}V_{SABCD}$. Đến đây ta biến đổi tiếp theo công thức ở trên

$$\begin{gathered}\frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC}+\frac{SA'.SC'.SD'}{SA.SC.SD}=\frac{SA'.SB'.SD'}{SA.SB.SD}+\frac{SA'.SC'.SD'}{SA.SC.SD}\\ \Leftrightarrow\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}.\end{gathered}$$

□

*Sử dụng phương pháp diện tích.* Ta có biến đổi sau

$$\begin{aligned}&S_{SB'O'}+S_{SO'D'}=S_{SB'D'}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{S_{SB'O'}}{S_{SBD}}+\frac{S_{SO'D'}}{S_{SBD}}=\frac{S_{SB'D'}}{S_{SBD}}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{S_{SB'O'}}{S_{SBO}}+\frac{S_{SO'D'}}{S_{SOD}}=\frac{S_{SB'D'}}{S_{SBD}}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{SB'.SO'}{SB.SO}+\frac{SO'.SD'}{SO.SD}=\frac{SB'.SD'}{SB.SD}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}=2\frac{SO}{SO'}.\end{aligned}$$

Tương tự $\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=2\frac{SO}{SO'}$. Do đó

$$\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}.$$

□

*Sử dụng phép chiếu song song.* Gọi $A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1$ tương ứng là hình chiếu của các điểm A, B, C, D theo phương (A'B'C'D') lên đường thẳng SO Áp dụng tính chất phép chiếu ta có

$$\sqrt{2\left(\frac{1}{SA'^2}+\frac{1}{SC'^2}\right)}\geq\frac{1}{SA'}+\frac{1}{SC'}=\frac{1}{SB'}+\frac{1}{SD'}\geq 2\sqrt{\frac{1}{SB'}\frac{1}{SD'}}.$$

Mặt khác $\frac{OA_1}{OC_1} = \frac{OA}{OC} = 1$ (Do ABCD là hình bình hành) Từ đó ta có

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SA_1}{SO'} + \frac{SC_1}{SO'} = \frac{SA_1 + SC_1}{SO'} = \frac{2SO}{SO'}.$$

Tương tự

$$\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{SB_1}{SO'} + \frac{SB_1}{SO'} = \frac{2SO}{SO'}.$$

Do đó

$$\frac{1}{SA'^2} + \frac{1}{SC'^2} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{SB'} + \frac{1}{SD'}\right)^2.$$

□

(Xem thêm Bài viết "Hãy trở về với không gian một chiều" tác giả Nguyễn Văn Lộc, Tuyển chọn theo chuyên đề toán học và tuổi trẻ quyển 1).

Nhận xét. Từ lời giải 1 ta suy ra $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = 4\frac{SO'}{SO}$ (**)

## 2.2. Khai thác bài toán và sáng tạo bài toán mới

### 2.2.1. Hướng 1. Thay đáy hình bình hành bởi một tứ giác lồi bất kỳ

Kẻ tương tự cách 1 (ở đây O không còn là trung điểm của BD). Theo định lý Thales ta có

$$\frac{SB}{SB'} = \frac{SE}{SO'} = \frac{SO - OE}{SO'}; \ \frac{SD}{SD'} = \frac{SF}{SO'} = \frac{SO + OF}{SO'}$$

và

$$\frac{OE}{OF} = \frac{BO}{DO}.$$

Mặt khác

$$\frac{BO}{DO} = \frac{BB''}{DD''} = \frac{S_{ABC}}{S_{ADC}}$$

(trong đó $B''$, $D''$ là hình chiếu của $B, D$ lên $AC$). Suy ra $\frac{OE}{OF} = \frac{S_{ABC}}{S_{ADC}}$ hay

$$OE.S_{ADC} = OF.S_{ABC}.$$

Từ đó, ta có

$$\begin{aligned}
&S_{ADC}\frac{SB}{SB'} + S_{ABC}\frac{SD}{SD'} \\
&= S_{ADC}.\frac{SO - OE}{SO'} + S_{ABC}\frac{SO + OF}{SO'} \\
&= S_{ABCD}.\frac{SO}{SO'}
\end{aligned}$$

Tương tự ta có

$$S_{BCD}\frac{SA}{SA'} + S_{ABD}\frac{SC}{SC'} = S_{ABCD}.\frac{SO}{SO'}.$$

Do đó ta có bài toán mở rộng sau

Bài toán 37. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác lồi.một mặt phẳng (P) lần lượt cắt các cạnh SA, SB, SC, SD tại $A'$, $B'$, $C'$, $D'$. Chứng minh rằng*

$$S_{BCD}\frac{SA}{SA'} + S_{ABD}\frac{SC}{SC'} = S_{ADC}\frac{SB}{SB'} + S_{ABC}\frac{SD}{SD'}.$$

Một câu hỏi được đặt ra là ''liệu có thể thay các diện tích của công thức trên bởi các đại lượng khác không? Tương tự quá trình suy luận để tìm ra hệ thức mở rộng hơn, ta có

$$\frac{OE}{OF} = \frac{V_{SABC}}{V_{SADC}}$$

ta được

$$V_{SBCD}\frac{SA}{SA'} + V_{SABD}\frac{SC}{SC'} = V_{SADC}\frac{SB}{SB'} + V_{SABC}\frac{SD}{SD'}$$

$$\frac{OE}{OF} = \frac{h_2}{h_4} = \frac{h_2'}{h_4'}$$

trong đó

- $h_1,\ h_3$ tương ứng là khoảng cách từ $A, C$ đến $BD$ và $h_2,\ h_4$ tương ứng là khoảng cách từ $B, D$ đến $AC$;
- $h_1',\ h_3'$ tương ứng là khoảng cách từ A, C đến $(SBD)$;
- $h_2',\ h_4'$ tương ứng là khoảng cách từ B, D đến $(SAC)$.

Ta được

$$\frac{h_3}{h_1+h_3}\frac{SA}{SA'} + \frac{h_1}{h_1+h_3}\frac{SC}{SC'} = \frac{h_4}{h_2+h_4}\frac{SB}{SB'} + \frac{h_2}{h_2+h_4}\frac{SD}{SD'}$$

$$\frac{h_3'}{h_1'+h_3'}\frac{SA}{SA'} + \frac{h_1'}{h_1'+h_3'}\frac{SC}{SC'} = \frac{h_4'}{h_2'+h_4'}\frac{SB}{SB'} + \frac{h_2'}{h_2'+h_4'}\frac{SD}{SD'}$$

Từ đẳng thức $\frac{OE}{OF} = \frac{S_{ABO}}{S_{AOD}} = \frac{V_{SABO}}{V_{SAOD}}$ ta được

$$\frac{S_{BOC}}{S_{ABC}}\frac{SA}{SA'} + \frac{S_{ABO}}{S_{ABC}}\frac{SC}{SD'} = \frac{S_{AOD}}{S_{ABD}}\frac{SB}{SB'} + \frac{S_{ABO}}{S_{ABD}}\frac{SD}{SD'}$$

và

$$\frac{V_{SBOC}}{V_{SABC}}\frac{SA}{SA'} + \frac{V_{SABO}}{V_{SABC}}\frac{SC}{SD'} = \frac{V_{SAOD}}{V_{SABD}}\frac{SB}{SB'} + \frac{V_{SABO}}{V_{SABD}}\frac{SD}{SD'}.$$

### 2.2.2. Hướng 2 : Thay đáy bởi đa giác bất kỳ

Từ lời giải 1 dễ dàng đề xuất bài toán mở rộng sau

Bài toán 38. *Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ $(n \geq 2)$ nằm trong mặt phẳng (P). S là một điểm nằm ngoài mặt (P).Mặt phẳng $(\alpha)$ cắt các cạnh SA1, SA2, ..., SA2n lần lượt tại $B_1$, $B_2$, $B_3$, ... , $B_{2n}$. Chứng minh rằng*

$$\frac{SA_1}{SB_1} + \frac{SA_{n+1}}{SB_{n+1}} = \frac{SA_2}{SB_2} + \frac{SA_{n+2}}{SB_{n+2}} ... = \frac{SA_n}{SB_n} + \frac{SA_{2n}}{SB_{2n}}$$

Ta trở lại bài toán xuất phát, điểm O là tâm của hình bình hành ABCD.Theo tư duy biện chứng nếu ta nhìn dưới góc độ khác xem O là trọng tâm của hệ bốn điểm A,B,C,D. Khi đó ta có thể đề xuất bài toán mở rộng của (**) như sau.

Bài toán 39. *Cho đa giác lồi $A_1A_2A_3...A_n$ $(n \geq 2)$ (trường hợp n=2 suy biến thành đoạn thẳng) nằm trong mặt phẳng (P). S là một điểm nằm ngoài mặt (P).Mặt phẳng $(\alpha)$ cắt các cạnh SA1, SA2, ..., SAn, SGn lần lượt tại các điểm $B_1$, $B_2$, $B_3$, ... , $B_n$, $G_n'$. Trong đó Gn là trọng tâm của đa giác*

$$A_1A_2A_3...A_n \; (n \geq 2)$$

*(Tức là thỏa mãn$\overrightarrow{G_nA_1} + \overrightarrow{G_nA_2} + ... + \overrightarrow{G_nA_n} = \overrightarrow{0}$) Chứng minh rằng :*

$$\frac{SA_1}{SB_1} + \frac{SA_2}{SB_2} + ... + \frac{SA_n}{SB_n} = n\frac{SG_n}{SG_n'}.$$

*Chứng minh.* Gọi $G_n$ là trọng tâm đa giác$A_1A_2A_3...A_n$ $(n \geq 2)$, khi đó $G_n, G_{n-1}, A_n$ thẳng hàng và thỏa mãn

$$\overrightarrow{A_nG_n} = (n-1)\,\overrightarrow{G_nG_{n-1}}.$$

Thật vậy,

$G_n$ là trọng tâm đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ $(n \geq 2)$ khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{G_nA_1} + \overrightarrow{G_nA_2} + ... + \overrightarrow{G_nA_n} = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_nG_n} = (n-1)\,\overrightarrow{G_nG_{n-1}} + \left(\overrightarrow{G_{n-1}A_1} + \overrightarrow{G_{n-1}A_2} + ... + \overrightarrow{G_{n-1}A_{n-1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_nG_n} = (n-1)\,\overrightarrow{G_nG_{n-1}}.$$

Trở lại bài toán, ta sẽ chứng minh bằng quy nạp.

Với $n = 2$ thì

$$\frac{SA_1}{SB_1} + \frac{SA_2}{SB_2} = 2\frac{SG_2}{SG_2'}$$

(đúng theo cách 1 của bài toán xuất phát).

Giả sử đẳng thức đúng với $n = k$ ta chứng minh nó đúng với $n = k + 1$. Theo giả thiết quy nạp ta có

$$\frac{SA_1}{SB_1} + \frac{SA_2}{SB_2} + ... + \frac{SA_k}{SB_k} = k\frac{SG_k}{SG_k'}$$

suy ra

$$\frac{SA_1}{SB_1}+\frac{SA_2}{SB_2}+...+\frac{SA_{k+1}}{SB_{k+1}}=k\frac{SG_k}{SG'_k}+\frac{SA_{k+1}}{SB_{k+1}}.$$

Qua $A_{k+1}, G_k$ kẻ đường thẳng song song với $B_{k+1}G'_k$ cắt $SG_{k+1}$ lần lượt tại $E, F$. Theo định lý Thales ta có

$$\frac{SA_{k+1}}{SB_{k+1}}=\frac{SE}{SG'_{k+1}};\ \frac{SG_k}{SG'_k}=\frac{SF}{SG'_{k+1}}\Rightarrow\frac{SA_1}{SB_1}+\frac{SA_2}{SB_2}+...+\frac{SA_{k+1}}{SB_{k+1}}=\frac{SE}{SG'_{k+1}}+k\frac{SF}{SG'_{k+1}}$$

Mặt khác theo nhận xét trên thì

$$\frac{SE}{SF}=\frac{EG_{k+1}}{G_{k+1}F}=\frac{A_{k+1}G_{k+1}}{G_{k+1}G_k}=k.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\frac{SA_1}{SB_1}+\frac{SA_2}{SB_2}+...+\frac{SA_{k+1}}{SB_{k+1}}&=\frac{SG_{k+1}-EG_{k+1}}{SG'_{k+1}}+k\frac{SG_{k+1}-FG_{k+1}}{SG'_{k+1}}\\&=\frac{SG_{k+1}-kFG_{k+1}}{SG'_{k+1}}+k\frac{SG_{k+1}-FG_{k+1}}{SG'_{k+1}}=(k+1)\frac{SG_{k+1}}{SG'_{k+1}}\end{aligned}$$

Theo nguyên lý quy nạp suy ra điều cần chứng minh. □

Đặc biệt hóa với $n=3$ ta có

Bài toán 40. *Cho hình chóp $S.ABC$. Mặt phẳng $(P)$ lần lượt cắt các cạnh $SA, SB, SC, SG$ tại $A', B', C', G'$ trong đó $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$ Chứng minh rằng*

$$\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=3\frac{SG}{SG'}.$$

## 2.3. Khai thác và sáng tạo các bài toán về cực trị

Với $S.ABCD$ là hình chóp đều cạnh bên bằng $a$ ta có

$$\frac{1}{SA'}+\frac{1}{SC'}=\frac{1}{SB'}+\frac{1}{SD'}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, Cauchy-Schwarz ta có

$$\sqrt{2\left(\frac{1}{SA'^2}+\frac{1}{SC'^2}\right)}\geq\frac{1}{SA'}+\frac{1}{SC'}=\frac{1}{SB'}+\frac{1}{SD'}\geq 2\sqrt{\frac{1}{SB'}\frac{1}{SD'}}.$$

Suy ra

$$\frac{\sqrt{SB'.SD'}}{SA'}+\frac{\sqrt{SB'.SD'}}{SC'}\geq 2,\ \frac{1}{SA'^2}+\frac{1}{SC'^2}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{SB'}+\frac{1}{SD'}\right)^2,\ \frac{SB'.SD'}{SA'^2}+\frac{SB'.SD'}{SC'^2}\geq 2.$$

Với $B', D'$ là trung điểm của $SB, SD$ thì

$$\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=4\Leftrightarrow\frac{1}{SA'}+\frac{1}{SC'}=\frac{4}{a}.$$

Kết hợp với các bất đẳng thức đại số

- $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ với $x, y$ là các số dương.
- $\frac{a+b}{2a-b} + \frac{c+b}{2c-b} \geq 4$ với $a, b, c > 0$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$

Ta được các bài toán

Bài toán 41. *Cho hình chóp đều S.ABCD cạnh bên bằng $a$. Gọi $B'$, $D'$ lần lượt là trung điểm của $SB, SD$. Mặt phẳng (P) đi qua B', D' và lần lượt cắt các cạnh SA, SC tại A', C'.Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau*

1. $P = SA' + SC'$.
2. $Q = \frac{2SA'+a}{4SA'-a} + \frac{2SC'+a}{4SC'-a}$

Với $G'$ là trọng tâm tứ diện $SABC$ khi đó $\frac{SG}{SG'} = \frac{4}{3}$ nên

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 4.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 4 \geq 3\sqrt[3]{\frac{SA}{SA'}\frac{SB}{SB'}\frac{SC}{SC'}} = 3\sqrt[3]{\frac{V}{V'}} \Rightarrow V' \geq \frac{27}{64}V.$$

Mặt khác đặt $V = V_{SABC}, V' = V_{SA'B'C'}$ ta có

$$\begin{aligned} V_{AA'B'C'} + V_{BA'B'C'} + V_{CA'B'C'} &= V_{SA'B'C'}\left(\frac{AA'}{SA'} + \frac{BB'}{SB'} + \frac{CC'}{SC'}\right) \\ &= V_{SA'B'C'}\left(\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} - 3\right) = V_{SA'B'C'}. \end{aligned}$$

Ta đặt ra bài toán

Bài toán 42. *Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích là V. Mặt phẳng $(P)$ di dộng luôn đi qua trọng tâm G của hình chóp lần lượt cắt các cạnh $SA, SB, SC, SG$ tại $A', B', C', G'$. Tìm giá trị nhỏ nhất của*

1. *Thể tích hình chóp $V_{SA'B'C'}$.*
2. *Tìm GTNN của biểu thức $P = V_{AA'B'C'} + V_{BA'B'C'} + V_{CA'B'C'}$.*

*(Bài T10/301 tạp chí TH & TT năm 2002)*

Với $SA = a, SB = b, SC = c$ thì ta có

$$\frac{a}{SA'} + \frac{b}{SB'} + \frac{c}{SC'} = 4.$$

Áp dụng bất đẳng Cauchy-Schwarz, ta có

$$16 = \left(a.\sqrt{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\alpha}SA'} + b\sqrt{\beta}\frac{1}{SB'} + c\sqrt{\gamma}\frac{1}{SC'}\right)^2$$
$$\leq \left(\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2\right)\left(\frac{1}{\alpha SA'^2} + \frac{1}{\beta SB'^2} + \frac{1}{\gamma SC'^2}\right).$$

Và áp dụng bất đẳng thức $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ ta có

$$16 = \left(\frac{a}{SA'} + \frac{b}{SB'} + \frac{c}{SC'}\right)^2 \geq 3\left(\frac{ab}{SA'.SB'} + \frac{bc}{SB'.SC'} + \frac{ca}{SC'.SA'}\right).$$

Từ đó ta đặt ra bài toán

Bài toán 43. *Cho hình chóp S.ABC với $SA = a, SB = b, SC = c$. Mặt phẳng (P) di dộng luôn đi qua trọng tâm G của hình chóp lần lượt cắt các cạnh $SA, SB, SC, SG$ tại $A', B', C', G'$.*

1. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{1}{\alpha SA'^2} + \frac{1}{\beta SB'^2} + \frac{1}{\gamma SC'^2}$ với $\alpha$, $\beta$, $\gamma$là số thực dương.*
2. *Tìm giá trị lớn nhất của $\frac{ab}{SA'.SB'} + \frac{bc}{SB'.SC'} + \frac{ca}{SC'.SA'}$.*

Nhận xét. Trường hợp khi $\alpha = \beta = \gamma = 1$ ở câu a ta được bài toán T10 số 278 tạp chí toán học tuổi trẻ, khi $a = b = c$ ở câu b ta được bài toán T10 số 288 tạp chí toán học tuổi trẻ.

