

# BÀI TOÁN THIẾT DIỆN

Bài toán xác định thiết diện của một hình chóp, một hình lăng trụ khi cắt bởi một mặt phẳng gắn liền với các cách xác định một mặt phẳng trong không gian. Theo đó, có các cách thường gặp sau để xác định một mặt phẳng trong không gian:

Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó

1. đi qua ba điểm không thẳng hàng;
2. đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó;
3. chứa hai đường thẳng cắt nhau.
4. chứa hai đường thẳng song song;
5. đi qua một điểm và song song với một mặt phẳng khác;
6. đi qua một điểm và song song với hai đường thẳng cắt nhau hoặc chéo nhau.
7. đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng khác;
8. chứa một đường thẳng và vuông góc với một mặt phẳng khác.

Ở bài này, chúng tôi xin giới thiệu 3 loại toán xác định thiết diện của một hình không gian cắt bởi mặt phẳng ( $\alpha$ ) trong các trường hợp:

## 1. Mặt phẳng ( $\alpha$ ) xác định bởi ba điểm phân biệt không thẳng hàng.

Đối với loại toán này, chúng tôi giới thiệu 2 phương pháp để xác định thiết diện là phương pháp giao tuyến gốc và phương pháp phép chiếu xuyên tâm.

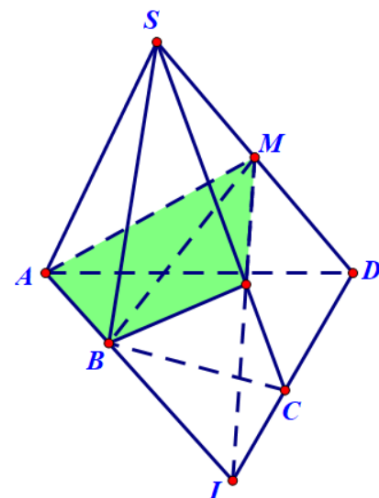
### 1.1. Phương pháp giao tuyến gốc (Trace method)

- Xác định giao tuyến  $d$  của mặt phẳng ( $\alpha$ ) với một mặt  $\mathcal{H}$  của hình chóp, hình lăng trụ (thường là với mặt đáy).
- Tìm các giao điểm của giao tuyến  $d$  với các cạnh, đường chéo của mặt  $\mathcal{H}$ .
- Các giao điểm này thuộc mặt đáy nhưng cũng thuộc vào các mặt bên của hình  $\mathcal{H}$ . Từ các giao điểm này, chúng ta sẽ xác định được giao tuyến của ( $\alpha$ ) và các mặt còn lại của hình chóp. Từ đó dựng được thiết diện.

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy không là hình thang. Giả sử  $M$  là một điểm trên  $SD$ , xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng  $(ABM)$ .

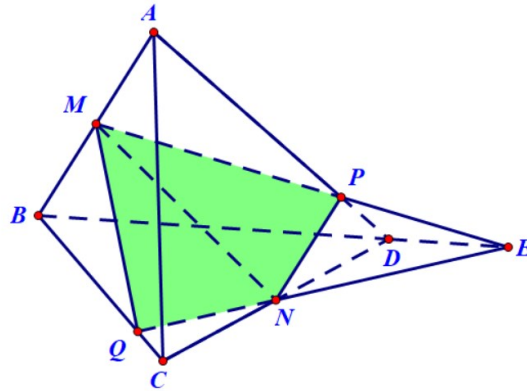
#### Hướng dẫn.

- Rõ ràng rằng giao tuyến của mặt phẳng  $(ABM)$  với mặt đáy  $(ABCD)$  là đường thẳng  $AB$ , nên chúng ta lựa chọn đường thẳng  $AB$  làm giao tuyến gốc.
- Tiếp theo, ta xác định các giao điểm của đường thẳng  $AB$  với các cạnh của đáy, nếu không được thì sẽ sử dụng đến giao điểm với đường chéo. Vì tứ giác  $ABCD$  không là hình thang nên kéo dài hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  thì chúng sẽ cắt nhau, giả sử là điểm  $I$ .



- Lúc này, đường thẳng  $IM$  nằm trong mặt phẳng ( $SCD$ ) nên nó sẽ cắt được đường thẳng  $SC$ , giả sử cắt tại điểm  $N$ .
- Thấy ngay, mặt phẳng ( $ABM$ ) lần lượt cắt các mặt của hình chóp  $S.ABCD$  theo các giao tuyến tạo thành một tứ giác là  $AMNB$  nên thiết diện chính là tứ giác  $AMNB$ .

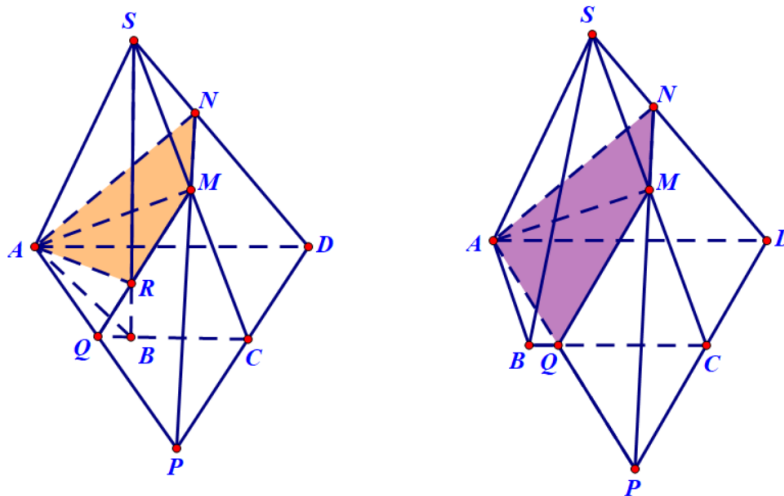
**Ví dụ 2.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $M, N$  là trung điểm của  $AB, CD$ . Giả sử  $P$  là một điểm nằm trên cạnh  $AD$  nhưng không là trung điểm. Xác định thiết diện của mặt phẳng ( $MNP$ ) và tứ diện?