### 2.3.1. Kết hợp với các bài toán bất đẳng thức đại số

Ta có

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1$$

với $x, y, z$ là số dương thỏa mãn đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Và đặc biệt hóa cho $a = b = c = 1$ ta có bài toán

Bài toán 44. *Cho hình chóp S.ABC với $SA = SB = SC = 1$. Mặt phẳng (P) di dộng luôn đi qua trọng tâm G của hình chóp lần lượt cắt các cạnh $SA, SB, SC, SG$ tại $A', B', C', G'$. Tìm giá trị lớn nhất của*

$$\frac{1}{2SA' + SB' + SC'} + \frac{1}{SA' + 2SB' + SC'} + \frac{1}{SA' + SB' + 2SC'}.$$

Với các bất đẳng thức

$$\frac{\sqrt{y^2+2x^2}}{xy} + \frac{\sqrt{z^2+2y^2}}{yz} + \frac{\sqrt{x^2+2z^2}}{zx} \geq \sqrt{3}$$

với $x, y, z$ là số dương thỏa mãn đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

$$(x+1)(y+1)(z+1) \geq 64$$

với $x, y, z$ là số dương thỏa mãn đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Ta được bài toán

Bài toán 45. *Cho hình chóp $S.ABC$ với $SA = SB = SC = 4$. Mặt phẳng (P) di động luôn đi qua trọng tâm G của hình chóp lần lượt cắt các cạnh SA, SB, SC, SG tại $A', B', C'$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

1. $(SA' + 1)(SB' + 1)(SC' + 1) \geq 64.$
2. $\frac{\sqrt{SB'^2+2SA'^2}}{SA'.SB'} + \frac{\sqrt{SC'^2+2SB'^2}}{SC'.SB'} + \frac{\sqrt{SA'^2+2SC'^2}}{SA'.SC'}.$

## 2.4. Khai thác và sáng tạo bài toán tỉ số

Cho $A' \equiv A$ và $C'$ là trung điểm của $SC$ ta được

Bài toán 46. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi $C'$ là trung điểm của $SC$. Mặt phẳng $(P)$ qua $AC'$ và cắt cạnh $SB, SD$ lần lượt tại $B', D'$. Chứng minh rằng*

$$\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = 3.$$

*(Bộ đề thi đại học 1996)*

Cho $A' \equiv A$ và $B', C'$ lần lượt là trung điểm của $SB, SC$. Ta có bài toán

Bài toán 47. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng $(P)$ qua $A, M, N$ cắt cạnh $SD$ tại $K$, trong đó $M, N$ tương ứng là trung điểm của $SB, SC$. Tính $\frac{SC}{SK}, \frac{SO}{SO'}$ (với $O$ là tâm hình bình hành, $O' = SO \cap (P)$)*

Cho $A' \equiv A$ và $B'$ là điểm nằm trên cạnh SB thỏa mãn $SB = 3SB'$. Ta có bài toán

Bài toán 48. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Xét một mặt phẳng $(P)$ qua $A, M$ cắt cạnh $SC, SD$ tương ứng tại tại $N, K$, trong đó $M$ điểm nằm trên cạnh SB thỏa mãn $SB = 3SB'$. Tính $\frac{SC}{SN} - \frac{SD}{SK}$.*

Cho mặt phẳng đi qua trọng tâm $G$ và trung điểm $C'$ của $SC$ ta được bài toán

Bài toán 49. *Cho hình chóp $S.ABC$. Mặt phẳng $(P)$ đi qua trung điểm $C'$ của $SC$ và trọng tâm $G$ của tứ diện cắt $SA, SB$ lần lượt tại $A', B'$. Chứng minh rằng $\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} = 2$.*

## 2.5. Khai thác và sáng tạo các bài toán chứng minh

Từ $G'$ là trọng tâm tứ diện $SABC$ với $SA = a, SB = b, SC = c$ thì ta có

$$\frac{a}{SA'} + \frac{b}{SB'} + \frac{c}{SC'} = 4.$$

Ngược lại nếu mặt phẳng $(P)$ tạo ra hệ thức trên thì có đặc điểm gì? Trả lời câu hỏi này ta có bài toán sau đây

Bài toán 50. *Cho tứ diện $SABC$ với $SA = a, SB = b, SC = c$. Các điểm $A', B', C'$ thay đổi lần lượt nằm trên các cạnh $SA, SB, SC$ thỏa mãn*

$$\frac{a}{SA'} + \frac{b}{SB'} + \frac{c}{SC'} = 4.$$

*Chứng minh rằng mặt phẳng $(P)$ xác định bởi ba điểm $A', B', C'$ đi qua điểm cố định. Xác định điểm đó.*

*Hướng dẫn giải.* Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$, đặt $G' = SG \cap (P)$. Khi đó, ta có

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3\frac{SG}{SG'},$$

kết hợp với giả thiết suy ra

$$3\frac{SG}{SG'} = 4 \Leftrightarrow \frac{SG}{SG'} = \frac{4}{3}$$

Vì $S, G$ cố định nên $G'$ cố định do đó mặt phẳng $(P)$ đi qua điểm $G'$ và nó chính là trọng tâm tứ diện. □

Một cách tương tự, ta có các bài toán sau

1. Cho tứ diện $SABC$. Các điểm $A', B', G'$ thay đổi lần lượt nằm trên các cạnh $SA, SB, SG$ thỏa mãn $\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} - 3\frac{SG}{SG'} = k\,(k \geq 1)$ . Chứng minh rằng mặt phẳng $(P)$ xác định bởi ba điểm $A', B', G'$ đi qua điểm cố định, trong đó $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi $A', B', C'$ là các điểm thay đổi nằm trên các cạnh $SA, SB, SC$ thỏa mãn $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} - \frac{SB}{SB'} = k\,(k \geq 1)$. Chứng minh rằng mặt phẳng $(P)$ xác định bởi ba điểm $A', B', C'$ đi qua điểm cố định.

# 3. Kết luận

Như vậy nếu giáo viên quan tâm việc khai thai thác khái niệm, bài tập trong sách giáo khoa và sách bài tập và cài đặt hợp lý trong quá trình giảng dạy của mình thì sẽ góp phần đổi mới phương pháp dạy, giúp học sinh " độc lập, chủ động và sáng tạo" trong học tập.

Hướng mở rộng đề tài là việc khai thác và sáng tạo bài toán mới từ định lý, quy tắc, phương pháp và còn nhiều khái niệm, bài tập toán có tiềm năng phát triển nữa. Đề tài này đã được bản thân tác giả và các đồng nghiệp cùng đơn vị thí điểm trên các em có học lực từ khá trở lên. Kết quả thu được rất khả quan, các em học tập một cách say mê hứng thú. Một số em đã đạt được những thành tích tốt qua những đợt thi học sinh giỏi vừa qua. Dù đã cận thận và chuyên tâm nghiên cứu, nhưng vì thời gian hoàn thiện sáng kiến có hạn nên không tránh khỏi sai sót. Rất mong đồng nghiệp quan tâm và đóng góp ý kiến để đề tài được tốt hơn và ứng dụng trong thực tiễn dạy học đạt hiệu quả cao nhất.

# Tài liệu

[1] Văn Như Cương, Nguyễn Mộng Hy, Sách giáo khoa, sách bài tập (cơ bản và nâng cao).

[2] Nguyễn Minh Hà (chủ biên), Nguyễn Xuân Bình, Bài tập nâng cao và một số chuyên đề hình học 10.

[3] Tạp chí toán học và tuổi trẻ.

[4] Tuyển tập 200 bài thi vô địch toán (Hình học không gian).

[5] Đào Tam, Hình học sơ cấp.

# VỀ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC CỦA VASILE CIRTOAJE

Lê Phúc Lữ
(ĐH Khoa học tự nhiên TPHCM)

TÓM TẮT

Giáo sư Vasile Cirtoaje, người Romania nổi tiếng thế giới với các bất đẳng thức hay và đẹp. Nhiều bất đẳng thức của ông rất khó, đòi hỏi những cách xử lý kỹ thuật, hoặc các đánh giá tinh tế. Dưới đây, ta sẽ cùng xem xét cách chứng minh của một trong các bất đẳng thức như thế của ông và ứng dụng vào giải một số bài toán khác. Bài viết này được chỉnh sửa bổ sung từ bài giảng đội tuyển TPHCM năm 2015, hướng tới kỳ thi VMO 2016.

## 1. Bài toán và các vấn đề liên quan

Trước hết, ta xét bài toán phụ sau, thuần túy biến đổi đại số.

Bài toán 1. *Cho $a = x^2 - xy + yz, b = y^2 - yz + zx, c = z^2 - zx + xy$. Rút gọn biểu thức*

$$T = ab + bc + ca.$$

*Lời giải.* Đặt $k = xy^2 + yz^2 + zx^2 - xyz$. Ta có

$$\begin{aligned} ab &= (x^2 - xy + yz)(y^2 - yz + zx) = [x(x-y) + yz]\left[y^2 + z(x-y)\right] \\ &= (x-y)(xy^2 + yz^2 + zx^2 - xyz) + y^3 z = (x-y)k + y^3 z \end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có các phân tích

$$bc = (y - z)k + z^3x$$
$$ca = (z - x)k + x^3y$$

Từ đây suy ra

$$T = (x - y + y - z + z - x)k + x^3y + y^3z + z^3x = x^3y + y^3z + z^3x.$$

□

Tiếp theo là nội dung của bài toán, được sáng tác vào năm 1992.

Bài toán 2. *Cho $x, y, z$ là các số thực bất kỳ. Chứng minh rằng*

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq 3(x^3y + y^3z + z^3x)$$

*(bất đẳng thức Vasile Cirtoaje).*

*Lời giải.* Ta có

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$$

nên bất đẳng thức này hiển nhiên đúng.

Thay $a = x^2 - xy + yz, b = y^2 - yz + zx, c = z^2 - zx + xy$ vào, ta được

$$a + b + c = x^2 + y^2 + z^2$$

và

$$ab + bc + ca = x^3y + y^3z + z^3x.$$

Do đó, ta có ngay

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq 3(x^3y + y^3z + z^3x).$$

□

**Nhận xét.** Có nhiều cách chứng minh khác cho bài toán này, chẳng hạn phân tích trực tiếp thành tổng bình phương (rất khó và chỉ có thể thực hiện bằng các công cụ như Maple, MatLab) hoặc dùng hàm số. Cách chứng minh ở trên là cách gọn đẹp nhất cho bài toán. Đẳng thức xảy ra tại 2 điểm và sẽ được giới thiệu tại bài toán tiếp theo. Bài toán tổng quát của bài toán trên là:

Cho $p, q, r$ và $a, b, c$ là các số thực, trong đó $3(1 + r) \geq p^2 + pq + p^2$. Chứng minh rằng

$$\sum a^4 + \sum a^2b^2 + (p + q - r - 1)abc \sum a \geq p \sum a^3b + q \sum ab^3.$$

Chú ý rằng dấu $\sum$ ở đây có nghĩa là lấy hoán vị theo các biến $a, b, c$ hoặc $x, y, z$ trong đề bài. Trong trường hợp đặc biệt là $3(1 + r) = p^2 + pq + q^2$, người ta có thể chỉ ra được bất đẳng thức trên là đúng vì nó viết được thành

$$\sum (2a^2 - b^2 - c^2 - pab + (p + q)bc - qca)^2 \geq 0.$$

Bài toán 3. *Cho $x, y, z$ là các số thực khác 0 thỏa mãn hệ phương trình*

$$x^2 - xy + yz = y^2 - yz + zx = z^2 - zx + xy.$$

*Đặt $T = \frac{(x+y+z)^3}{xyz}$. Chứng minh rằng $T = 27$ hoặc $T = 49$.*

*Lời giải.* Đặt $a = x + y + z, b = xy + yz + zx, c = xyz$ và $x^2 - xy + yz = y^2 - yz + zx = z^2 - zx + xy = k^2$. Suy ra $3k^2 = x^2 + y^2 + z^2$ hay $a^2 - 2b = 3k^2$ . Ta cũng có

$$\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2yz = k^2x^2 \\ y^4 - y^3z + xy^2z = k^2y^2 \\ z^4 - z^3x + xyz^2 = k^2z^2 \end{cases}$$

Suy ra

$$x^4 + y^4 + z^4 - (x^3y + y^3z + z^3x) + xyz(x + y + z) = 3k^4.$$

Theo bất đẳng thức Vasile thì điều kiện (*) cho ta

$$3(x^3y + y^3z + z^3x) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 9k^4$$

nên

$$\begin{aligned} &x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) = 6k^4 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + xyz(x + y + z) = 6k^4 \\ &\Leftrightarrow 9k^4 - 2\left((xy + yz + zx)^2 - 2xyz(x + y + z)\right) + xyz(x + y + z) = 6k^4 \\ &\Leftrightarrow -2b^2 + 5ca = 3k^4 \end{aligned}.$$

Mặt khác, ta cũng có

$$\begin{cases} x^2yz - xy^2z + y^2z^2 = k^2yz \\ y^2zx - xyz^2 + z^2x^2 = k^2zx \\ z^2xy - x^2yz + x^2y^2 = k^2xy \end{cases}$$

Suy ra

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = k^2(xy + yz + zx) \Leftrightarrow b^2 - 2ca = bk^2$$

Ta có hệ

$$\begin{cases} a^2 - 2b = 3k^2 \\ 2b^2 - 5ca = 3k^4 \\ b^2 - 2ca = bk^2 \end{cases}.$$

Từ đẳng thức thứ 2 và 3, ta có

$$b^2 = 5bk^2 - 6k^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 3k^2 \\ b = 2k^2 \end{array}\right..$$

Ta xét 2 trường hợp sau

1. Nếu $b = 3k^2$ thì ta tính được $a^2 = 9k^2$ và $ca = 3k^4$. Do đó:
$$T = \frac{a^3}{c} = \frac{a^4}{ac} = \frac{81k^4}{3k^4} = 27.$$
(Theo định lý Viete thì $x, y, z$ là nghiệm của phương trình $(\lambda \pm k)^3 = 0$ nên $x = y = z$).

2. Nếu $b = 2k^2$ thì ta tính được $a^2 = 7k^2$ và $ca = k^4$. Do đó:
$$T = \frac{a^3}{c} = \frac{a^4}{ac} = \frac{49k^4}{k^4} = 49.$$
Theo định lý Viete thì $x, y, z$ là nghiệm của phương trình $\lambda^3 \pm \sqrt{7}k\lambda^2 + 2k^2\lambda \pm \frac{k^3}{\sqrt{7}} = 0$, phương trình này có 3 nghiệm là
$$\lambda_1 = \frac{4k}{\sqrt{7}}\sin^2\frac{\pi}{7}, \lambda_2 = \frac{4k}{\sqrt{7}}\sin^2\frac{2\pi}{7}, \lambda_3 = \frac{4k}{\sqrt{7}}\sin^2\frac{4\pi}{7}.$$

□

**Nhận xét.** Từ đây ta cũng thấy rằng bất đẳng thức Vasile ban đầu có 2 điểm rơi là $x = y = z$ hoặc $(x, y, z) = \left(t\sin^2\frac{4\pi}{7}, t\sin^2\frac{2\pi}{7}, t\sin^2\frac{\pi}{7}\right), t \in \mathbb{R}$ và các hoán vị.

Tiếp theo, ta xét một số bài toán ứng dụng của bất đẳng thức ở bài toán 2.