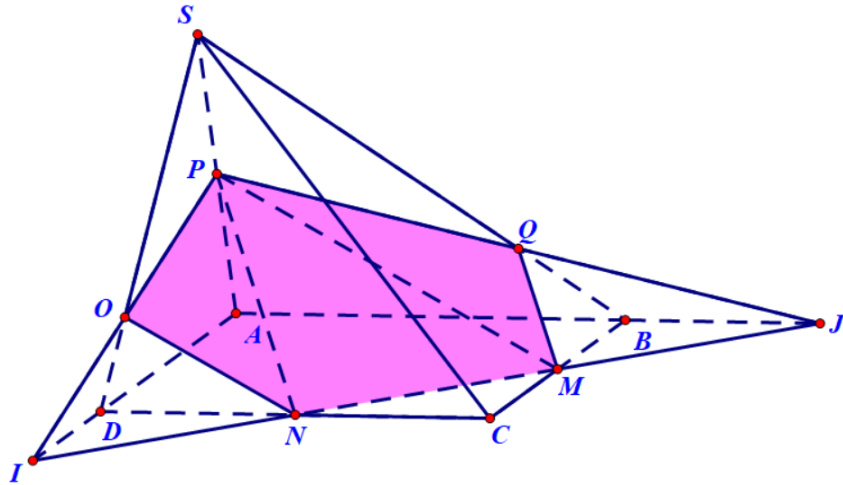
**Hướng dẫn.** Chúng ta lựa chọn  $MP$  là giao tuyến gốc. Trong mặt phẳng ( $ABD$ ), kéo dài  $MP$  cắt  $BD$  tại  $E$ . Trong mặt phẳng ( $BCD$ ), nối  $EN$  cắt  $BC$  tại  $Q$ . Thiết diện là tứ giác  $MPNQ$ .

**Ví dụ 3.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có điểm  $M$  là trung điểm  $SC$ ,  $N$  là một điểm trên cạnh  $SD$  sao cho  $SN < DN$ . Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng ( $AMN$ ).

**Hướng dẫn.** Chúng ta lựa chọn  $MN$  làm giao tuyến gốc. Trong mặt phẳng ( $SCD$ ), kéo dài  $MN$  cắt  $CD$  tại  $P$ . Trong mặt phẳng ( $ABCD$ ), nối  $AP$  cắt  $BC$  tại  $Q$ , tùy thuộc vào vị trí điểm  $Q$  nằm trong hay ngoài đoạn  $BC$  mà ta được thiết diện là như trong 2 hình vẽ sau đây.



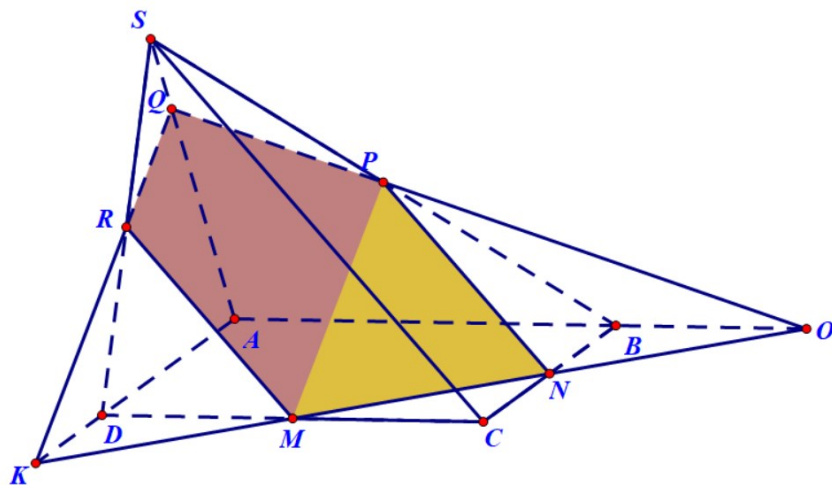
**Ví dụ 4.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành. Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CD$  và  $SA$ . Xác định thiết diện của hình chóp và mặt phẳng  $(MNP)$ .



**Hướng dẫn.** Chúng ta chọn  $MN$  làm giao tuyến gốc. Trong mặt phẳng  $(ABCD)$ , kéo dài  $MN$  cắt  $AB, AD$  lần lượt tại  $J, I$ . Trong mặt phẳng  $(SAD)$ , gọi giao điểm của  $PI$  và  $SD$  là  $O$ . Trong mặt phẳng  $(SAB)$ , gọi  $Q$  là giao điểm của  $PJ$  và  $SB$ . Thiết diện là ngũ giác  $MNOPQ$ .

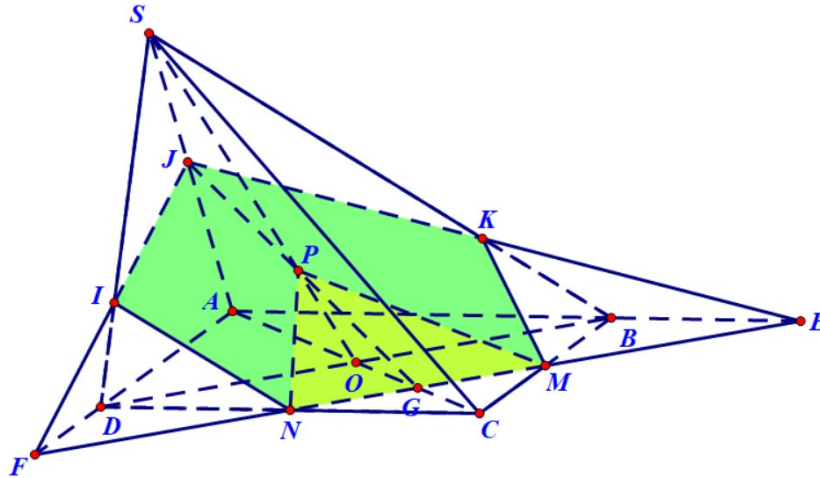
**Ví dụ 5.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành. Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $CD, BC$  và  $SB$ . Xác định thiết diện của hình chóp và mặt phẳng  $(MNP)$ .

**Hướng dẫn.** Trong mặt phẳng  $(ABCD)$  gọi  $O, K$  lần lượt là giao điểm của  $MN$  với  $AB$  và  $AD$ . Trong mặt phẳng  $(SAB)$  gọi  $Q$  là giao điểm của  $SA$  và  $PO$ . Trong mặt phẳng  $(SAD)$  gọi  $R$  là giao điểm của  $QK$  và  $SD$ . Thiết diện là ngũ giác  $MNPQR$ .



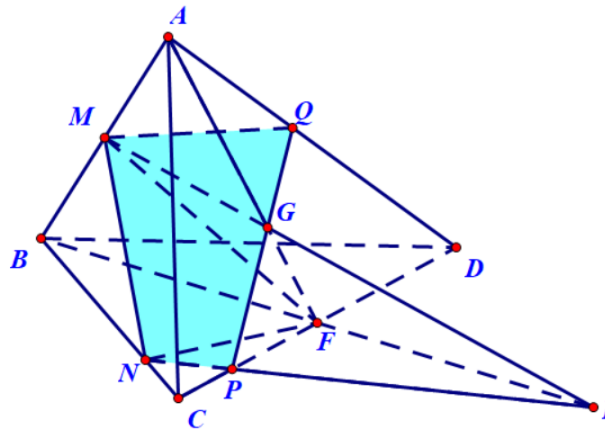
**Ví dụ 6.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CD$ . Trên đoạn  $SO$  lấy điểm  $P$  sao cho  $SP > OP$ . Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng  $(MNP)$ .

**Hướng dẫn.** Trong mặt phẳng  $(ABCD)$  gọi  $E, F, G$  lần lượt là giao điểm của  $MN$  với  $AB, AD, AC$ . Trong mặt phẳng  $(SAC)$  gọi  $J = GP \cap SA$ , trong  $(SAB)$  gọi  $K = JE \cap SB$ , trong  $(SAD)$  gọi  $I = JF \cap SD$ . Thiết diện là ngũ giác  $MNIJK$ .



**Ví dụ 7.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $M$  là trung điểm của  $AB$  và  $G$  là trọng tâm tam giác  $ACD$ .  $N$  là một điểm bất kì thuộc đoạn  $BC$ . Xác định thiết diện của tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng  $(MNG)$ .

**Hướng dẫn.** Tình huống này học sinh dễ ngộ nhận  $MN$  cắt  $AC$ , điều này chưa chắc xảy ra vì nếu  $N$  ở vị trí trung điểm  $BC$  thì khi đó  $MN$  và  $AC$  song song với nhau.



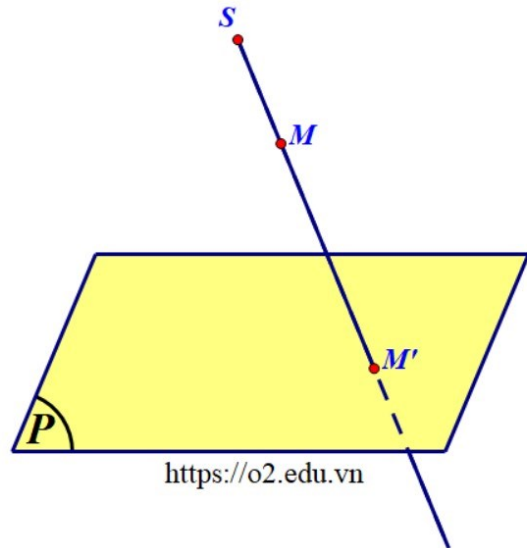
Chúng ta có thể sử dụng phương pháp phép chiếu xuyên tâm hoặc chọn giao tuyến gốc như sau:

- Trong mặt phẳng  $(ACD)$ , kéo dài  $AG$  cắt  $CD$  tại  $F$ .
- Trong mặt phẳng  $(ABF)$  gọi  $I$  là giao điểm của  $MG$  và  $BF$ , hai đường thẳng này chắc chắn cắt nhau vì  $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2} \neq \frac{AG}{AF} = \frac{1}{3}$ . Giao tuyến gốc ở đây chính là đường thẳng  $NI$ .
- Trong mặt phẳng  $(BCD)$  gọi  $P$  là giao điểm của  $CD$  và  $NI$ .
- Thiết diện là tứ giác  $MNPQ$ .

## 1.2. Phương pháp phép chiếu xuyên tâm (Inner Projection Method).

Phép chiếu xuyên tâm (còn được gọi là phép phối cảnh, tiếng Anh: inner projection) được giới thiệu ngay từ lớp 8, trong chương trình công nghệ – vẽ kỹ thuật.

Trong không gian, cho một điểm  $S$  và một mặt phẳng  $(P)$  không đi qua  $S$ . Quy tắc biến mỗi điểm  $M$  trong không gian thành điểm  $M'$  là giao điểm của mặt phẳng  $(P)$  và đường thẳng  $SM$  được gọi là phép chiếu xuyên tâm (tâm  $S$ ) xuống mặt phẳng  $(P)$ .



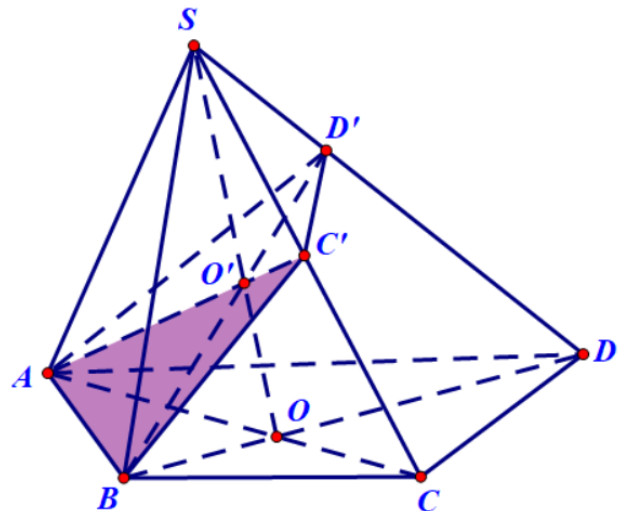
Phương pháp phép chiếu xuyên tâm còn được gọi là phương pháp đường giống.

- Chọn một tam giác trên mặt phẳng  $(\alpha)$  làm tam giác cơ sở và xác định hình chiếu của nó lên mặt đáy qua phép chiếu xuyên tâm với tâm là đỉnh của hình chóp.
- Xác định các giao điểm của tam giác hình chiếu với các cạnh, đường chéo của đáy.
- Dựa vào quan hệ liên thuộc, tìm các điểm trên mặt phẳng  $(\alpha)$  tương ứng với các điểm ở dưới mặt đáy.

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $C'$  là một điểm trên cạnh  $SC$ . Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng  $(ABC')$  trong trường hợp:

1.  $AB$  không song song với  $CD$ ;
2.  $AB$  song song với  $CD$ .

**Hướng dẫn.** Rõ ràng phần 1 học sinh có thể làm bằng phương pháp giao tuyến góc. Tuy nhiên sang phần 2 học sinh sẽ không thể giải được theo phương pháp đó mà phải sử dụng phương pháp phép chiếu xuyên tâm.