## 2. Các bài toán ứng dụng

Bài toán 4. *Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ . Chứng minh rằng*
$$\frac{x^2}{x^2y^2+1} + \frac{y^2}{y^2z^2+1} + \frac{z^2}{z^2x^2+1} \geq \frac{3}{2}.$$

*Lời giải.* Ta có
$$\frac{x^2}{x^2y^2+1} = \frac{x^2(x^2y^2+1) - x^4y^2}{x^2y^2+1} = x^2 - \frac{x^4y^2}{x^2y^2+1} \geq x^2 - \frac{x^4y^2}{2xy} = x^2 - \frac{x^3y}{2}.$$
Tương tự, ta cũng có
$$\frac{y^2}{y^2z^2+1} \geq y^2 - \frac{y^3z}{2}, \frac{z^2}{z^2x^2+1} \geq z^2 - \frac{z^3x}{2}.$$
Cộng các bất đẳng thức này lại, ta được
$$\frac{x^2}{x^2y^2+1} + \frac{y^2}{y^2z^2+1} + \frac{z^2}{z^2x^2+1} \geq x^2 + y^2 + z^2 - \frac{x^3y + y^3z + z^3x}{2}.$$
Ta cần chứng minh
$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{x^3y + y^3z + z^3x}{2} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^3y + y^3z + z^3x \leq 3$$
bất đẳng thức này tương đương với $3(x^3y + y^3z + z^3x) \leq (x^2 + y^2 + z^2)^2$, đúng. □

Bài toán 5. *Cho các số $a, b, c > 0$, chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^2+ab}+\frac{1}{b^2+bc}+\frac{1}{c^2+ca}\geq\frac{3}{2}$$

*nếu có một trong hai điều sau đây*

(a) $abc = 1$.

(b) $a + b + c = 3$.

*Lời giải.*

(a) Đặt $a=\frac{y}{x}, b=\frac{z}{y}, c=\frac{x}{z}$, ta đưa về $\frac{x^2}{y^2+xz}+\frac{y^2}{z^2+xy}+\frac{z^2}{x^2+yz}\geq\frac{3}{2}$. Ta có

$$\begin{aligned}&\frac{x^2}{y^2+xz}+\frac{y^2}{z^2+xy}+\frac{z^2}{x^2+yz}=\frac{x^4}{x^2y^2+x^3z}+\frac{y^4}{y^2z^2+y^3x}+\frac{z^4}{z^2x^2+z^3y}\\&\geq\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+xy^3+yz^3+zx^3}.\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned}&2(x^2+y^2+z^2)^2\geq 3\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+xy^3+yz^3+zx^3\right)\\&\Leftrightarrow 2(x^4+y^4+z^4)+(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\geq 3(xy^3+yz^3+zx^3)\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Vasile Cirtoaje thì $3(xy^3+yz^3+zx^3)\leq(x^2+y^2+z^2)^2$ nên

$$\begin{aligned}&2(x^4+y^4+z^4)+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\geq(x^2+y^2+z^2)^2\\&\Leftrightarrow (x^2-y^2)^2+(y^2-z^2)^2+(z^2-x^2)^2\geq 0\end{aligned}$$

bất đẳng thức cuối đúng nên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

(b) Ta có

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a^2+ab}+\frac{1}{b^2+bc}+\frac{1}{c^2+ca}=\frac{\frac{1}{a}}{a+b}+\frac{\frac{1}{b}}{b+c}+\frac{\frac{1}{c}}{c+a}\\&\geq\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{\frac{1}{b}}+\sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2}{2(a+b+c)}=\frac{1}{6}\left(\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{\frac{1}{b}}+\sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2\end{aligned}$$

Ta cũng có

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\geq 2\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)\geq\frac{18}{a+b+c+3}=3.$$

Suy ra

$$\frac{1}{a^2+ab}+\frac{1}{b^2+bc}+\frac{1}{c^2+ca}\geq\frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

□

**Nhận xét.** Bất đẳng thức ở câu b chỉ là 1 dạng phát biểu khác của câu a và có phần yếu hơn, có 1 cách khác là dùng phản chứng để suy ra được b từ a.

Ngoài ra, bất đẳng thức

$$3(xy^3 + yz^3 + zx^3) \leq (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

không thực sự giống với dạng gốc. Tuy nhiên, ta chỉ cần thay $(x, y, z) \to (Y, X, Z)$ thì

$$\left(X^2 + Y^2 + Z^2\right)^2 \geq 3\left(X^3Y + Y^3Z + Z^3X\right).$$

bất đẳng thức với biến $(X, Y, Z)$ đúng nên nó cũng đúng với biến $(x, y, z)$ ban đầu. Dưới đây là một bài toán tương tự của cùng tác giả.

Cho $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{ab + 2c^2} + \frac{b^2}{bc + 2a^2} + \frac{c^2}{ca + 2b^2} \geq 1.$$

Tiếp theo là một số tình huống khó xử lý hơn.

Bài toán 6. *Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 1$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a}{b+8}} + \sqrt{\frac{b}{c+8}} + \sqrt{\frac{c}{a+8}} \geq 1.$$

*Lời giải.* Theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$\sqrt{b+8} = \frac{1}{3}\left(3\sqrt{b+8}\right) \leq \frac{b+17}{6},$$

do đó $\sqrt{\frac{a}{b+8}} \geq \frac{6\sqrt{a}}{b+17}$. Ta cần chứng minh

$$\frac{\sqrt{a}}{b+17} + \frac{\sqrt{b}}{c+17} + \frac{\sqrt{c}}{a+17} \geq \frac{1}{6}.$$

Đặt $a = \frac{y^2}{x^2}, b = \frac{z^2}{y^2}, c = \frac{x^2}{z^2}$ thì

$$\frac{\sqrt{a}}{b+17} = \frac{y}{x}\frac{1}{\frac{z^2}{y^2} + 17} = \frac{y^3}{xz^2 + 17xy^2} = \frac{y^4}{xyz^2 + 17xy^3}.$$

Tương tự, ta có

$$\frac{\sqrt{b}}{c+17} = \frac{z^4}{yx^2z + 17yz^3}, \frac{\sqrt{c}}{a+17} = \frac{x^4}{zy^2x + 17zx^3}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì

$$\frac{x^4}{zy^2x + 17zx^3} + \frac{y^4}{xyz^2 + 17xy^3} + \frac{z^4}{yx^2z + 17yz^3} \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{xyz(x + y + z) + 17(xy^3 + yz^3 + zx^3)}.$$

Ta cần có
$$6(x^2+y^2+z^2)^2 \geq xyz(x+y+z) + 17(xy^3+yz^3+zx^3).$$
Ta có bất đẳng thức quen thuộc là: $\frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)^2 \geq xyz(x+y+z)$, nên ta đưa về
$$(x^2+y^2+z^2)^2 \geq 3(xy^3+yz^3+zx^3).$$
Vậy bất đẳng thức đã cho là đúng. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. $\square$

Bài toán 7. *Cho các số thực dương $a,b,c$ có $a^2+b^2+c^2=3$, chứng minh rằng*
$$\frac{a^3}{a+b^5}+\frac{b^3}{b+c^5}+\frac{c^3}{c+a^5} \geq \frac{3}{2}.$$

*Lời giải.* Thay $a^2+b^2+c^2=3$ vào, ta viết bất đẳng thức đã cho lại thành
$$\sum\left(\frac{a^3}{a+b^5}-a^2\right)+\frac{3}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \sum\frac{a^2b^5}{a+b^5} \leq \frac{3}{2}.$$
Ta có $a+b^5 \geq 2\sqrt{ab^5}$, ta đưa về chứng minh
$$\sum ab^2\sqrt{ab} \leq 3.$$
Lại có $2\sqrt{ab} \leq a+b$ nên ta tiếp tục đưa về
$$\sum a^2b^2 + \sum ab^3 \leq 6.$$
Vì $\sum a^2b^2 \leq \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2 = 3$ và theo bất đẳng thức Vasile Cirtoaje thì $\sum ab^3 \leq 3$, ta có đpcm. $\square$

Bài toán 8. *Cho $a,b,c$ là các số dương thỏa mãn $a+b+c=3$, chứng minh rằng*
$$\frac{a}{3a+b^2}+\frac{b}{3b+c^2}+\frac{c}{3c+a^2} \leq \frac{3}{2}.$$

*Lời giải.* Ta có $\frac{a}{3a+b^2} = \frac{1}{3} - \frac{b^2}{3(3a+b^2)}$, tương tự với các đẳng thức khác, ta viết lại bất đẳng thức đã cho thành
$$\frac{a^2}{3c+a^2}+\frac{b^2}{3a+b^2}+\frac{c^2}{3b+c^2} \geq \frac{3}{2}.$$
Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì
$$\begin{aligned}\sum\frac{a^2}{3c+a^2} &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sum a^2(3c+a^2)} = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sum a^4+\sum a\sum ab^2} \\ &= \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sum a^4+\sum a^2b^2+abc\sum a+\sum ab^3} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2+\sum ab^3}.\end{aligned}$$
Đến đây, ta đưa về bất đẳng thức Vasile Cirtoaje. $\square$

Bài toán 9. *Cho $a, b, c$ là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$, chứng minh rằng*

$$a^2b+b^2c+c^2a+9 \geq 4(a+b+c).$$

*Lời giải.* Nhân hai vế cho $a+b+c>0$, ta được

$$(a+b+c)\sum a^2b+9(a+b+c) \geq 4(a+b+c)^2.$$

Từ các đánh giá

$$3\sum a^2b^2 \geq (ab+bc+ca)^2 \text{ và } \left(\sum a^2\right)^2 \geq 3\sum ab^3,$$

ta có được

$$\begin{aligned}&\left(\sum a\right)\left(\sum a^2b\right)=\left(\sum a^2\right)\left(\sum ab\right)+\sum a^2b^2-\sum ab^3\\&\geq 3\sum ab+\frac{1}{3}\left(\sum ab\right)^2-3.\end{aligned}$$

Ta đưa về chứng minh

$$3\sum ab+\frac{1}{3}\left(\sum ab\right)^2-3+9\sum a \geq 4\left(\sum a\right)^2.$$

Đặt $p=a+b+c$ thì $ab+bc+ca=\frac{p^2-3}{2}$, ta viết lại

$$\begin{aligned}&\frac{3(p^2-3)}{2}+\frac{(p^2-3)^2}{2}-3+9p \geq 4p^2\\&\Leftrightarrow (p-3)^2(p^2+6p-9) \geq 0,\end{aligned}$$

đúng do $p=a+b+c>\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{3}$. □

Bài toán 10. *Cho $a, b, c>0$ thỏa mãn $a^6+b^6+c^6=3$, chứng minh rằng*

$$\frac{a^5}{b}+\frac{b^5}{c}+\frac{c^5}{a} \geq 3.$$

*Lời giải.* Theo bất đẳng thức Holder thì

$$\left(\frac{a^5}{b}+\frac{b^5}{c}+\frac{c^5}{a}\right)^3 \geq \frac{(a^6+b^6+c^6)^4}{a^9b^3+b^9c^3+c^9a^3}=\frac{81}{a^9b^3+b^9c^3+c^9a^3}.$$

Ta đưa về chứng minh

$$a^9b^3+b^9c^3+c^9a^3 \leq 3 \Leftrightarrow 3(a^9b^3+b^9c^3+c^9a^3) \leq (a^6+b^6+c^6)^2.$$

Đặt $x=a^3, y=b^3, z=c^3$, ta đưa về bất đẳng thức Vasile Cirtoaje. □

Để kết thúc phần này, ta xét hai bài toán có dùng đến các yếu tố giải tích và các phép thế đặc biệt rất kỹ thuật.

Bài toán 11.

(a) *Cho* $m > n > 0$ *và* $a, b, c$ *là các số thực dương thỏa mãn* $a^{m+n} + b^{m+n} + c^{m+n} = 3$, *chứng minh rằng*

$$\frac{a^m}{b^n} + \frac{b^m}{c^n} + \frac{c^m}{a^n} \geq 3.$$

(b) *Cho* $a, b, c > 0$, *chứng minh rằng*

$$\sum \frac{1}{4a} + \sum \frac{1}{a+b} \geq 3 \sum \frac{1}{3a+b}.$$

*Lời giải.*

(a) Đặt $(a^{m+n}, b^{m+n}, c^{m+n}) \to (x^2, y^2, z^2)$ và $x, y, z > 0$, $k = \frac{2n}{m+n}$ thì $0 < k < 1$. Khi đó, ta có $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ và cần chứng minh

$$\frac{x^{2-k}}{y^k} + \frac{y^{2-k}}{z^k} + \frac{z^{2-k}}{x^k} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(xy)^k} + \frac{y^2}{(yz)^k} + \frac{z^2}{(zx)^k} \geq 3.$$

Theo bất đẳng thức Jensen cho hàm lồi $f(t) = \frac{1}{t^k}$, ta có

$$\frac{x^2}{(xy)^k} + \frac{y^2}{(yz)^k} + \frac{z^2}{(zx)^k} \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\left(\frac{x^2 \cdot xy + y^2 \cdot yz + z^2 \cdot zx}{x^2 + y^2 + z^2}\right)^k} = \frac{3^{k+1}}{(x^3y + y^3z + z^3x)^k}.$$

Cuối cùng, ta có $x^3y + y^3z + z^3x \ \leq 3$ nên có ngay đánh giá cần chứng minh.

(b) Ta sẽ giải bài toán tổng quát là $f(t) \geq 0, \forall t \geq 0$ với

$$f(t) = \sum \frac{t^{4a}}{4a} + \sum \frac{t^{2a+2b}}{a+b} - 3 \sum \frac{t^{3a+b}}{3a+b}$$

(bài toán là trường hợp đặc biệt khi $t = 1$). Ta có

$$tf'(t) = \sum t^{4a} + 2 \sum t^{2a+2b} - 3 \sum t^{3a+b}.$$

Đặt $x = t^a, y = t^b, z = t^c$ thì $x, y, z > 0$ và ta cần chỉ $f'(t) \geq 0, \forall t > 0$ hay

$$x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \geq 3(x^3y + y^3z + z^3x).$$

Đây chính là bất đẳng thức Vasile Cirtoaje.

□

Ngoài ra có một bài toán rất khó của tác giả Phạm Kim Hùng, HCV IMO 2004, cũng có thể giải bằng bất đẳng thức Vasile Cirtoaje (và có lẽ chỉ có cách này mới làm đối xứng hóa bài toán được). Mời bạn đọc thử sức!

Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2 + c} + \frac{b}{c^2 + a} + \frac{c}{a^2 + b} \geq \frac{3}{2}.$$

Cuối cùng, ta xét một số bài toán khác của cùng tác giả Vasile Cirtoaje.

## 3. Giới thiệu một số bài toán khác

Bài toán 12. *Cho* $a, b, c > 0$, *chứng minh rằng*

$$\left(1+\frac{4a}{a+b}\right)^2+\left(1+\frac{4b}{b+c}\right)^2+\left(1+\frac{4c}{c+a}\right)^2 \geq 27.$$

*Lời giải.* Đặt $x=\frac{a-b}{a+b}, y=\frac{b-c}{b+c}, z=\frac{c-a}{c+a}$ thì ta có $-1<x,y,z<1$ và $x+y+z+xyz=0$. Khi đó

$$\frac{2a}{a+b}=x+1,\ \frac{2b}{b+c}=y+1,\ \frac{2c}{c+a}=z+1$$

nên ta viết bất đẳng thức đã cho lại thành

$$\begin{aligned}&(2x+3)^2+(2y+3)^2+(2z+3)^2 \geq 27\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+3(x+y+z) \geq 0\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geq 3xyz.\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$x^2+y^2+z^2 \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \geq 3\left|xyz\right| \geq 3xyz$$

do $-1<xyz<1$, đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=0$ hay $a=b=c$. □

Bài toán 13. *Với* $n \geq 3$, *xét* $n$ *số thực thỏa mãn* $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n,\ a_1+a_2+\cdots+a_n=0$. *Chứng minh rằng*

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+na_1a_n \leq 0.$$

*Hỏi dấu bằng xảy ra khi nào?*

*Lời giải.* Xét số $i \in \{2,3,\ldots,n-1\}$, ta đều có

$$(a_i-a_1)(a_i-a_n) \leq 0 \Leftrightarrow a_i^2 \leq a_i(a_1+a_n)-a_1a_n.$$

Từ đây, ta đưa về chứng minh

$$\begin{aligned}&a_1^2+a_n^2+(a_1+a_n)(a_2+a_2+\cdots+a_{n-1})-(n-2)a_1a_n+na_1a_n \leq 0\\ &\Leftrightarrow a_1^2+a_n^2-(a_1+a_n)^2+2a_1a_n \leq 0.\end{aligned}$$

Tuy nhiên, đánh giá cuối lại là đẳng thức nên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi tất cả các số bằng $0$. □

Bài toán 14. *Cho* $a, b, c$ *là các số thực không âm thỏa mãn* $a^2+b^2+c^2=3$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b+2}+\frac{b}{c+2}+\frac{c}{a+2} \leq 1.$$

*Lời giải.* Bất đẳng thức đã cho viết lại thành

$$\sum a(a+2)(c+2) \le (a+2)(b+2)(c+2)$$
$$\Leftrightarrow ab^2+bc^2+ca^2+2(a^2+b^2+c^2) \le abc+8$$
$$\Leftrightarrow ab^2+bc^2+ca^2 \le abc+2.$$

Giả sử $b$ nằm giữa $a, c$ thì ta có $(b-a)(b-c) \le 0$ nên $b^2+ac \le b(a+c)$. Suy ra

$$ab^2+bc^2+ca^2 = a(b^2+ca)+bc^2 \le ab(a+c)+bc^2 = b(a^2+c^2)+abc$$

nên ta đưa về chứng minh $b(a^2+c^2) \le 2$. Tuy nhiên, bất đẳng thức này đúng vì

$$2-b(a^2+c^2) = 2-b(3-b^2) = (b-1)^2(b+2) \ge 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$ hoặc $(a,b,c)=(0,1,\sqrt{2})$ và các hoán vị. □

Bài toán 15. *Cho các số thực $a, b, c$ có tổng là 3. Chứng minh rằng*

$$3(a^4+b^4+c^4)+33 \ge 14(a^2+b^2+c^2).$$

*Lời giải.* Giả sử rằng $c=\min\{a,b,c\}$ thì $a+b \ge 2$. Ta sẽ chỉ ra rằng

$$3(a^4+b^4)-14(a^2+b^2) \ge \frac{3}{8}(a+b)^4-7(a+b)^2$$

hay

$$3(a-b)^2(7a^2+10ab+7b^2) \ge 56(a-b)^2.$$

Chú ý rằng

$$3(7a^2+10ab+7b^2) \ge 18(a+b)^2 = 72 > 56$$

nên đánh giá trên đúng. Ta đưa về

$$\frac{3}{8}(a+b)^4+c^4-7(a+b)^2+33 \ge 14c^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{8}(3-c)^4+c^4-7(3-c)^2+33 \ge 14c^2$$
$$\Leftrightarrow (c-1)^2(3c+1)^2 \ge 0.$$

Đánh giá cuối đúng nên bất đẳng thức đã cho được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c)=(1,1,1), \left(-\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$ cùng các hoán vị. □

Các bài toán sau bạn đọc tự thử sức.

Bài toán 16 (2005). *Cho $a, b, c$ là các số thực không âm và $ab+bc+ca>0$, chứng minh rằng*

$$\sqrt{1+\frac{48a}{b+c}}+\sqrt{1+\frac{48b}{c+a}}+\sqrt{1+\frac{48c}{a+b}} \ge 15.$$

**Bài toán 17 (2007).** *Cho $a, b, c$ là các số thực thỏa mãn*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=5,$$

*chứng minh rằng*

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}\geq\frac{17}{4}.$$

**Bài toán 18 (2009).** *Cho $a, b, c$ là độ dài các cạnh của tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{4a^2+5bc}+\frac{b^2}{4b^2+5ca}+\frac{c^2}{4c^2+5ab}\geq\frac{1}{3}.$$

**Bài toán 19 (2011).** *Cho $a, b, c > 0$, đặt*

$$E=\left(a+\frac{1}{a}-\sqrt{3}\right)\left(b+\frac{1}{b}-\sqrt{3}\right)\left(c+\frac{1}{c}-\sqrt{3}\right),$$
$$F=\left(a+\frac{1}{b}-\sqrt{3}\right)\left(b+\frac{1}{c}-\sqrt{3}\right)\left(c+\frac{1}{a}-\sqrt{3}\right).$$

*Chứng minh rằng $E \geq F$.*

**Bài toán 20 (2013).** *Cho $a, b, c$ là các số dương, chứng minh rằng*

$$\frac{1}{1+3a}+\frac{1}{1+3b}+\frac{1}{1+3c}\geq\frac{3}{3+abc}.$$

## Tài liệu

[1] Vasile Cirtoaje, Discrete Inequality, bộ sách Art of problem solving 2015.

[2] Lê Khánh Sỹ, Bất đẳng thức AM-GM, 2018.

[3] Phạm Kim Hùng, Sáng tạo bất đẳng thức, 2005.

[4] Võ Quốc Bá Cẩn, Bất đẳng thức hiện đại.

# Các Vấn Đề Cổ Điển Và Hiện Đại

Trần Nam Dũng

Trong số này, chuyên mục sẽ giới thiệu chuỗi bài toán về số đại số được đề xuất trong vòng thi Hội nghị mùa hè của cuộc thi toán giữa các thành phố (Tournament of the Towns - ITOT).

Đây là vòng thi khó nhất, hấp dẫn nhất và cũng bổ ích nhất của ITOT. Thí sinh tham dự sẽ được chia thành các đội và giải khoảng 5, 6 chuỗi các bài toán trong vòng gần 1 tuần. Thí sinh vừa làm việc với nhau, vừa sinh hoạt, trao đổi một cách tự do (trong đó có thể tra cứu tài liệu, Internet,...). Các chuỗi bài toán có thể xuất phát từ những vấn đề rất đơn giản, nhưng sau đó sẽ được dẫn dắt đến các vấn đề hiện đại và thách thức. Các kiến thức bổ sung sẽ được lồng vào trong đề bài. Đặc biệt, sẽ có hẳn một buổi để các thành viên Ban giám khảo giới thiệu đề bài cho các thí sinh, trả lời các thắc mắc. Buổi giới thiệu đề bài này có khi kéo dài cả một buổi, thậm chí một ngày.

Nói chung vòng thi Hội nghị mùa hè của ITOT đã nâng việc giải toán lên một tầm mới. Đây không chỉ là một bài toán riêng lẻ mà một thí sinh có thể giải trong 1, 2 giờ, mà là chuỗi bài toán mà nhiều người phải làm trong nhiều ngày. Nội dung cũng không phải là một kết quả đơn lẻ mà thường là cả một lý thuyết, một lớp các bài toán. Dù đây vẫn chỉ là các kết quả đã biết được các thí sinh chứng minh lại nhưng đã có nhiều yếu tố nghiên cứu khoa học ở đây, chứ không chỉ là giải toán. Và trên thực tế, đã có nhiều kết quả mới, cách tiếp cận mới được các thí sinh đề xuất, vượt cả mong đợi của Ban giám khảo.

Vòng thi Hội nghị mùa hè lần thứ 32 (được tính cho năm 2020) là một vòng thi đặc biệt. Nó diễn ra vào ... mùa Đông (từ 26/1 đến 3/2/2021) và dưới hình thức online. Với cách thức tổ chức rất tự do như đã nói ở trên, việc chuyển sang online thực tế không tạo ra bất cứ một khó khăn về mặt tổ chức nào.

Dưới đây là một trong 5 chuỗi bài toán (dự án) được đề xuất trong Hội nghị năm nay.

# Số Đại Số Dưới Góc Nhìn Đại Số Tuyến Tính

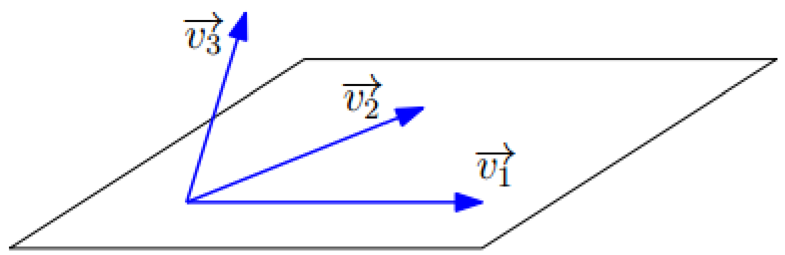
I.Vorobiev, S.Dorichenko, A.Zilina, A. Kanel-Belov, A. Kannunikov, B.Frenkin

## Dẫn nhập

Trong hình học chúng ta đã quen cộng các véc-tơ và nhân chúng với các vô hướng (số). Ngôn ngữ hình học này sẽ rất hữu ích không chỉ trong các tình huống hình học. Trong dự án này, chúng ta sẽ xem các số đại số, các số là nghiệm đa thức với hệ số hữu tỷ, là các véc-tơ. Bản thân các số hữu tỷ sẽ đóng vai trò vô hướng.

Ta nói các số phức $x_1, \ldots, x_n$ độc lập tuyến tính trên $\mathbb{Q}$ nếu đẳng thức $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$, trong đó $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$ chỉ có thể xảy ra khi $a_1 = \cdots = a_n = 0$ (hãy so sánh điều này với các véc-tơ không đồng thẳng trong không gian 3 chiều, hình 1).

$$a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + a_3\vec{v_3} = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$$




Hình 1:

Nói chung, góc nhìn lên các số đại số như là các véc-tơ rất tự nhiên và hiệu quả, nó cho phép áp dụng các ý tưởng hình học vào các vấn đề đại số.

Dự án này được xây dựng như thế nào? Chúng ta sẽ bắt đầu từ các bài toán olympic về căn thức để khai vị. Một số bài toán có thể giải bằng các phương pháp ở trường phổ thông, một số khác cần đến các ý tưởng và phương pháp mới – những ý niệm đầu tiên về số đại số và trường các số, được trình bày ở phần 2. Bạn sẽ được học ngôn ngữ và công cụ cần thiết và thuận lợi để giải quyết một lớp rộng các bài toán. Đây là phần mở đầu của dự án.

Ở phần 3, chúng tôi sẽ phát biểu định lý cơ bản của dự án và đề xuất chứng minh nó theo một kế hoạch được dẫn ra, sử dụng các kiến thức đã được cung cấp. Cuối cùng, chúng tôi sẽ đưa ra bài toán nghiên cứu, phát triển và mở rộng định lý.

Bạn cần phải biết trước điều gì? Các sự kiện căn bản về số phức và đa thức. Điều quan trọng nhất là biết khai căn số phức và biết chia đa thức. Nếu bạn không quen với số phức thì chắc là bạn sẽ vừa sức với các bài toán về căn bậc hai.

Nền tảng của lý thuyết số đại số được hình thành trong công trình của Carl Gauss "*Nghiên cứu số học*" (1801), đóng một vai trò to lớn trong lý thuyết số và tạo những nền tảng (cùng với các công trình của Lagrange) cho các phát minh của Evariste Galois, người đã tìm ra tiêu chuẩn giải được bằng căn thức của phương trình đại số (1830) và đặt nền móng cho các chuyên ngành hiện đại của đại số như lý thuyết nhóm và trường. Lý thuyết Galois và lý thuyết trường các số đại số được hệ thống hóa và hoàn chỉnh trong nửa sau của thế kỷ 19 và nửa đầu của thế kỷ XX bằng các đóng góp của Kummer, Kronecker, Hilbert,...

## 1. Các bài toán khai vị

Nếu như có bài toán nào gây khó cho bạn, hãy quay trở lại với nó sau khi bạn đọc phần 2.

Bài 1. Chứng minh tính vô tỷ của các số sau

a) $\sqrt[3]{1001}$.

b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

c) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$.

d) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}$.

e) $\sqrt[5]{3}-\sqrt[5]{2}$.

f) $\sqrt{\frac{3}{5}}+\frac{\sqrt[17]{2020!}}{2020}+\sqrt[5^5]{7^{7^{7^7}}}$.

Nếu như bạn thậm chí còn không biết làm thế nào với các số kinh dị ở ví dụ cuối cùng, thì ý tưởng gợi ý đầu tiên là: Hãy chứng minh mệnh đề mạnh hơn về độc lập tuyến tính. Ví dụ, ở mục b) nếu $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}=0$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ thì $a=b=c=d=0$.

Bài 2. Tìm đa thức với hệ số hữu tỷ có bậc nhỏ nhất nhận các số sau làm nghiệm

a) $\sqrt[3]{4}$.

b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

c) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$.

d) $\sqrt[8]{8}+\sqrt[9]{9}$.

e) $\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}$.

f) $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$.

g) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.

h) $\cos\frac{2\pi}{5}$.

i) $\cos\frac{2\pi}{9}$.

j) $\cos \frac{2\pi}{97}$.

k) $\cos \frac{2\pi}{n}$, với mọi $n$ nguyên dương.

Nếu như bạn tìm được các đa thức, nhưng không chắc là nó có tối tiểu hay không, thì cũng cứ viết đa thức này ra. Trong tất cả các bài, trừ $c,\ d,\ j,\ k$, hãy viết đa thức ở dạng thông thường. Để giải các bài $j$ và $k$, sẽ tốt hơn nếu ra chuyển sang mặt phẳng phức.

Bài 3. Số nào trong các số có dạng $\frac{a+bi}{a-bi}$, trong đó $a,\ b$ là các số nguyên là căn của đơn vị?

Còn đây là một số bài toán liên quan đến vô tỷ bậc hai. Trong các bài toán này có chứa đựng một ý tưởng quan trọng

Bài 4. Tồn tại hay không các số hữu tỷ $a,\ b,\ c,\ d$ sao cho

$$(a+b\sqrt{2})^2+(c+d\sqrt{2})^2=7+5\sqrt{2}?$$

Bài 5. Tìm 1000 chữ số đầu tiên sau dấu phẩy trong các viết thập phân của số $(6+\sqrt{37})^{1001}$.

Bài 6. Nhân 2100 biểu thức có dạng

$$\pm\sqrt{1}\pm\sqrt{2}\pm\cdots\pm\sqrt{99}\pm\sqrt{100},$$

với nhau (với tất cả các cách chọn dấu). Chứng minh rằng tích thu được:

a) là một số nguyên.

b) là bình phương của một số nguyên.

## 2. Một chút lý thuyết Trường và Số đại số

Tính độc lập tuyến tính của 1 và $\sqrt{2}$ (trên $\mathbb{Q}$) đơn giản nghĩa là $\sqrt{2}$ vô tỷ. Sự kiện này đã được người Hy Lạp cổ biết đến. Ta tăng số các căn thức lên.

Theo dõi chứng minh sau

Bài 7. Chứng minh rằng $1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6}$ độc lập tuyến tính trên $\mathbb{Q}$.

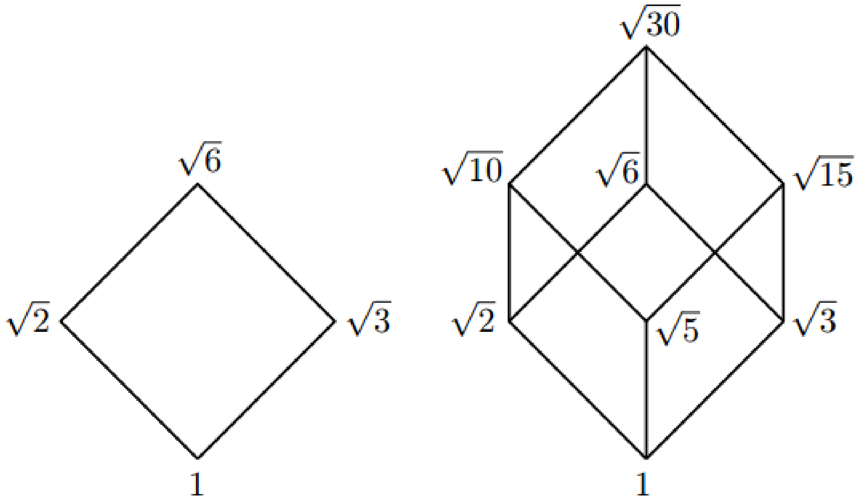
Nếu $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}=0$ với $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{Q}$. Ta tách $\sqrt{3}$ ra

$$a+b\sqrt{2}+(c+d\sqrt{2})\sqrt{3}=0.$$

Nếu $c+d\sqrt{2}=0$ thì suy ra $a+b\sqrt{2}=0$ và do tính độc lập tuyến tính trên $\mathbb{Q}$ của 1 và $\sqrt{2}$ suy ra $c=d=0, a=b=0$.

Nếu $c+d\sqrt{2}\neq 0$ thì

$$\sqrt{3}=\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=A+B\sqrt{2},$$




Hình 2:

trong đó

$$A = \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} \in \mathbb{Q}, \quad B = \frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2} \in \mathbb{Q}.$$

Hãy tiếp tục lập luận trên để đi đến mâu thuẫn.

Qua ví dụ vừa xét ở trên ta thấy được một số ý tưởng. Chúng ta đã đưa việc chứng minh tính độc lập tuyến tính của các số 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ đến việc chứng minh rằng $\sqrt{3}$ "*khác dạng*" đối với tập hợp $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2} = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a,\ b \in \mathbb{Q}\}$ (nói một cách chính xác là $\sqrt{3}$ không thuộc tập hợp này), cũng giống như $\sqrt{2}$ khác dạng đối với $\mathbb{Q}$. Thêm vào đó, điều quan trọng là trong tập hợp $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$ ta không chỉ có thể cộng, trừ, nhân mà còn có thể chia (chỉ không chia cho 0), như là ở trong $\mathbb{Q}$, bằng kỹ thuật khử căn ở mẫu số quen thuộc.