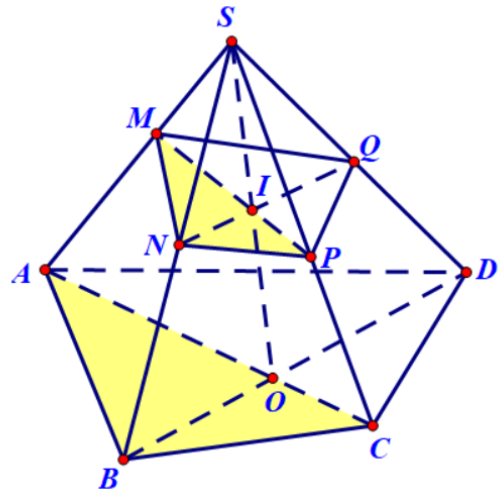


- Chọn tam giác  $ABC'$  làm tam giác cơ sở. Qua phép chiếu xuyên tâm  $S$  lên mặt phẳng  $(ABCD)$  thì tam giác cơ sở biến thành tam giác  $ABC$ . Chúng ta sẽ lần lượt đi tìm giao điểm của các cạnh tam giác này với các cạnh và đường chéo của đáy.
- Trong mặt phẳng  $(ABCD)$  gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Nhận thấy rằng điểm  $O$  thuộc tam giác  $ABC$  thì sẽ có một điểm  $O'$  tương ứng thuộc tam giác cơ sở  $ABC'$  mà qua phép chiếu sinh ra điểm  $O$  này. Nhiệm vụ của chúng ta là tìm ra điểm  $O'$  đó.
- Trong mặt phẳng  $(SAC)$  thấy ngay  $O'$  là giao điểm của  $SO$  và  $AC'$ .

- Cuối cùng, trong mặt phẳng  $(SBD)$  gọi  $D'$  là giao điểm của  $BO'$  và  $SD$ . Thiết diện là tứ giác  $ABC'D'$ .

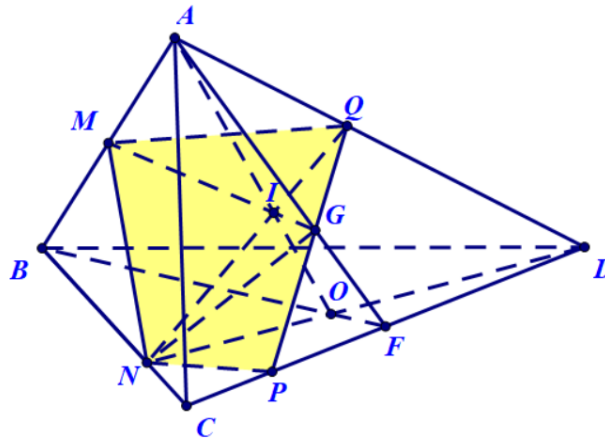
**Ví dụ 2.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có ba điểm  $M, N, P$  lần lượt thuộc  $SA, SB, SC$ . Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng  $(MNP)$ .

**Hướng dẫn.** Chọn tam giác  $MNP$  làm tam giác cơ sở. Chiếu lên đáy được tam giác  $ABC$ . Cạnh  $AC$  của tam giác hình chiếu này cắt đường chéo  $BD$  của đáy tại  $O$ . Trong mặt phẳng  $(SAC)$  gọi  $I$  là giao điểm của  $SO$  và  $MN$ . Trong mặt phẳng  $(SBD)$  gọi  $Q$  là giao điểm của  $NI$  và  $SD$ . Thiết diện là tứ giác  $MNPQ$ .



**Ví dụ 3.** [Ví dụ 7 ở phần 1.1.] Cho tứ diện  $ABCD$

có  $M$  là trung điểm của  $AB$  và  $G$  là trọng tâm tam giác  $ACD$ .  $N$  là một điểm bất kì thuộc đoạn  $BC$ . Xác định thiết diện của tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng  $(MNG)$ .

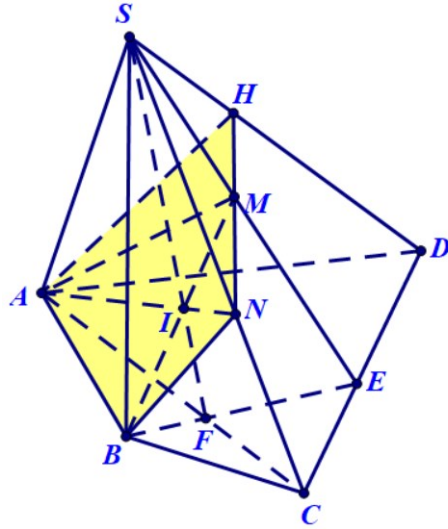


**Hướng dẫn.**

- Chọn tam giác  $MNG$  làm tam giác cơ sở, chiếu lên đáy được tam giác  $BNF$ . Cạnh  $BF$  của tam giác hình chiếu này cắt  $ND$  tại  $O$ .
- Trong mặt phẳng  $(ABF)$ , gọi giao điểm của  $MG$  và  $SO$  là  $I$ .
- Trong mặt phẳng  $(AND)$ , đường thẳng  $NI$  cắt  $AD$  tại  $Q$ .
- Trong mặt phẳng  $(ACD)$ , đường thẳng  $QG$  cắt  $CD$  tại  $P$ .
- Thiết diện là tứ giác  $MNPQ$ .

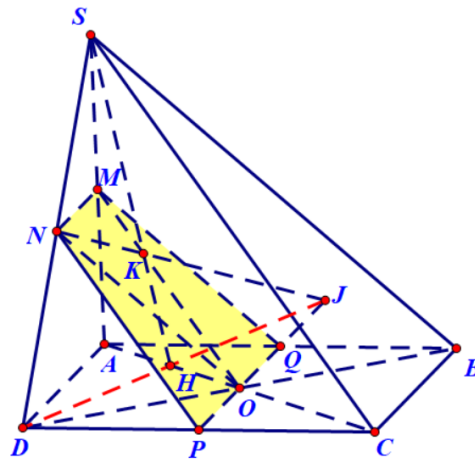
**Ví dụ 4.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $M$  là một điểm thuộc miền trong tam giác  $SCD$ . Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng  $(ABM)$ .

**Hướng dẫn.** Trong mặt phẳng  $(SCD)$  gọi  $E = SM \cap CD$ , trong mặt phẳng  $(ABCD)$  gọi  $F = AC \cap BE$ , trong mặt phẳng  $(SBE)$  gọi  $I = BM \cap SF$ , trong mặt phẳng  $(SAC)$  gọi  $N = AI \cap SC$ , trong mặt phẳng  $(SCD)$  gọi  $H = MN \cap SD$ . Thiết diện là tứ giác  $ABNH$ .





**Ví dụ 5.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $SA, SD$ . Xác định thiết diện của hình chóp và mặt phẳng  $(OMN)$ .