Tập hợp số, chứa 0 và 1 và đóng đối với bốn phép tính số học, được gọi là trường số. Tính từ "*số*" ta sẽ bỏ bớt. Như thế $K$ là trường nếu $0,\ 1 \in K$ và với mọi $a, b \in K$ thì $a \pm b$, $ab \in K$ và $\frac{a}{b} \in K$ với $b \neq 0$. Dễ thấy rằng $\mathbb{Q}$ là một trường, hơn nữa là "*nhỏ nhất*" – mọi trường (số) đều chứa nó. Nếu $K \subseteq L$ là các trường thì ta nói $K$ là trường con trong $L$.

Ta nói hệ các số $x_1, \ldots, x_2 \in \mathbb{C}$ độc lập tuyến tính trên trường $K$, nếu đẳng thức

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0, \quad a_1, \ldots, a_n \in K,$$

chỉ có thể xảy ra nếu $a_1 = \cdots = a_n = 0$. Ví dụ các số 1 và $\sqrt{2}$ độc lập tuyến tính trên $\mathbb{Q}$, nhưng phụ thuộc tuyến tính trên $\mathbb{R}$.

Các tính chất cơ bản của độc lập tuyến tính.

Bài 8. Cho $K$ là một trường. Chứng minh rằng:

a) Hệ chứa 0 hoặc chứa hai số tỷ lệ với nhau trên $K$, phụ thuộc tuyến tính trên $K$.

b) Hệ con của một hệ độc lập tuyến tính cũng độc lập tuyến tính (trên cùng trường đó).

c) Hệ $1, x$ độc lập tuyến tính trên $K$ khi và chỉ khi $x \notin K$

d) Các hệ số $a_1, \ldots, a_n \in K$ trong cách viết của số $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ sẽ được xác định một cách duy nhất khi và chỉ khi $x_1, \ldots, x_n$ độc lập tuyến tính.

Gắn thêm vào trường $K$ các số $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ có nghĩa là lấy trường nhỏ nhất (theo nghĩa bao hàm) chứa $K$ và các số này.

Bài 9. Gắn thêm căn bậc hai. Gọi $K$ là một trường con của $\mathbb{R}$, $0 < d \in K$ và $\sqrt{d} \notin K$ (ví dụ $K = \mathbb{Q}$ và $d = 2$). Chứng minh rằng

$$K(\sqrt{d}) = \left\{a + b\sqrt{d} \,\middle|\, a, b \in K\right\},$$

trong đó các số $a, b$ trong cách viết của $a + b\sqrt{d}$ xác định một cách duy nhất.

Bài 10. Chứng minh rằng $Q(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Bài 11. Khử căn ở mẫu số $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$.

Bài 12. a) Chứng minh rằng cách số ở đỉnh ở hình lập phương $2b$ (tức là các số $1$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{30}$) độc lập tuyến tính trên $\mathbb{Q}$.

b) Bổ sung thêm $\sqrt{7}$, hãy vẽ siêu hình lập phương và chứng minh mệnh đề tương tự mục a).

Và bây giờ, có thể phát biểu định lý tổng quát về căn bậc hai của các số nguyên tố và chứng minh nó bằng quy nạp? Nói riêng, từ định lý này suy ra lời giải của bài toán 2 d).

Tính phụ thuộc tuyến tính trên trường $K$ của các lũy thừa $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ có nghĩa là gì? Tồn tại hay không các số $c_0, c_1, \ldots, c_n \in K$, không đồng thời bằng 0 sao cho

$$c_0 + c_1\alpha + \cdots + c_n\alpha^n = 0.$$

Nói cách khác $\alpha$ là nghiệm của một đa thức khác 0 có hệ số thuộc $K$. Số $\alpha$ như vậy được gọi là số đại số trên $K$. Trong tất cả các đa thức như vậy chỉ có duy nhất một đa thức có bậc nhỏ nhất và có hệ số cao nhất bằng 1 (tại sao?). Đa thức như vậy gọi là đa thức tối tiểu của số $\alpha$ trên $K$ và thường được ký hiệu là $\mu_\alpha^K(x)$. Ví dụ $\mu_i^{\mathbb{R}}(x) = x^2 + 1$, $\mu_i^{\mathbb{C}}(x) = x - i$. Bậc $\deg \mu_\alpha^K(x)$ của đa thức này thường được gọi là bậc của số $\alpha$ trên $K$ và ký hiệu là $\deg_K(\alpha)$. Nghiệm của đa thức $\mu_\alpha^K(x)$ được gọi là các số liên hợp với $\alpha$ trên $K$

Trong trường hợp $K = \mathbb{Q}$ ta sẽ nói đơn giản là các số đại số.

Bài 13. Giả sử số $\alpha \in \mathbb{C}$ đại số trên trường $K \subseteq \mathbb{C}$. Chứng minh rằng

a) $\deg_K(\alpha)$là số nguyên dương $n$ nhỏ nhất sao cho $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ phụ thuộc tuyến tính trên $K$.

b) Đa thức $\mu_\alpha^K(x)$ bất khả quy trên $K$ (tức là không thể phân tích được thành tính của các đa thức với bậc nhỏ hơn).

c) Mọi đa thức thuộc $K[x]$ có nghiệm là $\alpha$ đều chia hết cho $\mu_\alpha^K(x)$.

d) Đa thức bất khả quy trên $K$ có nghiệm là $\alpha$ và có hệ số cao nhất bằng 1 bằng $\mu_\alpha^K(x)$.

Tiêu chuẩn bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ dưới đây có thể sử dụng mà không cần chứng minh.

Định lý 1 (Tiêu chuẩn Eisenstein). *Nếu các hệ số của đa thức* $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ *với một số nguyên tố* $p$ *nào đó thỏa mãn các điều kiện:*

- $a_n$ *không chia hết cho* $p$,
- $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ *chia hết cho* $p$,
- $a_0$ *không chia hết cho* $p^2$,

*thì đa thức này bất khả quy trên* $\mathbb{Q}$.

Bài 14. Hãy hoàn tất lời giải bài toán 2 e).

a) Giả sử $\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{2} + a$ với $a$ là số hữu tỷ. Hãy tìm đa thức tối tiểu của các số nằm ở vế trái và vế phải.

b) Giải phương trình trong tập hợp các số nguyên dương $\sqrt[5]{m} + \sqrt[5]{n} = 2020$.

Bây giờ ta sẽ mở rộng bài toán 9.

Định lý 2 (Về khử căn ở mẫu số). *Giả sử* $\alpha$ *là số đại số trên trường* $K$ *và có bậc* $n$. *Khi đó mọi số trong trường* $K(\alpha)$ *đều có thể viết dưới dạng*

$$c_0 + c_1\alpha + \cdots + c_{n-1}\alpha^{n-1},$$

*trong đó* $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in K$.

Bài 15. a) Hãy khử căn ở mẫu số của phân số

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 3}.$$

*Hướng dẫn*: Ở đây việc nhân các lượng liên hợp là không khả thi. Hãy tìm các đa thức $u(x), v(x) \in \mathbb{Q}[x]$ sao cho $u(x)(x^2 + x + 3) + v(x)(x^3 - 2) = 1$. Để làm điều này có thể dùng bước ngược lại của thuật toán Euclide hoặc dùng phương pháp hệ số bất định.

b) Chứng minh định lý 2.

Theo định lý cơ bản của đại số, mọi đa thức trên $\mathbb{C}$ có bậc $n > 0$ có $n$ nghiệm nếu tính cả bội. Theo định lý dưới đây, đa thức $\mu_\alpha^K(x)$ không có nghiệm bội và như vậy, mỗi số đại số bậc $n$ có đúng $n$ liên hợp (kể cả chính nó).

Định lý 3. *Đa thức bất khả quy trên một trường con của* $\mathbb{C}$, *không có nghiệm bội phức.*

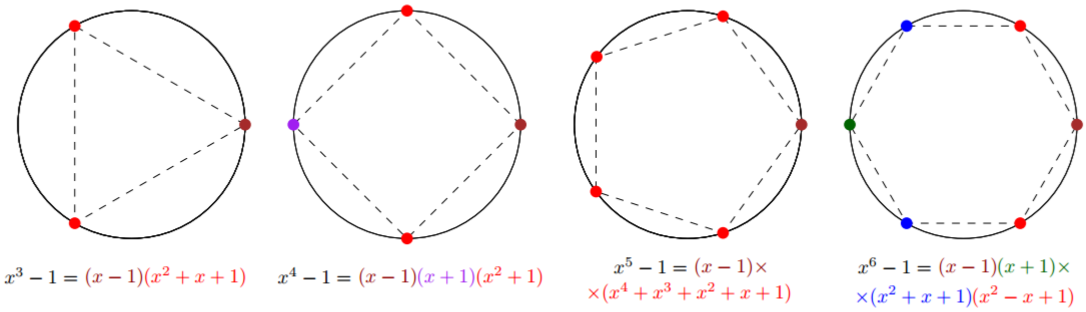
Bài 16. Hãy phân tích nhị thức $x^4 - 2$ ra thành các thừa số bất khả quy và chia các nghiệm của nó thành các lớp liên hợp trên mỗi trường số sau

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i).$$

Các căn của đơn vị có một vai trò quan trọng. Như ta đã biết, nghiệm phức của phương trình $x^n = 1$ có dạng

$$1, \varepsilon_n, \varepsilon_n^2, \ldots, \varepsilon_n^{n-1},$$

trong đó $\varepsilon_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ (đây là trường hợp riêng của công thức Moivre). Ta chia chúng ra thành các nhóm liên hợp trên trường $\mathbb{Q}$. Để làm điều này cần phân tích nhị thức $x^n - 1$ thành các thừa số bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ : Nghiệm của mỗi nhân tử bất khả quy sẽ tạo thành lớp các số đại số liên hợp. Ta thử thực hiện điều này với các giá trị $n$ nhỏ. Trên hình 3, các thừa số bất khả quy và nghiệm của chúng được tô bởi cùng một màu




Hình 3:

Ở đây ta cần giải thích tính bất khả quy của $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Ta có một kết quả tổng quát như sau

Bài 17. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố $p$ đa thức

$$\Phi_p = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1,$$

bất khả quy trên $\mathbb{Q}$.

*Hướng dẫn*: Sử dụng tiêu chuẩn Eisenstein. Suy nghĩ xem làm sao áp dụng, bởi vì tất cả các hệ số của $\Phi_p(x)$ bằng 1.

Bài 18. Hãy phân tích nhị thức $x^{12} - 1$ thành các thừa số bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ và vẽ hình vẽ tương tự hình 3.

Gọi $\varepsilon$ là căn đơn vị. Cấp của nó là số nguyên dương $n$ nhỏ nhất sao cho $\varepsilon^n = 1$. Căn đơn vị cấp được gọi là căn nguyên thủy bậc $n$. Dễ dàng chứng minh được rằng nếu $\varepsilon_n$ là căn nguyên thủy bậc $n$ thì tất cả các căn nguyên thủy bậc $n$ sẽ có dạng $\varepsilon_n^k$ với $k$ nguyên tố cùng nhau với $n$. Số các số giữa các số $1, 2, \ldots, n$, nguyên tố cùng nhau với $n$, được ký hiệu là $\varphi(n)$, hàm số $\varphi$ được gọi là Phi-hàm Euler.

Định lý 4. *Căn bậc $n$ của đơn vị liên hợp trên $\mathbb{Q}$ khi và chỉ khi chúng có cùng cấp. Nói riêng,* $\deg_{\mathbb{Q}}(\varepsilon_n) = \varphi(n)$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$.

Định lý này tương đương với tính bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ của cái gọi là đa thức chia đường tròn

$$\Phi_n(x) = \prod_{1\leqslant k\leqslant n,(k,n)=1} (x - \varepsilon_n^k).$$

Bài toán 17 chỉ là trường hợp riêng đơn giản. Trong trường hợp tổng quát, ngay cả sự kiện các hệ số của $\Phi_n(x)$ hữu tỷ cũng không thật hiển nhiên. Chứng minh định lý 4 ở dạng tổng quát có thể chứng minh ở hội nghị. Nhưng trong mọi trường hợp chúng ta có thể sử dụng nó.

Với định lý 4, ta có thể giải nhanh chóng bài toán 3.

Bây giờ ta sẽ thử giải bài 2 c). Ta đi tìm $\mu_{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}(x)$ (khi không nói gì thì ta hiểu rằng trên trường $\mathbb{Q}$). Ý tưởng chính là ở chỗ $\sqrt[3]{2}$ là nghiệm của đa thức $\mu_{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}(x^2+x)$, mà như vậy, chia hết cho $\mu_{\sqrt[3]{2}}(x) = x^3 - 2$. Và như thế $\mu_{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}(x^2+x)$ còn có thêm nghiệm nữa là $\sqrt[3]{2}\varepsilon$ và $\sqrt[3]{2}\varepsilon^2$, trong đó $\varepsilon = \varepsilon_3$. Suy ra các số

$$\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}, \quad \sqrt[3]{4}\varepsilon^2 + \sqrt[3]{2}\varepsilon, \quad \sqrt[3]{4}\varepsilon + \sqrt[3]{2}\varepsilon^2,$$

liên hợp. Tiếp theo, chúng đều khác nhau (tại sao?). Bây giờ chỉ còn cần chứng minh là đa thức

$$(x - \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})(x - \sqrt[3]{4}\varepsilon^2 - \sqrt[3]{2}\varepsilon)(x - \sqrt[3]{4}\varepsilon - \sqrt[3]{2}\varepsilon^2),$$

có hệ số hữu tỷ, và đó sẽ chính là $\mu_{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}(x)$. Hãy chứng tỏ điều này.

Tổng quát của lập luận này chính là định lý sau đây, một trong những định lý chính của dự án

Định lý 5. *Nếu $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$ là tất cả các liên hợp của số $\alpha$ trên trường $K$, thì với mọi đa thức $f(x) \in K[x]$ số $f(\alpha)$ đại số trên $K$ và các liên hợp của nó sẽ là $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$, và trong danh sách này có thể có sự trùng lặp, khi đó mỗi phần tử sẽ lặp lại với số lần như nhau.*

Bài 19. Chứng minh định lý 5

a) Trong trường hợp $\alpha$ là nghiệm của nhị thức bất khả quy.

b) Trong trường hợp tổng quát (để nghiên cứu tính độc lập tuyến tính của các căn thức ta chỉ cần mục a), sẽ dễ chứng minh hơn. Trong mục b) có thể sử dụng định lý cơ bản về đa thức đối xứng).

Kế hoạch chứng minh như sau

1) Để chứng minh $f(\alpha)$ đại số và các liên hợp của nó nằm trong các số $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$, hãy xét đa thức
$$P(x) = (x - f(\alpha_1)) \cdots (x - f(\alpha_n)),$$
và chứng minh $F(x) \in K[x]$.

2) Để chứng minh rằng tất cả các số $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ liên hợp trên $K$, hãy xét đa thức $\mu_{f(\alpha)}(x)$.

3) Chứng minh tất cả các nghiệm của $F(x)$ có bậc giống nhau bằng cách xét $\dfrac{F(x)}{\mu_{f(\alpha)}(x)}$.

Bài 20. Tìm tất cả các số nguyên dương $n$ sao cho số $\cos \frac{2\pi}{n}$ :

a) Hữu tỷ.

b) Có thể biểu diễn được dưới dạng $a + \sqrt{b}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$, tức là $\deg_{\mathbb{Q}}(\cos \frac{2\pi}{n}) \leqslant 2$.

# 3. Phép dựng đa giác đều n cạnh

Hãy suy nghĩ cách giải bài toán 2 i) bằng định lý 4 và định lý 5. Bài toán này là bài toán chìa khóa để chứng minh phần "*chỉ khi*" của định lý Gauss-Wantzel: *Đa giác đều n cạnh dựng được bằng thước và com-pa khi và chỉ khi $\varphi(n)$ là lũy thừa của 2, tức là nếu n là tích của lũy thừa của 2 với các số nguyên tố Fermat*. Số Fermat là các số có dạng $2^{2^k} + 1$. Ta có 5 số Fermat đầu tiên nguyên tố: 3, 5, 17, 257, 65537.

Bài 21. Hãy dựng bằng thước và com-pa các đa giác đều:

a) 5 cạnh.

b) 17 cạnh.

Bài 22. Hãy thiết kế giải thuật và viết chương trình trên máy tính để dựng một đa giác đều có $p$ cạnh với:

a) $p = 17$.

b) $p = 257$.

c) $p = 65537$.

Gauss đã dựng đa giác đều 17 cạnh và chứng minh rằng với mọi số nguyên tố Fermat, đa giác đều p cạnh có thể dựng được. Trường hợp này (mục a)) không chỉ có giá trị đơn lẻ mà còn là một nấc thang quan trọng và vì thế chúng tôi đề nghị các bạn vừa làm bằng tay, vừa làm bằng chương trình trên máy tính.