**Hướng dẫn.** Nếu ta chọn tam giác cơ sở là  $OMN$  thì chiếu xuống mặt đáy được tam giác  $OAD$ . Tam giác hình chiếu này không cắt được cạnh nào của hình bình hành  $ABCD$ . Do đó ta phải chọn một tam giác cơ sở khác.

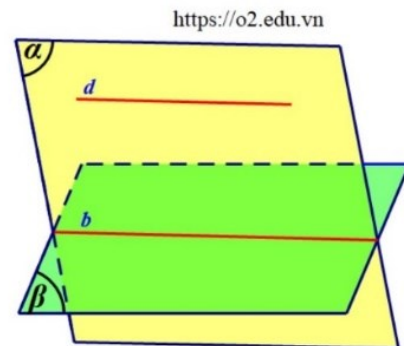
Lấy điểm  $K$  bất kì thuộc  $MO$  và chọn  $MNK$  làm tam giác cơ sở. Chiếu tam giác này lên mặt đáy được tam giác  $ADH$ . Kéo dài  $DH$  cắt  $NK$  tại  $J$ . Đường thẳng  $OJ$  cắt  $AB, CD$  tại  $Q, P$ . Thiết diện là tứ giác  $MNPQ$ .

Cách giải khác cho ví dụ này xin mời xem **Ví dụ 1** ở phần 2 sau đây.

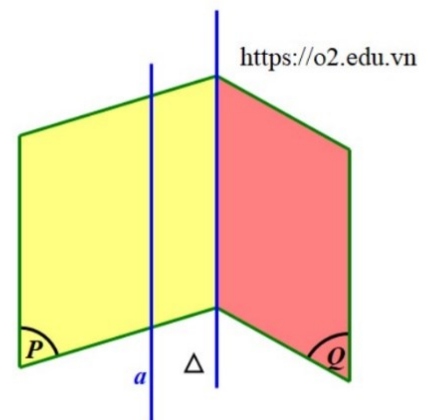
## 2. Mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua một điểm và song song với hai đường thẳng

Chúng ta thường sử dụng 2 kết quả sau để dựng thiết diện.

Nếu mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa đường thẳng  $d$  mà  $d \parallel (\beta)$  thì giao tuyến của hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  nếu có cũng song song với đường thẳng  $d$ .



Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến nếu có của chúng cũng song song với đường thẳng đó.

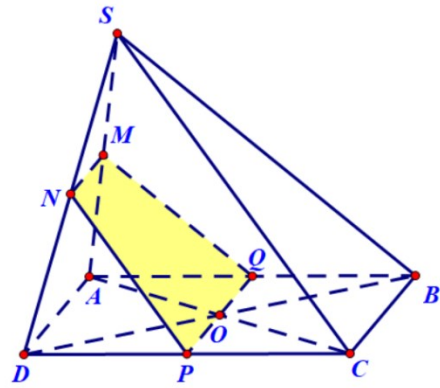




**Ví dụ 1.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành tâm  $O$ . Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua  $O$  và song song với  $SB, SC$ . Thiết diện là hình gì?

**Hướng dẫn.**

- Qua  $O$  kẻ đường thẳng song song với  $SB$ , nó cắt  $SD$  tại  $N$ .  $N$  là trung điểm  $SD$  vì  $ON$  là đường trung bình của tam giác  $SBD$ .
- Tương tự, qua  $O$  kẻ đường thẳng song song với  $SC$ , nó cắt  $SA$  tại trung điểm  $M$ .
- Mặt phẳng  $(\alpha)$  chính là mặt phẳng  $(OMN)$ .
- Đường thẳng  $MN$  nằm trong mặt phẳng  $(OMN)$  và song song với  $(ABCD)$ , nên giao tuyến  $d$  của hai mặt phẳng  $(OMN)$  và  $(ABCD)$  phải song song với đường thẳng  $MN$ .
- Mà giao tuyến  $d$  chắc chắn phải chứa điểm  $O$ . Do đó,  $d$  là đường thẳng đi qua  $O$  và song song  $MN$ , tức là cũng song song với  $AD$ .
- Đường thẳng  $d$  cắt  $AB, CD$  tại  $Q, P$  thì thiết diện là hình thang  $MNPQ$ .

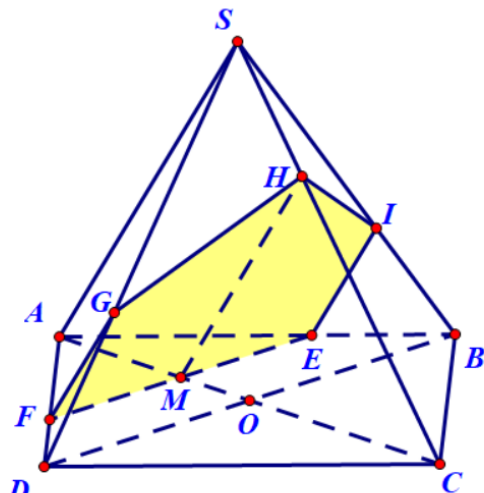


**Ví dụ 2.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành. Gọi  $(P)$  là mặt phẳng đi qua điểm  $M$  thuộc đoạn  $AC$  và song song với hai đường thẳng  $BD, SA$ . Hãy dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng  $(P)$ .

**Hướng dẫn.** Chúng ta phải xét hai trường hợp, điểm  $M$  nằm trong đoạn  $AO$  và nằm trong đoạn  $OC$ , với  $O$  là tâm hình bình hành.

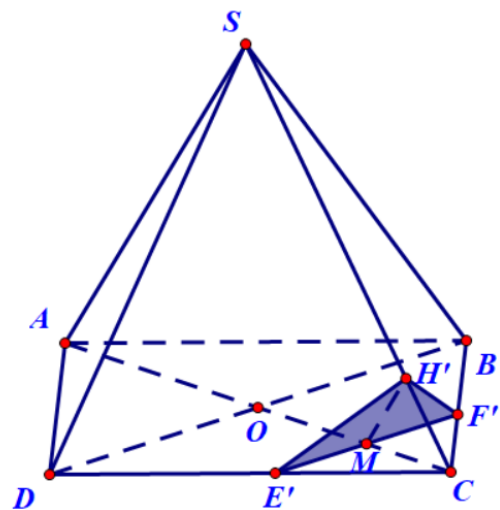
**Trường hợp 1.** Nếu  $M$  nằm trong đoạn  $AO$ .