Đa giác đều 257 cạnh được dựng bởi Richelot vào thế kỷ XIX, trong thế kỷ XXI, các tính toán tốt hơn là nên giao cho máy tính. Chương trình dành cho $p = 257$ sẽ được đánh giá bởi một bằng khen riêng. Chương trình dành cho $p = 65537$ sẽ là một kết quả mới và có thể gửi đăng tạp chí khoa học.

Bài 23. Bằng cách dùng thước, com-pa và trisector (dụng cụ cho phép chia ba một góc) hãy dựng nghiệm của các đa thức:

a) $8x^3 - 6x + 1$.

b) $512x^9 - 1152x^7 + 864x^5 - 240x^3 + 18x + 1$.

Điều này liên quan đến đa giác đều 9 cạnh và 27 cạnh.

Bài 24. Tìm tất cả các số nguyên tố $p$ sao cho tồn tại duy nhất $a \in \{1, ..., p-1\}$ thỏa mãn điều kiện $p \mid a^3 - 3a + 1$.

Bài 25. Sử dụng thước, com-pa và trisector hãy dựng đa giác đều:

a) 7 cạnh.

b) 13 cạnh.

"Một nghiên cứu sinh làm giáo sư hướng dẫn của anh ta ngán đến nỗi ông nói với anh "*Hãy đi mà tìm cách dựng đa giác đều* 65537 *cạnh*". Anh này đi thật và sau 20 năm trở lại với cách dựng tương ứng" (J. Littlewood, "Thập cẩm toán học"). Còn bản thảo của I.G. Germes, được viết năm 1894 sau hơn 10 năm nghiên cứu chứa phép dựng đa giác đều 65537 cạnh, được lưu giữ ở thư viện Đại học Goettingen và gồm hơn 200 trang. Nhưng bây giờ, với sự giúp đỡ của máy tính thì kết quả này có thể thu được với thời gian ít hơn đáng kể.

# 4. Tính độc lập tuyến tính của các căn thức

Định lý 6. *Cho* $N, k_1, \ldots, k_N \in N^*$, $N > 1$, $Q_1, \ldots, Q_N \in Q_+$, *trong đó* $\dfrac{\sqrt[k_i]{Q_i}}{\sqrt[k_j]{Q_j}} \notin \mathbb{Q}$ *với mọi* $i \neq j$. *Khi đó đẳng thức*

$$a_1 \sqrt[k_1]{Q_1} + \cdots + a_N \sqrt[k_N]{Q_N} = 0, \quad a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{Q},$$

*chỉ có thể xảy ra với* $a_1 = \cdots = a_N = 0$.

Nói riêng, với $Q_1 = 1$ ta thu được tổng $\sqrt[k_2]{Q_2} + \cdots + \sqrt[k_N]{Q_N}$ vô tỷ, bởi vì đẳng thức

$$a_1 \sqrt[k_1]{1} + \sqrt[k_2]{Q_2} + \cdots + \sqrt[k_N]{Q_N} = 0,$$

không thể xảy ra với bất kỳ $a_1 \in \mathbb{Q}$.

Tính vô tỷ của một căn thức là một câu hỏi đơn giản, thuần túy số học dẫn đến tính duy nhất trong khai triển ra thừa số nguyên tố.

Bổ đề 1. Với mọi số nguyên dương $k$ và số hữu tỷ $Q$ ta có: $\sqrt[k]{Q} \in \mathbb{Q}$ khi và chỉ khi bậc của các ước nguyên tố của tử số và mẫu số trong cách viết tối giản của $Q$ đều là bội của $k$.

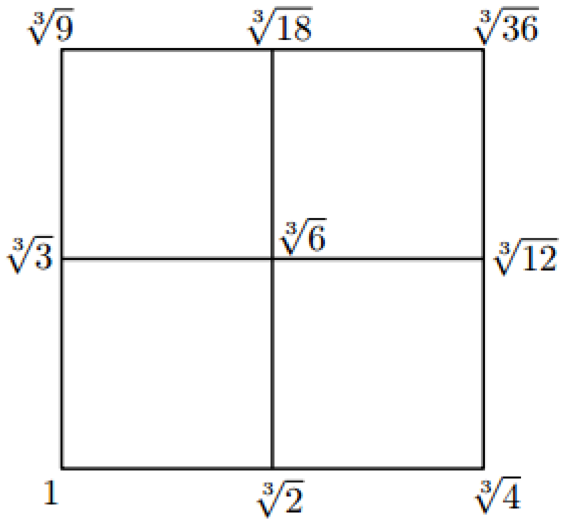
Bài 26. Chứng minh bổ đề 1.

Bài 27. Dùng định lý 6 và bổ đề 1 hãy suy ra tính vô tỷ của các số ở bài toán 1.

Không mất tính tổng quát, trong định lý 6 có thể giả sử tất cả các $Q_i$ là số nguyên dương và tất cả các $k_i$ bằng nhau và chứng minh định lý tương đương sau.

Định lý 7. *Cho các số nguyên dương $k$, $n$ và $p_1, \ldots, p_n$ là các số nguyên tố phân biệt $r_i = \sqrt[k]{p_i}$. Khi đó hệ $\{r_1^{l_1} \cdots r_n^{l_n} \mid 0 \leqslant l_1, \ldots, l_n < k\}$ gồm $k^n$ số độc lập tuyến tính trên $\mathbb{Q}$.*

Sẽ tiện lợi minh họa hệ này dưới dạng dàn $n$ chiều, xem ví dụ ở hình 2 và hình 4




Hình 4:

Bài 28. Hãy từ định lý 6 suy ra định lý 7 và ngược lại.

Bài 29. Như trong bài toán 12, đưa định lý 7 với $k = 2$ về mệnh đề sau và hãy chứng minh nó

$$\sqrt{p_n} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_{n-1}}).$$

Chúng tôi khuyên các bạn sử dụng bước chuyển sang các số liên hợp. Điều này sẽ giúp hiểu trường hợp $k > 2$ dễ dàng hơn.

Bài 30. Chứng minh rằng định lý 7 tương đương với định lý $7'$ : Với các ký hiệu của định lý 7, các lũy thừa $1,\ r_n, \ldots,\ r_n^{k-1}$ độc lập tuyến tính trên trường $\mathbb{Q}(r_1, \ldots, r_{n-1})$.

Bài 31. Cho $K$ là trường con của $\mathbb{R}$, $r^k \in K$ và $r, \ldots, r^{k-1} \notin K$. Hãy chứng minh rằng nhị thức $x^k - r$ bất khả quy trên $K$ và các lũy thừa $1,\ r, \ldots, r^{k-1}$ độc lập tuyến tính trên $K$.

Như vậy, định lý $7'$ được đưa về định lý 7" : Trong các ký hiệu như ở định lý 7, $r_n^l \notin \mathbb{Q}(r_1, \ldots, r_n)$ với mọi $l \in \{1, \ldots, k-1\}$.

Giả sử điều ngược lại. Khi đó, theo giả thiết quy nạp, mỗi số thuộc trường $\mathbb{Q}(r_1, \ldots, r_{n-1})$ biểu diễn được một cách duy nhất dưới dạng tổng của các tích có dạng $a r_1^{l_1} \cdots r_{n-1}^{l_{n-1}}$, trong đó $a \in \mathbb{Q}$ và mọi $l_i \in \{0, \ldots, k-1\}$.

Bài 32. Hãy suy ra mâu thuẫn trong trường hợp tổng chỉ có một số hạng.

Trong trường hợp tổng có ít nhất hai số hạng thì thay đổi thứ tự các căn thức $r_1, \ldots, r_{n-1}$ nếu cần, ta có thể giả sử

$$r_n^l = A_0 + A_1 r_{n-1} + \ldots + A_{k-1} r_{n-1}^{k-1}, \quad A_0, \ldots, A_{k-1} \in \mathbb{Q}(r_1, \ldots, r_{n-2}), \tag{1}$$

trong đó giữa các số $A_0, \ldots, A_{k-1}$ có ít nhất hai số khác 0.

Bài 33. a) Chứng minh rằng $A_0 = 0$.

b) Giả sử $A_j$ là hệ số đầu tiên khác 0 trong (1). Hãy đi đến mâu thuẫn bằng cách chứng minh rằng $A_j = 0$ (hãy nghĩ cách để đưa bài toán về mục trước). Điều này hoàn tất phép chứng minh định lý 7.

Bài 34. Định lý 7 có còn đúng không nếu dưới mỗi $r_j (j = 1, \ldots, n)$ ta hiểu một giá trị phức nào đó của $\sqrt[k]{p_j}$ ?

## 5. Chiều của mở rộng trường

Để hiểu sâu hơn về số đại số và giải quyết được các bài toán khó hơn, chúng ta sẽ làm quen với khái niệm không gian véc-tơ, chiều của nó và học kỹ thuật mở rộng trường (tất cả đều dành cho các tập hợp số).

Tập hợp $V \subset \mathbb{C}$, chứa trường $K$ được gọi là không gian véc-tơ trên $K$ và các phần tử của nó được gọi là véc-tơ, nếu $V$ đóng đối với phép nhân với các số từ $K$ và phép cộng tức là $a + b$, $ka \in V$ với mọi $a$, $b \in V$ và $k \in K$. Ví dụ mọi trường đều là không gian véc-tơ trên mọi trường con của nó.

Giả sử rằng không gian $V \subset \mathbb{C}$, trên trường $K$ chứa các số $e_1, \ldots, e_n$, sao cho mọi $\alpha \in V$ đều biểu diễn được dưới dạng

$$\alpha = k_1 e_1 + \cdots + k_n e_n, \tag{2}$$

với các hệ số $k_1, \ldots, k_n \in K$ được xác định một cách duy nhất. Khi đó hệ $e_1, \ldots, e_n$ được gọi là cơ sở của không gian $V$ trên $K$, và đẳng thức (2) được gọi khai triển của số $\alpha$ theo cơ sở này.

Bài 35. Chứng minh rằng cơ sở của không gian có thể được định nghĩa như hệ tối đại theo nghĩa bao hàm các véc-tơ độc lập tuyến tính.

Nói cách khác, hệ $e_1, \ldots, e_n$ là cơ sở trong $V$ trên $K$ khi và chỉ khi nó độc lập tuyến tính trên $K$, còn hệ $e_1, \ldots, e_n, \alpha$ phụ thuộc tuyến tính trên $K$ với mọi $\alpha \in V$.

Không gian có cơ sở hữu hạn được gọi là không gian hữu hạn chiều, và mở rộng trường có cơ sở hữu hạn được gọi là mở rộng hữu hạn. Số phần tử của cơ sở trong không gian $V$ trên $K$ được gọi là chiều của nó và ký hiệu là $\dim_K V$. Tính hợp lý của định nghĩa này, nói cách khác, sự không phụ thuộc của chiều vào cách chọn cơ sở được suy ra từ bổ đề sau.

Bổ đề 2 (Bổ đề cơ bản về phụ thuộc tuyến tính). Nếu như các số $f_1, \ldots, f_m$ có thể biểu diễn tuyến tính trên $K$ qua các véc-tơ $e_1, \ldots, e_n$ và $m > n$ thì các số $f_1, \ldots, f_m$ phụ thuộc tuyến tính trên $K$.

Cho $U \subseteq V$ là các không gian véc-tơ hữu hạn chiều trên trường $K$. Không khó để kiểm tra rằng mọi cơ sở trong $U$ có thể được bổ sung thành cơ sở trong $V$. Như vậy $\dim_K U \leqslant \dim_K V$ và $\dim_K U = \dim_K \Leftrightarrow U = V$.

Nếu như $K$ là trường con của trường $L$, thì ta sẽ nói về mở rộng trường $\frac{L}{K}$. Hiển nhiên là trong trường hợp này, $L$ là không gian véc-tơ trên $K$. Chiều của mở rộng hữu hạn $\frac{L}{K}$ còn được gọi là bậc của nó và ký hiệu là $[L : K]$.

Bài 36. Cho $L/K$ là mở rộng hữu hạn. Chứng minh rằng $[L : K] = 2 \Leftrightarrow L = K(\alpha)$ với một số $\alpha \in L \backslash K$ sao cho $\alpha^2 \in K$.

Bài 37. Chứng minh rằng các số $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$ tạo thành cơ sở của mở rộng $K(\alpha)/K$ nếu và chỉ nếu $\alpha$ đại số trên $K$ và có bậc $n$. Như vậy nếu $\alpha$ đại số trên $K$ thì $\deg_K(\alpha) = [K(\alpha) : K]$.

Một công cụ hữu ích trong lý thuyết mở rộng hữu hạn là định lý sau đây (hãy chứng minh nó)

Định lý 8 (Bậc của tháp). *Nếu $K \subseteq P \subseteq L$ là các mở rộng hữu hạn thì*

$$\dim_K L = \dim_K P \cdot \dim_P L.$$

Hãy so sánh với tính chất của logarit: $\log_a c = \log_a b \cdot \log_b c$.

Hãy quay trở lại với bài toán điểm tâm 1 c).

Bài 38. Hãy tìm tất cả các trường con của các trường sau:

a) $\mathbb{Q}(\sqrt[11]{1024})$.

b) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$.

c) $\mathbb{Q}(\varepsilon_5)$.

d) $\mathbb{Q}(\varepsilon_8)$.

Bài 39. Đặt $\varepsilon = \varepsilon_{17}$. Từ định lý 2 và bài toán (17) suy ra rằng $\deg(\varepsilon) = 16$. Tìm tất cả $\alpha \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$ sao cho $\deg(\alpha) = 2, 4, 8$.

*Hướng dẫn:* Hãy sử dụng định lý 5 và xét cơ sở $\varepsilon, \varepsilon^3, \varepsilon^{3^2}, \dots, \varepsilon^{3^{15}}$ trong $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ trên $\mathbb{Q}$ (chứng minh rằng đây là cơ sở). Cách sắp thứ tự này thuộc về Gauss.

Bài 40. Tìm tất cả các liên hợp trên $\mathbb{Q}$ của các số:

a) $\sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15}$.

b) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$.

c) Giả sử $U_k = \{\alpha \in \mathbb{Q}(\varepsilon)\,|k|\deg(\alpha)\}$, $k = 1, 2, 4, 8, 16$. Nói riêng $U_1 = \mathbb{Q}$ và $U_{16} = \mathbb{Q}(\alpha)$. Chứng minh rằng $U_1 \subset U_2 \subset U_4 \subset U_8 \subset U_{16}$ chuỗi các mở rộng trường bậc hai. Bằng cách như vậy ta có thể dựng được đa giác đều 17 cạnh bằng thước và com-pa (kết quả của Gauss).

# 6. Bài toán nghiên cứu

Bài 41. Ta có thể dựng được các $n$ giác đều nào bằng thước, com-pa và trisector? Các trường hợp riêng: $n = 7,\ 13,\ 19,\ 37$.

Bài 42. Xây dựng thuật toán tìm bậc của mỗi số đại số từ mở rộng trường $\mathbb{Q}(\sqrt[k]{p_1}, \ldots, \sqrt[k]{p_n})$ với $p_1, \ldots, p_n$ là các số nguyên tố phân biệt. Các trường hợp đặc biệt: $k = 2$, hoặc $k$ là số nguyên tố.

# 10 Cái Đầu Tiên Của Một Lần Đi Thi IMO

Nguyễn Tiến Dũng
Toulouse, Pháp

### Giới Thiệu

Những cái gì xảy đến trong đời lần đầu thì thường gây xúc động mạnh tạo kỷ niệm khó quên. Lần đi thi IMO 1985 của tôi có rất nhiều cái đầu tiên đó đối với tôi, hay thậm chí là những cái chỉ xảy ra duy nhất một lần, nên cũng có nhiều kỷ niệm.

## 1. Đôi giầy đầu tiên

Trước đó, tôi chưa hề biết giầy là cái gì, chỉ đi dép thôi. Đến lúc được vào đội tuyển, người ta đưa bọn tôi đến một kho quần áo giầy dép của Bộ Tài Chính (?) để cho mượn mỗi đứa một đôi giầy và một bộ com-lê. Đấy cũng là bộ com-lê đầu tiên trong đời tôi, bằng vải màu xanh nhạt đã cũ, tiếc là tôi không có tấm ảnh nào ở đây chứ nếu lên ảnh bây giờ nhìn thì chắc trông buồn cười lắm, và hôm lên nhận giải thưởng thì nó đã bị đứt bớt cúc ở tay áo nữa. Hồi đó có một bạn gốc Việt nhưng đi thi cho đoàn Canada, thấy đoàn của họ ăn mặc rất chỉnh tề, may đồng phục com-lê sang trọng mà cũng thấy hơi ghen tị. Còn giầy thì ở kho của bộ tài chính không có đôi nào đi vừa chân. Khổ cái là bàn chân tôi hơi bị to so với trung bình của Việt Nam. Thế là bố mẹ tôi phải tự thuê người đóng một đôi giầy bằng các tông. Bây giờ mà ai nói chuyện đi giầy các tông thì chắc người ta sẽ bảo là đùa vô duyên, nhưng đúng là tôi có một đôi giầy bằng giấy các tông thật. Tôi không biết giầy các tông hồi đó có phổ biến không, nhưng chắc chắn là gia đình không có đủ tiền để đóng giầy da. Đôi giầy các tông đó có thành tích là đi được ít hôm thì nó sờn nước sơn lộ ra các tông bên ngoài và bên trong thì cứa vào da. Kết quả là chân tôi có chỗ bị sưng vù trong phần lớn thời gian đi thi IMO.