- Qua  $M$  dựng đường thẳng song song với  $BD$ , nó cắt  $AB$  ở  $E$ , cắt  $AD$  ở  $F$ .
- Qua  $E, M, F$  lần lượt dựng các đường thẳng song song với  $SA$ . Chúng cắt  $SB, SC, SD$  lần lượt tại  $I, H, G$ .
- Thiết diện là ngũ giác  $EFGHI$ .

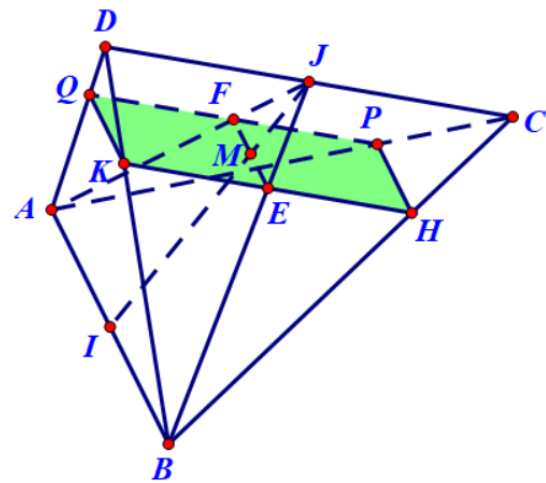


**Trường hợp 2.** Nếu  $M$  nằm trong đoạn  $OC$ .

- Qua  $M$  dựng đường thẳng song song với  $BD$ , nó cắt  $DC$  ở  $E'$ , cắt  $BC$  ở  $F'$ .
- Qua  $M$  dựng đường thẳng song song với  $SA$ , nó cắt  $SC$  tại  $H'$ .
- Thiết diện là tam giác  $E'F'H'$ .



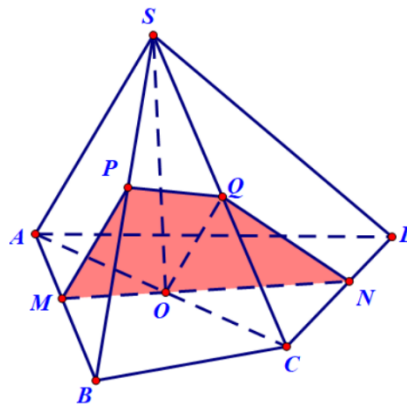
**Ví dụ 3.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ . Gọi  $M$  là một điểm trên đoạn  $IJ$  và  $(\alpha)$  là mặt phẳng qua  $M$  đồng thời song song với  $AB, CD$ . Xác định thiết diện của tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$ , thiết diện là hình gì?



**Hướng dẫn.**

- Trong mặt phẳng  $\left( \{ABJ\} \right)$ , qua  $M$  kẻ đường thẳng  $d$  song song với  $AB$ . Đường thẳng  $d$  cắt  $BJ, AJ$  lần lượt tại  $E$  và  $F$ .
- Qua  $E$  kẻ đường thẳng song song với  $CD$ , nó cắt  $BC, BD$  tại  $H$  và  $K$ .
- Qua  $F$  kẻ đường thẳng song song với  $CD$ , nó cắt  $AC, AD$  tại  $P$  và  $Q$ .
- Thiết diện là hình bình hành  $HKQP$ .

**Ví dụ 4.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $M, N$  là hai điểm trên  $AB, CD$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng chứa  $MN$  và song song với  $SA$ . Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$ .

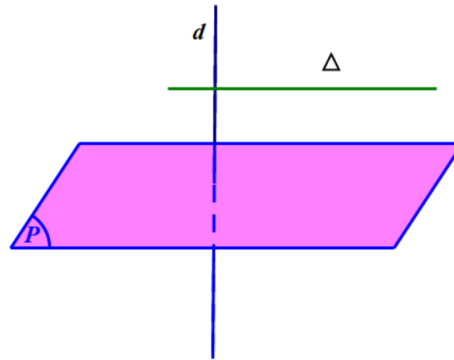


**Hướng dẫn.** Gọi  $MN \cap AC = O$ . Qua  $M, O$  các kẻ đường thẳng song song với  $SA$ , chúng cắt  $SB, SC$  lần lượt tại  $P, Q$ . Thiết diện là tứ giác  $MNPQ$ .

### 3. Mặt phẳng ( $\alpha$ ) đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng

Chúng ta chuyển quan hệ vuông góc sang quan hệ song song nhờ định lý:

Cho đường thẳng  $d$  vuông góc với mặt phẳng ( $P$ ) thì mọi đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với  $d$  đều song song hoặc nằm trong mặt phẳng ( $P$ ).



Trường hợp mặt phẳng ( $\alpha$ ) chứa đường thẳng  $a$  và vuông góc với mặt phẳng ( $P$ ) thì chúng ta tìm một đường thẳng  $b$  vuông góc với mặt phẳng ( $P$ ). Khi đó, mặt phẳng ( $\alpha$ ) sẽ song song hoặc chứa đường thẳng  $b$ .

**Ví dụ 1.** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác nhọn. Mặt phẳng ( $P$ ) đi qua  $A$  và vuông góc với  $A'C$ . Biết rằng  $CC' > AC$ , hãy dựng thiết diện của lăng trụ khi cắt bởi mặt phẳng ( $P$ ).

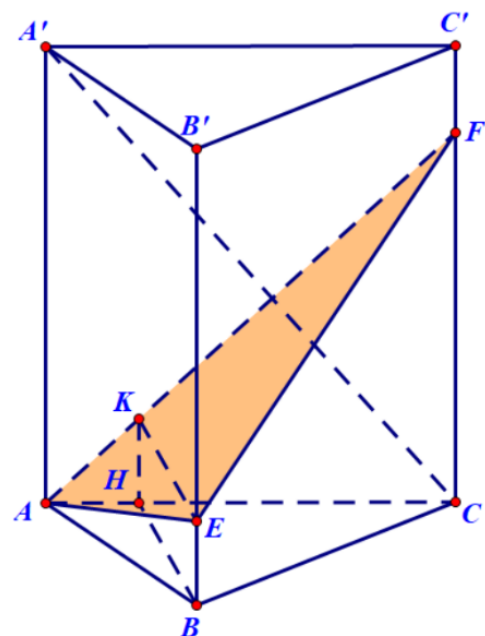
#### Hướng dẫn.

Kẻ đường cao  $BH$  của tam giác  $ABC$  thì dễ thấy  $BH$  vuông góc với  $(ACC'A')$ . Do đó  $BH$  vuông góc với  $CA'$ . Mà  $(P)$  cũng vuông góc với  $CA'$  nên suy ra  $BH$  song song hoặc nằm trong  $(P)$ . Dễ thấy khả năng  $BH$  nằm trong mặt phẳng  $(P)$  không xảy ra, vì khi đó  $AH$  vuông góc với  $A'C$ , đây là điều vô lý.

Trong mặt phẳng  $(ACC'A')$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $A'C$ , đường thẳng này cắt  $CC'$  tại  $F$ . Điểm  $F$  nằm trong đoạn  $CC'$ , vì  $CC' > AC$ .

Qua  $H$  kẻ đường thẳng song song với  $AA'$ , nó cắt  $AF$  tại  $K$ . Từ  $K$  kẻ đường thẳng song song với  $BH$ , đường thẳng này cắt  $BB'$  tại  $E$ .

Thiết diện cần tìm là tam giác  $AEF$ .

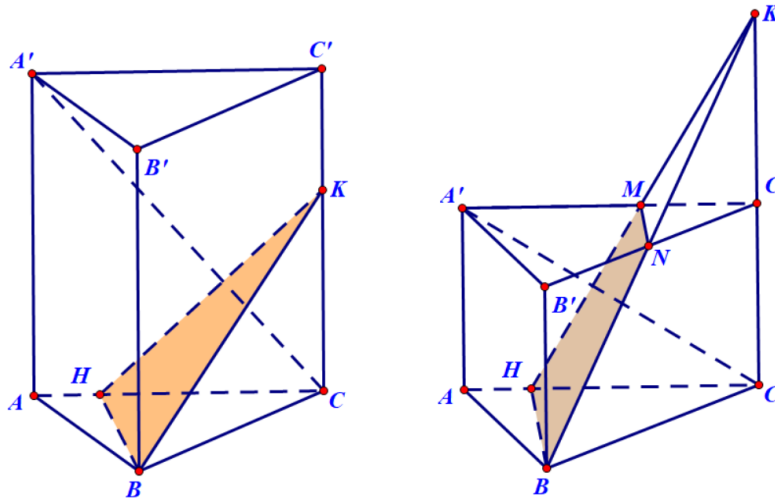


**Ví dụ 2.** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác nhọn. Mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $B$  và vuông góc với  $A'C$ . Hãy dựng thiết diện của lăng trụ khi cắt bởi mặt phẳng  $(P)$ .

**Hướng dẫn.** Kẻ đường cao  $BH$  của tam giác  $ABC$  thì dễ thấy  $BH$  vuông góc với  $(ACC'A')$ . Do đó  $BH$  vuông góc với  $CA'$ . Mà  $(P)$  chứa  $B$  và vuông góc với  $CA'$  nên suy ra  $BH$  nằm trong mặt phẳng  $(P)$ .

Qua  $H$ , kẻ đường thẳng  $d$  vuông góc với  $A'C$ . Lúc này có 2 trường hợp có thể xảy ra:

- Đường thẳng  $d$  cắt  $CC'$  tại  $K$  nằm trong đoạn  $CC'$  thì thiết diện là tam giác  $BHK$ .
- Đường thẳng  $d$  cắt  $CC'$  tại  $K$  nằm ngoài đoạn  $CC'$  và cắt cạnh  $A'C'$  tại  $M$ . Nối  $BK$  cắt  $B'C'$  tại  $N$ . Thiết diện là hình thang  $BHMN$ .



**Ví dụ 3.** Hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông, cạnh  $SA$  vuông góc với đáy  $(ABCD)$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $SC$ . Xác định thiết diện của hình chóp và mặt phẳng  $(P)$ .

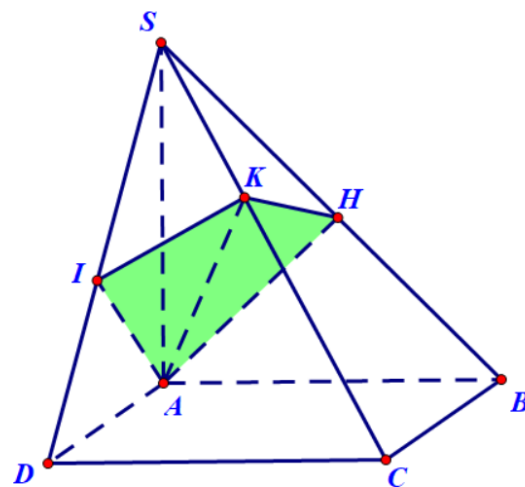
**Hướng dẫn.** Gọi  $H, K, I$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên các cạnh  $SB, SC, SD$ .

Ta có  $AK$  vuông góc với  $SC$  mà mặt phẳng  $(P)$  chứa  $A$  và vuông góc với  $SC$  nên suy ra  $AK$  nằm trong mặt phẳng  $(P)$ .

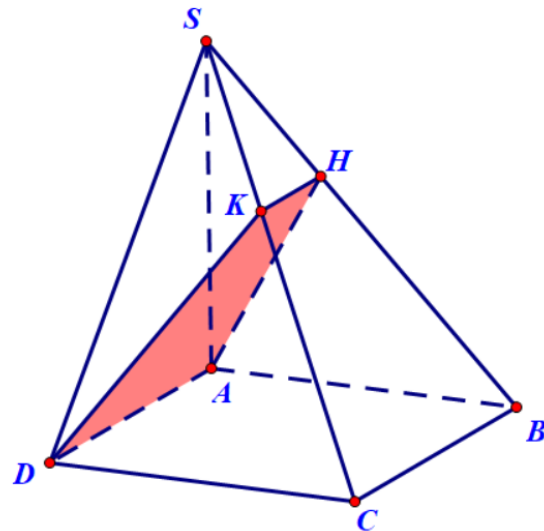
Chứng minh được  $AH$  vuông góc với  $(SBC)$  nên suy ra  $AH \perp SC$ . Mà  $(P) \perp SC$ , nên suy ra  $AH$  cũng nằm trong mặt phẳng  $(P)$ .

Chứng minh tương tự có  $AI$  cũng nằm trong mặt phẳng  $(P)$ .

Thiết diện là tứ giác  $AHKI$ .



**Ví dụ 4.** Hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ , cạnh  $SA = a\sqrt{2}$  và vuông góc với đáy. Dựng đường cao  $AH$  của tam giác  $SAB$ . Chứng minh tỉ số  $\frac{SH}{SB} = \frac{2}{3}$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng qua  $A$  và vuông góc với  $SB$ . Mặt phẳng  $(P)$  cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện.