## 2. Chuyến bay đầu tiên

Lần đi thi IMO cũng là lần đi máy bay đầu tiên trong đời tôi. Bọn tôi bay từ Hà Nội qua Moskva bằng máy bay của Nga (TU hay IL?), ở đó vài hôm rồi đi tàu hỏa sang Phần Lan. Được đi máy bay lần đầu háo hức lắm vì chưa biết cảm giác nó ra sao, lúc nó bay lên bay xuống rất chi là hồi hộp. Máy bay thời đó phải dừng lại mấy trạm, ở Calcutta Ấn Độ rồi thêm 1 – 2 lần nữa để nghỉ ngơi và tiếp tế chứ không bay liền được một mạch như bây giờ. Ở mỗi trạm dừng là hành khách phải xuống sân bay, ngồi đợi 1 – 2 tiếng, được phát một cốc nước uống, rồi mới lên lại máy bay.

Nhân viên phục vụ trên máy bay chỉ nói độc mỗi tiếng Nga, "*tiếng nói của Lênin*" quan trọng nhất thời đó rồi nên người ta không nghĩ cần thông báo thêm bằng tiếng Việt. Tôi cũng chẳng hiểu người ta nói gì, tuy rằng tiếng Nga là môn học bắt buộc thời học phổ thông. Chỉ nghe được mỗi hai từ "*trai*" và "*cô phê*" là hai từ người ta hay nói khi cầm cái bình trà hoặc bình cà phê. Đến lúc cần đi toilet, nhà quê ra tỉnh vào trong toilet nhưng không biết làm thế nào để khóa cửa, thế là cửa chỉ khép hờ. Một lúc sau thì cửa bật tung và một cô nhân viên hàng không bước vào khi tôi vẫn đang trong tư thế tụt quần. Cuối cùng thì cũng bay đến nơi, được Sứ Quán đưa xe ra đón về nhà khách. Thời đó còn trẻ, nên đi một chuyến bay dài như thế chẳng mệt mỏi gì, khi về nhà khách tắm rửa một cái là có thể tót xuống dạo chơi quanh khu nhà.

## 3. Phi vụ buôn lậu đầu tiên

Trước khi bay, cô Hoàng Xuân Sính trưởng đoàn họp các học sinh lại và dặn dò rất nghiêm khắc là "*các em không có được mang đồ sang Nga buôn lậu*". Trong cái đầu ngây thơ của tôi thời đó, buôn lậu là hành động vô cùng xấu xa. Tôi về truyền đạt lại nguyên si lời cô Sính dặn với bố mẹ. Tuy nhiên, bố mẹ tôi vẫn mua cho tôi 1 cái quần bò Thái, $1-2$ cái áo phông Thái, và một cái đồng hồ điện tử dây nhựa mang đi, coi như là tiêu chuẩn đồ dùng cá nhân. Những thứ đó sang Moskva bán rất đắt hàng, và có người đến ngay nhà khách ĐSQ hỏi mua chứ chẳng cần đi rao bán ở đâu. Một cái đồng hồ dây nhựa rẻ tiền nhưng sang đến Nga thì đổi được lấy hai cái bàn là, và hai cái bàn là này khi đem về đến Việt Nam thời đó thì là của hiếm có giá trị lớn lắm, tôi không nhớ chính xác, nhưng có lẽ phải hơn 10 cái đồng hồ dây nhựa. Cho đến mấy năm sau, một bà chị họ của tôi khi hỏi muốn quà gì vẫn chỉ có nguyện vọng là được tặng một cái bàn là Nga loại 7 rúp. Khi đến Moskva, nhìn hành lý các bạn, tôi mới vỡ nhẽ ra là mình là đứa ngu ngốc nghe lời cô "*dọa*", còn các bạn cùng đoàn mang đầy các thứ sang bán chẳng có làm sao. Có những bạn đã có người nhà ở Moskova đợi sẵn và dặn sẵn chuyện mang đồ sang. Về sau lớn lên thêm, tôi mới hiểu rõ thêm luật lệ kiểu Việt Nam: Người ta đặt ra các sự cấm đoán là để hù dọa nhau chứ không phải là để thực hiện, và 100 người đi Nga thì có lẽ có đến 101 người buôn lậu, càng những người có quyền hành vai vế thì mới lại buôn lậu càng lớn. (Riêng các thầy cô dẫn đoàn thì tuyệt nhiên không có buôn bán gì).

## 4. Thiên đường đầu tiên

Thiên đường đầu tiên của tôi chính là nước Nga Xô Viết. Được đến Moskva vào năm 1985 đúng như là được đến một xứ sở văn minh thịnh vượng. Lần đầu tiên được nhìn thấy các dãy nhà cao tầng ngợp trời, sao mà hiện đại thế, so với toàn Hà Nội thời đó có đúng 1 cái nhà "*hơi cao tầng*" ở khu Giảng Võ. Mà nhìn cái gì ở Moskva cũng hùng vĩ, cũng to lớn gấp hàng chục lần những thứ ở Hà Nội. Từ trường MGU, cho đến công viên Gorki, cho đến Quảng trường Đỏ, cho đến sông Moskva, cho đến tàu điện ngầm, v.v. cái gì trông cũng như thiên đường. Ăn uống thì khỏi chê. Trước đó tôi chưa từng được "*ăn uống xả láng*" các sản phẩm bơ sữa bao giờ. Tôi thuộc loại háu ăn, các loại đồ ăn Nga như sữa tươi, kefir (sữa chua), smetana (một thứ váng sữa), kolbasa (giò Nga), nước kvas (một loại nước giải khát truyền thống của Nga),... đều chén ngon lành. Thầy Quỳnh còn biểu diễn "*công nghệ*" tự làm sữa chua bằng cách để sữa tươi qua đêm. Mọi người ở Moskva đều thân thiện với chúng tôi. Đặc biệt có các anh chị khoa toán MGU rủ thêm một số anh chị khác đến dẫn chúng tôi đi chơi các nơi rất vui. Trong đó tích cực nhất có lẽ là anh Lê Tự Quốc Thắng, Trần Nam Dũng và chị Mỹ Linh. Anh Thắng thì là chuyên gia chụp ảnh, mang máy ảnh theo chụp và tự rửa ra nhiều ảnh cho cả bọn. Tôi cũng sẽ bị lây cái thú thích chụp ảnh của anh Thắng, tuy rằng chẳng bao giờ học được cách chụp hay cách rửa ảnh nghệ thuật gì cả. Người Nga thì nói chung người nào trông cũng to cao, béo tốt, hồng hào, phúc hậu. Khi đi qua các công viên, ấn tượng mạnh nhất là nhìn thấy ở đó các đôi "*choai choai*" chắc xấp xỉ tuổi mình ngồi ôm hôn nhau. Đấy quả là một "*cú sốc văn hóa*" đối với một cậu bé "*nhà quê*" mới lớn và còn đang rất sợ con gái như tôi thời đó.

## 5. Lần đầu đi tư bản

Sau khi ở Moskva khoảng một tuần, chúng tôi đi tàu hỏa sang Helsinki, thủ đô của Phần Lan. So với Moskva thì Helsinki trông không hùng vĩ bằng, nhà cửa nhỏ thôi chứ không to đùng. Nhưng mọi thứ ở đây trông đều có vẻ rất xinh xắn, chỉnh chu. Điều tôi nhớ nhất về phong cảnh Phần Lan không phải là kiến trúc nhà cửa, mà là hồ: Đâu đâu cũng thấy rất nhiều hồ. Căn nhà mà bọn tôi được người ta phân cho ở là một biệt thự nhỏ trong một khu rộng, cũng nằm ngay sát một cái hồ. Bọn tôi ra mép hồ, thấy thuyền "*vô chủ*" để ở đó cũng bèn nhảy lên trèo thuyền. Về sau mới biết đó là thuyền do người khắc thuê. Nhưng thuê thuyền thì chúng tôi không có tiền, nên từ hôm sau miễn khoản chèo thuyền. Hồi đó thực ra tôi chẳng có khái niệm tư bản nó khác XHCN ra sao, chỉ thấy "*tây*" chỗ nào nó cũng phồn vinh hơn "*ta*" quá nhiều, dù đó là Helsinki hay Moscow. Có khác chăng là ở Helsinki mọi thứ đều rất đắt đỏ đối với người từ Đông Âu sang. Đấy là tôi nghe các thầy cô dẫn đoàn nói vậy, chứ 6 đứa bọn tôi chẳng có mấy xu, tiền Phần Lam được phát cho chỉ đủ mua mấy cái bưu ảnh và vật kỷ niệm bé tẹo là nhẵn túi. Thầy cô dẫn đoàn cũng không có tiền, sang tư bản mà lúc nào cũng lo ngay ngáy, dặn đi dặn lại bọn tôi rằng phải hết sức cẩn thận, làm vỡ cái gì cũng sẽ không có tiền để đền đâu.

Căn nhà mà chúng tôi ở có lẽ là người ta phát không cho chúng tôi, chứ đoàn Việt Nam thời đó chẳng có tiền để mà tự chi. Căn nhà rất đẹp, đầy đủ tiện nghi, có điều thiếu giường, có những giường to phải ngủ chung. Kể cũng hơi kỳ, nhưng đã là "*cho không*" thì ai dám phàn nàn gì nữa.

Trong thời gian ở Phần Lan, ngày nào người ta cũng tổ chức đi thăm quan hay chơi bời gì đó cho các đoàn, trừ hai ngày thi. Ấn tượng nhất là đi thăm nhà máy sữa. Người ta nói rằng có các đường ống sữa nối thẳng từ các nhà nuôi bò đến nhà máy sữa, sữa bò vắt ra là chảy thẳng vào nhà máy. Người ta cho chúng tôi nếm các loại kem làm từ sữa bò ở đó. Kem Phần Lan ngon tuyệt vời. Về sau, dù đi bao nhiêu nơi, ăn đủ các loại kem, nhưng chưa ở đâu tôi có cảm giác sung sướng như ăn kem ở Phần Lan.

## 6. Cô gái tây đầu tiên

Để mọi người khỏi suy nghĩ lung tung, tôi phải nói ngay, đó là cô gái tây đầu tiên mà tôi được tiếp xúc làm quen, chứ không có "*làm gì khác*".

Đó là một cô gái Phần Lan tình nguyện viên tham gia vào việc tổ chức IMO và được cử làm hướng dẫn viên cho đoàn chúng tôi. Bây giờ tôi không còn nhớ tên cô là gì, chỉ nhớ rằng trông cô rất xinh, dáng người cũng rất đẹp, vừa cao, vừa thon thả vừa nở nang. Cô luôn luôn tươi cười vui vẻ. Lúc đó có lẽ cô đang là sinh viên, quãng 20 tuổi. Cô nói tiếng Anh rất lưu loát. Nhưng tôi thì một chữ tiếng Anh bẻ đôi lúc đó cũng không biết, chỉ biết được có vài từ tiếng Nga nói chẳng thành câu mà có nói ra cô hướng dẫn đoàn cũng chẳng hiểu. Mọi giao tiếp của đoàn 6 tên (trong khi thầy Quỳnh cô Sính dẫn đoàn đang bị cách ly để làm các việc chọn bài thi rồi chấm thi) với cô gái Phần Lan chủ yếu thông qua một thành viên duy nhất của đoàn có thể gọi là biết tiếng Anh, là anh Chế Quang Quyền. Tuy cùng đoàn, nhưng chỉ có mỗi anh Quyền được gọi là anh vì anh là người duy nhất học lớp 12 và theo hệ của Miền Nam từ thời trước, tức là đúng đủ 12 năm, còn 5 tên còn lại đều học lớp 11.

Thật đáng tiếc là có một cô gái rất xinh và rất vui suốt ngày đi cùng đoàn như vậy, mà chỉ nhìn thôi chứ chẳng nói chuyện được gì với cô. Thấy các bạn cùng đoàn đồn là cô có một anh bồ cũng tham gia làm tình nguyện viên ở IMO 1985, nhưng tôi không rõ lắm. Thỉnh thoảng, khi gặp hay khi chia tay, thì cô cũng thơm má tụi tôi theo phong tục của tây. Có bạn trong đoàn (tôi sẽ không khai tên) có lần còn liều lĩnh cố tình "*lừa*" để khi thơm thì thơm phải môi cô hướng dẫn viên.

## 7. Cuộc đọ sức quốc tế đầu tiên

Đó không phải là cuộc đọ sức về toán học, mà là cuộc thi "*đấu võ*" với bao tải rơm!

Hôm đó, người ta chở các đoàn đến một sân chơi rộng, ở đó có các thân cây gỗ tròn đặt nằm ngang ở mức lửng quãng thắt lưng, và có nhiều bao tải rơm. Trò đấu đơn giản như sau: Hai người ngồi hai đầu của thân cây gỗ, mỗi người cầm một bao tải rơm, cứ thế quật nhau đến khi có người ngã thì là thua một hiệp. Mỗi lần đấu có đến 3 hiệp, ai thắng được hai hiệp thì là thắng.

Sau khi các thí sinh được làm quen với trò đấu bao tải rơm này, người ta bắt đầu tổ chức "*world cup*", chọn ra một đội một người làm đại diện, và đấu loại trực tiếp. Đoàn Việt Nam lúc đó toàn người "*đói ăn*" nhỏ bé, có mỗi tôi tuy ít tuổi nhất đoàn nhưng lại "*to con*" nhất, cao quãng mét bẩy và nặng sáu chục ký, đối với người Việt Nam lúc đó như thế là béo lắm. Thế là tôi được các bạn cử làm đại diện cho đoàn Việt Nam để thi đấu.

Vòng đấu đầu tiên, tôi gặp ngay đối thủ là một bạn Mỹ. Số là Mỹ và Việt Nam có các ký hiệu đứng sát liền nhau trong danh sách các nước thi năm đó (USA và VNM) và thế là khi người ta xếp lịch đấu theo thứ tự ABC thì Mỹ đấu với Việt Nam. Khi đến lượt tôi đấu, các bạn của các nước khác đứng vây quanh reo hò cổ vũ, luôn miệng hô "*Vietnam, Vietnam*". Có lẽ đó là tâm lý chung của thế giới cổ vũ cho "*underdog*". Bạn Mỹ đối thủ của tôi trông cũng mảnh khảnh chứ không to con lắm, không hiểu vì "*lịch sự*" hay vì gì mà các bạn Mỹ chọn bạn này ra thi đấu, trong khi có các bạn trông to hơn thì không thi. Và thế là sau hai hiệp đấu ngang ngửa, thì đến hiệp thứ ba tôi đã quật bay bạn Mỹ xuống đất, mọi người xung quanh lại được dịp reo hò "*Vietnam, Vietnam*".

Vào vòng tiếp theo, tôi gặp một bạn, không nhớ từ nước nào, người không cao, nhưng rất to và chắc nịch, chắc trên tám chục ký. Bạn bè quốc tế lại đứng vây quay cổ vũ "*Vietnam, Vietnam*". Lúc tôi ra chỗ đấu thì bạn đối thủ đã ngồi trên cây gỗ từ trước. Tôi vừa trèo lên, chưa kịp lấy thăng bằng và định thần, thì đã bị bạn ấy giáng ngay cho một phát lăn quay xuống đất. Hiệp sau cũng vậy, vừa trèo lên, chưa kịp bắt đầu thì bạn kia đã không đợi tôi chuẩn bị tư thế xong, mà giáng ngay tiếp một cú, lại lăn quay xuống đất.

Cuộc đọ sức quốc tế lần đầu của tôi chấm dứt như vậy. Cuối cùng thì thắng thua không quan trọng, cái chính là được tham dự những hoạt động vui.

## 8. Vỡ trận đầu tiên

Kỳ thi IMO năm đó có 6 bài, nhưng tôi chỉ làm được có 5 bài, còn một bài chịu chết không thể nào làm được.