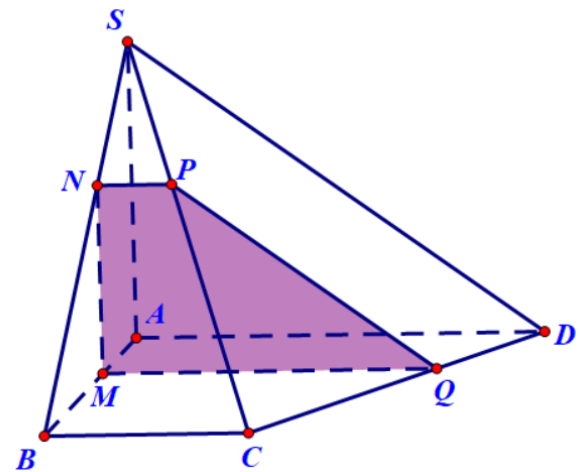
**Hướng dẫn.** Chứng minh được  $CB$  vuông góc với  $(SAB)$  nên suy ra  $CB$  vuông góc với  $SB$ .

Mà  $(P)$  vuông góc với  $SB$  nên suy ra  $CB$  song song với  $(P)$ ,  $CB$  không thể nằm trong mặt phẳng  $(P)$  vì khi đó  $A, B, C, D$  đồng phẳng.

Qua  $H$  kẻ đường thẳng song song với  $CB$ , nó cắt  $SC$  tại  $K$ .

Thiết diện là hình thang  $AHKD$ , diện tích bằng  $\frac{5a^2\sqrt{6}}{18}$ .

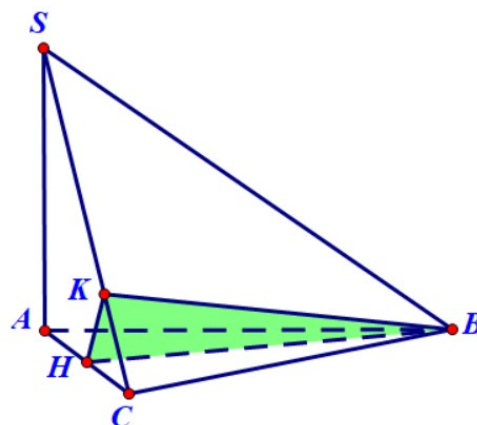
**Ví dụ 5.** Hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$  với  $AB = BC = a, AD = 2a$ . Cạnh  $SA = 2a$  và vuông góc với đáy  $(ABCD)$ . Gọi  $M$  là một điểm trên cạnh  $AB$  sao cho  $AM = x$  với  $0 < x < a$ . Giả sử mặt phẳng  $(P)$  là mặt phẳng qua  $M$  đồng thời vuông góc với  $AB$ . Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng  $(P)$ , thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện theo  $a$  và  $x$ .



**Hướng dẫn.** Vì  $(P)$  và  $SA$  cùng vuông góc với  $AB$  nên suy ra  $SA$  song song với  $(P)$ . Qua  $M$  kẻ các đường thẳng song song với  $SA, AD$ , chúng cắt  $SB, CD$  lần lượt tại  $M$  và  $Q$ . Qua  $N$  kẻ đường thẳng song song với  $AD$ , nó cắt  $SC$  tại  $P$ .

Thiết diện là hình thang vuông  $MNPQ$  có diện tích bằng  $2a(a - x)$ .

**Ví dụ 6.** Hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a$ . Cạnh  $SA = 2a$  và vuông góc với đáy. Mặt phẳng  $(P)$  qua  $B$  và vuông góc với  $SC$ . Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng  $(P)$  và tính diện tích của thiết diện này.



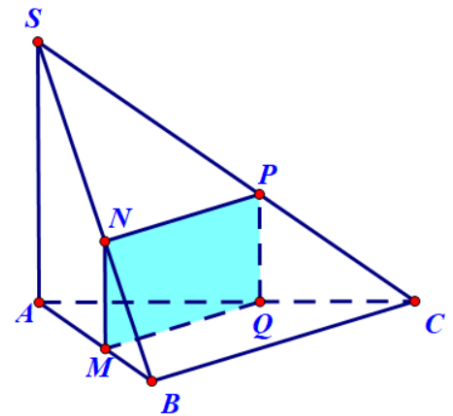
**Hướng dẫn.** Gọi  $H$  là trung điểm  $AC$  thì vì tam giác  $ABC$  đều nên có  $BH \perp AC$ . Mà  $BH \perp SA$  nên suy ra  $BH \perp (SAC)$ .

Suy ra  $BH \perp SC$ , tức là  $BH$  nằm trong mặt phẳng  $(P)$ .

Qua  $H$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $SC$ , nó cắt  $SC$  tại  $K$ .

Thiết diện cần tìm là tam giác  $BHK$  vuông tại  $H$ . Dễ dàng có  $BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Từ tam giác đồng dạng  $SAC$  và  $HKC$  tính được  $HK$  và suy ra diện tích tam giác  $BHK$  bằng  $\frac{a^2\sqrt{15}}{20}$ .

**Ví dụ 7.** Hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác vuông cân tại  $B$ , cạnh  $AB = a$ . Cạnh  $SA = a\sqrt{3}$  và vuông góc với đáy. Lấy  $M$  là một điểm tùy ý trên cạnh  $AB$ , đặt  $AM = x$  với  $0 < x < a$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng qua  $M$  và vuông góc với  $AB$ . Xác định thiết diện của hình chóp và mặt phẳng  $(P)$ . Tính diện tích của thiết diện đó theo  $a$  và  $x$ , tìm  $x$  để diện tích thiết diện có giá trị lớn nhất.



**Hướng dẫn.**

Mặt phẳng  $(P)$  chính là mặt phẳng đi qua  $M$  và song song với  $SA, BC$ .

Qua  $M$  kẻ các đường thẳng song song với  $SA, BC$ , chúng cắt  $SB, AC$  lần lượt tại  $N, Q$ .

Qua  $N$  kẻ đường thẳng song song với  $BC$ , nó cắt  $SC$  tại  $P$ .

Thiết diện là hình chữ nhật  $MNPQ$  nên diện tích được tính bởi công thức

$$s = MN \times MQ$$

Vì  $MN \parallel SA$  nên có  $\frac{MN}{SA} = \frac{MB}{AB}$  từ đó tính được  $MN = \sqrt{3}(a - x)$ . Làm tương tự, cũng tính được  $MQ = x$  và suy ra diện tích thiết diện là  $s = \sqrt{3}x(a - x)$ . Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, chúng ta có

$$\sqrt{x(a - x)} \leq \frac{x + a - x}{2} = \frac{a}{2}$$

Từ đó suy ra diện tích lớn nhất là  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$  đạt được khi  $x = \frac{a}{2}$ .