Đối với tôi thì đó là cú "*vỡ trận*" đầu tiên của mùa thi học sinh giỏi năm đó, và là cú vỡ trận lớn nhất của đời học sinh. Bởi vì trước khi thi IMO, tôi có thành tích là bài nào cũng "*choảng*" được, từ việc thi học sinh giỏi do báo Toán học & Tuổi trẻ tôi làm nhẵn các bài, đến hai vòng thi học sinh giỏi quốc gia tôi cũng đều làm được hết. Riêng vòng 2 (vòng chọn đội tuyển IMO của Việt Nam) có một bài toán thuộc dạng kết hợp giải tích với các tính chất đối xứng, tôi là thí sinh duy nhất làm được, khiến giáo sư Thu là người ra đề bài đó (mà về sau tôi mới biết) "*hú vía*". Bởi vì một đề bài hay mà không có thí sinh nào giải được thì cũng sẽ thành mất hay bởi nó ra không đúng trình độ của kỳ thi. Thầy Thu có khen tôi là "*thằng này đã biết lý thuyết nhóm*", tuy thực ra lúc đó tôi cũng chẳng biết lý thuyết nhóm là cái chi mô, chỉ có nhớ là có bài toán khác đã làm dùng đến lưới tự nhiên, và tôi vận dụng sự tương tự vào bài giải tích này thôi. Khi học luyện thi học sinh giỏi tôi cũng "*vững vàng*" hơn so với các bạn khác, và ngoài ra có bao nhiêu tài liệu như kiểu tạp chí Kvant rơi vào tay tôi đều "*xơi*" hết, nên khi đi thi IMO tôi cũng khá tự tin. Và trong 6 bài thi có 5 bài tôi làm được ngon lành nhanh gọn thật, chẳng phải suy nghĩ gì nhiều, chỉ có đúng 1 bài là chết đứ đừ luôn, nghĩ mấy tiếng liền không ra.

Cái bài "*gẫy cầu*" đó của tôi là một bài toán theo kiểu thuật toán, đúng là điểm yếu của học sinh Việt Nam, vì hầu như chẳng được học. Năm 1985 xảy ra như vậy, và đến năm 2014 đoàn Việt Nam lại gãy cầu vẫn đúng những bài toán kiểu thuật toán. Thực ra thì không chỉ đoàn Việt Nam gãy cầu, mà rất nhiều các đoàn khác cứ gặp các bài toán thuật toán là "*rụng*". Bởi vậy, tuy tôi chỉ được có $35/42$ điểm năm đó nhưng vẫn được huy chương vàng. Năm nay 2014 thì thậm chí chỉ cần $29/42$ điểm là được huy chương vàng.

Đi vào chi tiết hơn, tôi được 35 điểm, không phải là được 5 bài 7 điểm và 1 bài 0 điểm, mà là chỉ có 4 bài 7 điểm thôi, có một bài chỉ được 5 điểm tuy thực ra là bài rất dễ nhưng do tôi quá chủ quan bỏ quên béng một khúc không viết vào chứ không phải là không biết làm, còn cái bài gẫy cầu thì tuy không tìm ra lời giải, nhưng tôi cũng phóng tác loạn ra được mấy ý tưởng và giả thuyết gì đó nên được ban giám khảo cho 2 điểm. Và 2 điểm được đó theo tôi là xứng đáng, vì xưa nay người ta vẫn làm vậy: Nếu không giải quyết được bài toán nhưng đưa ra được một số ý tưởng liên quan thì vẫn cho điểm. Chỉ có 2 điểm của một bài bị mất vì quên không viết thì quả là đáng tiếc.

Nhưng vì 2 điểm hụt đó mà tôi mất một thứ khác. Ban tổ chức có chuẩn bị một số máy tính nhỏ để tặng các học sinh được huy chương vàng. Nhưng thế quái nào mà số máy tính ít hơn số học sinh được huy chương vàng, nên người ta chỉ tặng cho những người được từ 36 điểm trở lên, còn mấy kẻ $34-35$ điểm như tôi đứng nhìn ngẩn ngơ (năm 1985 có 14 người được HCV trên tổng sống 209 người dự thi, và từ 34 điểm trở lên là được HCV [1]). Như cái câu mà người ta hay nói, "*kẻ về đích thứ hai là kẻ thua đầu tiên*". Do không được máy tính, nên tôi cũng chẳng biết nó có chức năng gì, nhưng đó là hồi năm 85, máy tính cá nhân hiện đại nhất giá hàng vạn đô la cũng không mạnh bằng cái điện thoại rẻ tiền bây giờ. Thầy Quỳnh nói hình như nó biết đánh cờ vua.

## 9. Lần đầu đứng trên Nga

Tuy rằng tôi không đạt kết quả như mong muốn trong kỳ thi IMO 1985, nhưng xét về toàn đoàn, thì đội Việt Nam năm đó lại đạt kết quả tốt, đứng thứ 5, và là lần đầu tiên đứng trên đội Liên Xô, mà sau này chuyển thành đội Nga.

Vì sao lại so sánh với Nga? Bởi vì hệ thống giáo dục ở Việt Nam, ít ra là ở Miền Bắc, thời đó được copy từ hệ thống giáo dục của Nga. Các trường chuyên cũng là học theo mô hình Nga. Các tài liệu tham khảo về môn toán mà chúng tôi có được cũng hầu hết xuất phát từ Nga hoặc Đông Âu. Đặc biệt là tạp chí Kvant (tiếng Nga, nghĩa là "*lượng tử*") là tạp chí khoa học dành cho học sinh phổ thông mà cho đến bây giờ tôi vẫn đánh giá là một trong các tạp chí hay nhất thế giới. Qua bạn Huỳnh Minh Vũ có bố ngày trước du học ở Nga, chúng tôi được xem nhiều số Kvant, cứ thế tự ngồi dịch lõm bõm. Liên Xô những năm 80 của thế kỷ trước tập trung một lượng khổng lồ các nhà toán học lớn, ngang ngửa với cả phương Tây cộng lại, và có truyền thống đào tạo học sinh rất tốt về khoa học tự nhiên. Và không như Pháp là nước chẳng quan tâm mấy về trò thi IMO thời đó, Liên Xô luôn có sự tuyển chọn và luyện tập kỹ lưỡng cho các kỳ thi, Việt Nam có làm cũng là bắt chước Liên Xô. Bởi vậy, với các điều kiện không bằng Nga mà đoàn học sinh Việt Nam đi thi lại đứng trên đoàn Nga thì là một dấu hiệu tốt cho thấy tiềm năng của học sinh Việt Nam cũng khá. Chỉ có điều càng lên cao, cái tiềm năng đó càng dễ thui chột dần vì thiếu điều kiện để phát triển.

Đội Liên Xô, và sau này là đội Nga, luôn đạt thành tích cao ở các kỳ thi IMO, và nhiều lần đứng thứ nhất. Điều này cũng không có gì đáng ngạc nhiên, khi mà nước Nga vẫn còn một truyền thống toán học rất tốt, và họ cũng chọn lọc và chuẩn bị nhiều cho học sinh đi thi IMO. Theo thống kê [2], thì mới chỉ có 2 lần đoàn Việt Nam đứng lên trên đoàn Nga, là năm 1985, và sau đó là năm 2003.

Năm tôi đi thi còn có một điều rất bình thường nhưng cũng đáng mừng với đoàn Việt Nam, đó là đã không xảy ra điều gì đáng tiếc liên quan đến đề bài hay chấm thi. Chúng tôi có một may mắn là cô Sính và thầy Quỳnh dẫn đoàn đều là những người rất nghiêm túc và có trình độ, nên đã không mắc phải những chuyện như dịch sai đề, hay thậm tệ hơn là để lộ đề. Có một năm (mà tôi sẽ không nêu đích danh) đoàn Việt Nam được kết quả cao, nhưng lại mang tiếng vô cùng xấu là để lộ đề, tuy rằng không bị ai kiện chính thức.

[1] http://www.imo-official.org/year_individual_r.aspx?year=1985
[2] http://www.imo-official.org/results.aspx

## 10. Bye bye mái trường phổ thông

Khi đi thi IMO về, chúng tôi được Bộ Giáo Dục gọi lên họp mặt và phát thưởng. Phần thưởng của tôi là hai tấm vải, đủ may hai cái quần dài. Vào năm 1985, nền kinh tế Việt Nam rất bi đát, sau 10 năm thống nhất và "*tiến lên XHCN*" theo vết xe sắp đổ của Liên Xô. Bố mẹ tôi là hai nhà giáo viên "*nhăn răng*", lo miếng ăn cho con từng ngày, nên có vải để may 2 cái quần cũng là quí. Trước đó, từ bé đến lớn, tôi hay "*được*" mặc thừa đồ của người khác, kể cả áo khoác của mẹ thải ra cho chị rồi lại đến lượt tôi mặc.

Phần thưởng lớn nhất đối với tôi lúc đó không phải là hai miếng vải, mà là được đặc cách nhảy cóc tốt nghiệp phổ thông và được cho đi học đại học nước ngoài. Không phải học thêm năm cuối phổ thông đối với tôi lúc đó là một sự sung sướng vô cùng lớn, vì một mặt tôi đã chán học phổ thông, và mặt khác háo hức muốn được ra nước ngoài học càng sớm càng tốt, vừa đỡ gánh nặng cho bố mẹ vừa ăn sung mặc sướng và có điều kiện học hành tốt hơn.

Bye bye mái trường phổ thông, và bye bye luôn tuổi niên thiếu. Từ tháng 9 năm 1985 tôi trở thành sinh viên đại học. Đầu tiên là học ngoại ngữ 1 năm ở trường ĐH Ngoại Ngữ (Thanh Xuân, Hà Nội, nay đã đổi tên hình như thành Đại Học Hà Nội) để chuẩn bị về tiếng, và về *chính trị*, trước khi đi du học vào năm 1986.

Hồi đó tôi chẳng biết nước Đông Âu nào khác ngoài Nga, và cũng chẳng biết môn học hấp dẫn nào khác ngoài toán, nên lựa chọn hiển nhiên là đi học đại học toán ở Nga. Các thầy cô dạy tôi ở Việt Nam cũng hướng tôi đi học toán, và bố mẹ tôi cũng không thấy có gì hơn. Nếu có được thông tin tốt hơn và những sự giới thiệu hay ho về các ngành khác, thì có khi tôi đã lưỡng lự xem nên chọn ngành nào, tuy rằng cuối cùng có thể vẫn quyết định chọn học toán.

Ngành toán là một ngành không dễ dàng. Nhưng tôi không ân hận đã chọn ngành này. Thế giới ngày nay càng ngày càng cần đến hiểu biết về toán học, dù là bạn sẽ trở thành chuyên gia trong lĩnh vực gì thì các khái niệm toán hiện đại nếu hiểu đúng nghĩa sẽ mang lại lợi thế cho bạn.

Câu chuyện miên man của tôi về kỳ thi IMO 1985 kết thúc ở đây.

## 11. Lời giới thiệu và chú thích của Epsilon

GS Nguyễn Tiến Dũng, sinh năm 1970 tại Hà Nội. Năm 1985, khi mới 15 tuổi, ông đoạt huy chương vàng toán quốc tế lần thứ 26 ở Phần Lan. Năm 1994, ở tuổi 24, ông bảo vệ thành công luận án tiến sĩ. Hiện nay ông làm việc tại Đại học Toulouse, Pháp với hàm giáo sư hạng đặc biệt (2015). Bài viết này viết năm 2014 nhân kỷ niệm 40 năm lần đầu Việt Nam tham dự kỳ thi toán quốc tế. Chúng tôi đăng lại nguyên văn bài viết, không chỉnh sửa hay cắt xén.

Dưới đây là một số chú thích, bổ sung của thầy Trần Nam Dũng, HCB Toán quốc tế 1983, là đàn anh của GS Dũng ở khoa Toán-Cơ, MGU.

1) Kho quần áo, giầy dép mà GS Dũng nhắc đến được gọi là kho chú Tứ (Nguyễn Đình Tứ, Bộ trưởng Bộ Đại học và Trung học chuyên nghiệp 1976 – 1987). Ở đó có giày (như mô

tả của GS Dũng), áo lạnh, bộ com-lê, va li để cho những người đi công tác nước ngoài ngắn ngày mượn. Kho này lúc đó nằm trên đường Điện Biên Phủ, gần cửa Nam.

2) Hai loại máy bay thường dùng của Aeroflot lúc bấy giờ là IL 62 (186 hành khách, thân hẹp kiểu Airbus 320 bây giờ) và IL 86 (thân rộng, 350 hành khách). Máy bay cứ bay khoảng 4 tiếng lại phải dừng để tiếp liệu do đó phải dừng ở Bombay hoặc Calcutta, Karachi và Taskent trước khi đến Moskva. Ở Karachi, sau vụ Hoàng Văn Hoan trốn vào sứ quán Trung Quốc người ta không cho xuống sân ga mà phải ngồi trên máy bay.

3) Tôi (Trần Nam Dũng), anh Lê Tự Quốc Thắng và chị Huỳnh Mỹ Linh đã dẫn đoàn học sinh dự thi toán quốc tế năm đó đi chơi một số địa điểm ở Moskva, trong đó có Botanicheski Sad, MGU, Quảng trường Đỏ, Detski Mir,... và đưa ra ga Leningradsky để đi tàu sang Phần Lan. Trong đoàn ngoài Tiến Dũng còn có Huỳnh Minh Vũ là đàn em chị Linh, Lâm Tùng Giang là đàn em Quảng Nam Đà Nẵng của tôi, Khánh, Thành (Nha Trang), Quyền (Đồng Nai). Đây là năm duy nhất trong lịch sử Việt Nam dự IMO mà số học sinh các tỉnh phía Nam đạt tỷ lệ quá bán. Năm 1983 mà tôi thi tỷ lệ này là 50/50.

4) Sau bài viết của GS Nguyễn Tiến Dũng (năm 2014), có hai lần đoàn Việt Nam vượt đoàn Nga ở bảng tổng sắp là năm 2015 và 2017. Đặc biệt năm 2017 (thi ở Brazil) đoàn Việt Nam xếp thứ ba và có em Hoàng Hữu Quốc Huy xếp hạng nhất về tổng điểm thi (35/42).

5) Chiếc máy tính mà GS Dũng nhắc đến, giải thưởng dành cho các bạn đoạt huy chương vàng với 36 điểm trở lên, không phải là máy tính cá nhân, mà là máy tính cầm tay kiểu Casio, loại máy mà bây giờ học sinh phổ thông nào cũng có. Tuy nhiên, vào thời điểm đó, khi mà tất cả còn đang dùng bảng số với bốn chữ số thập phân của Bra-đi-xơ thì cái máy tính cầm tay đó là cả một mơ ước rồi.

6) Cô Hoàng Xuân Sính nhiều năm làm trưởng đoàn Việt Nam thi toán quốc tế, trong đó có năm 1983 (năm tôi thi) và năm 1985. Cô là nữ tiến sĩ toán học đầu tiên của Việt Nam đồng thời là sáng lập viên kiêm Hiệu trưởng đầu tiên của trường Đại học Thăng Long và hiện vẫn là Chủ tịch Hội đồng quản trị của trường này.

7) Thầy Đoàn Quỳnh cũng có nhiều năm dẫn đoàn học sinh Việt Nam thi toán quốc tế. Tôi có nhiều dịp làm việc với thầy Quỳnh nên rất đồng ý với nhận xét của GS Dũng về cô Sính, thầy Quỳnh. Họ làm việc rất nghiêm túc, trung thực, bài bản, có nguyên tắc. Thầy Đoàn Quỳnh là tổng chủ biên bộ tài liệu giáo khoa chuyên toán duy nhất cho đến hiện nay.

8) Hồi đó các học sinh lớp 11 dự thi toán quốc tế xong được nhà nước cử đi học luôn chứ không cần phải học lớp 12, vì vậy mà cũng không có cơ hội được dự thi IMO lần thứ hai. Vì thế mà Nguyễn Tiến Dũng chỉ dự thi IMO 1 lần duy nhất, dù lúc đoạt huy chương vàng năm 1985, anh mới 15 tuổi, về tuổi còn có thể thi vài lần nữa.

Hai bài toán mà GS Dũng có nhắc đến trong bài viết

Bài 1 (IMO 1985, P6). Với mỗi số thực $x_1$, ta xây dựng dãy số $x_1, x_2, \ldots$ bằng các đặt

$$x_{n+1} = x_n \left( x_n + \frac{1}{n} \right), \quad \forall n \geqslant 1.$$

Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một giá trị $x_1$ sao cho bất đẳng thức $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ đúng với mọi số nguyên dương $n$.

Bài 2 (IMO 2014, P6). Tập hợp các đường thẳng trong mặt phẳng được gọi là có vị trí tổng quát nếu không có hai đường thẳng nào song song và ba đường thẳng nào đồng quy. Tập hợp các đường thẳng ở vị trí tổng quát cắt mặt phẳng thành các miền, trong số đó có một số miền có diện tích hữu hạn: Ta gọi chúng là các miền hữu hạn của tập hợp các đường thẳng đó. Chứng minh rằng với $n$ đủ lớn, trong tập hợp gồm $n$ đường thẳng ở vị trí tổng quát, luôn có thể tô màu ít nhất $\sqrt{n}$ đường thẳng bằng màu xanh sao cho không có miền hữu hạn nào của nó có biên toàn màu xanh.

Lưu ý, kết quả với $\sqrt{n}$ khi được thay bởi $c\sqrt{n}$ cũng được điểm tùy vào giá trị của hằng số $c$.