

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: Toán

(Đề thi có 01 trang)

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu I (1,0 điểm)

1. Cho số phức $z = 1 + 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w = 2z + \bar{z}$.
2. Cho $\log_2 x = \sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^3 + \log_4 x$.

Câu II (1,0 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^4 + 2x^2$.

Câu III (1,0 điểm). Tìm m để hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị đó, tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

Câu IV (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^3 3x(x + \sqrt{x^2 + 16}) dx$.

Câu V (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 2; -2)$, $B(1; 0; 1)$ và $C(2; -1; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC . Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng BC .

Câu VI (1,0 điểm)

1. Giải phương trình $2\sin^2 x + 7\sin x - 4 = 0$.
2. Học sinh A thiết kế bảng điều khiển điện tử mở cửa phòng học của lớp mình. Bảng gồm 10 nút, mỗi nút được ghi một số từ 0 đến 9 và không có hai nút nào được ghi cùng một số. Để mở cửa cần nhấn liên tiếp 3 nút khác nhau sao cho 3 số trên 3 nút đó theo thứ tự đã nhấn tạo thành một dãy số tăng và có tổng bằng 10. Học sinh B không biết quy tắc mở cửa trên, đã nhấn ngẫu nhiên liên tiếp 3 nút khác nhau trên bảng điều khiển. Tính xác suất để B mở được cửa phòng học đó.

Câu VII (1,0 điểm). Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AC , đường thẳng $A'B$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 45° . Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và chứng minh $A'B$ vuông góc với $B'C$.

Câu VIII (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính BD . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng BC, BD và P là giao điểm của hai đường thẳng MN, AC . Biết đường thẳng AC có phương trình $x - y - 1 = 0$, $M(0; 4)$, $N(2; 2)$ và hoành độ điểm A nhỏ hơn 2. Tìm tọa độ các điểm P, A và B .

Câu IX (1,0 điểm). Giải phương trình

$$3\log_3^2(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) + 2\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) \cdot \log_3(9x^2) + \left(1 - \log_{\frac{1}{3}} x\right)^2 = 0.$$

Câu X (1,0 điểm). Xét các số thực x, y thỏa mãn $x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})$ (*).

1. Tìm giá trị lớn nhất của $x + y$.
2. Tìm m để $3^{x+y-4} + (x + y + 1)2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2) \leq m$ đúng với mọi x, y thỏa mãn (*).

-----Hết-----

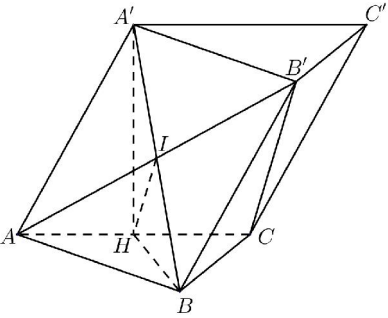
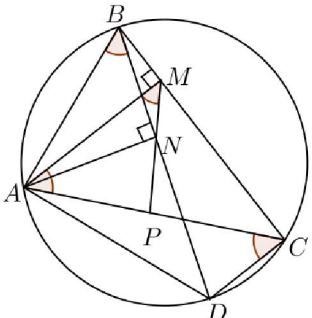
Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

Chữ ký của cán bộ coi thi 1: cán bộ coi thi 2:

Câu	Đáp án	Điểm															
I (1,0 điểm)	1. (0,5 điểm)																
	Ta có $w = 2(1 + 2i) + 1 - 2i$	0,25															
	$= 3 + 2i.$	0,25															
	Vậy phần thực của w là 3 và phần ảo của w là 2.																
II (1,0 điểm)	2. (0,5 điểm)																
	Ta có $A = 2\log_2 x - 3\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x$	0,25															
	$= -\frac{1}{2}\log_2 x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$	0,25															
	<ul style="list-style-type: none"> Tập xác định: $D = \mathbb{R}.$ Sự biến thiên: <ul style="list-style-type: none"> Chiều biến thiên: $y' = -4x^3 + 4x;$ 	0,25															
III (1,0 điểm)	$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}; y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 0 < x < 1 \end{cases}; y' < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x > 1. \end{cases}$																
	Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1).$	0,25															
	Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty).$																
	<ul style="list-style-type: none"> Cực trị: hàm số đạt cực đại tại $x = \pm 1, y_{\text{CD}} = 1;$ đạt cực tiểu tại $x = 0, y_{\text{CT}} = 0.$ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty.$ 																
III (1,0 điểm)	- Bảng biến thiên:																
	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td></td> <td>$+$</td> <td>0</td> <td>$-$</td> <td>0</td> <td>$+$</td> <td>0</td> <td>$-$</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0,25
	x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$											
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$									
III (1,0 điểm)	<ul style="list-style-type: none"> Đồ thị: 																
		0,25															
III (1,0 điểm)	Hàm số đã cho xác định với mọi $x \in \mathbb{R}.$	0,25															
	Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x + m.$																
III (1,0 điểm)	Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $3x^2 - 6x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt, tức là $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 3.$	0,25															

	Ta có $x_1^2 + x_2^2 = 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3 \Leftrightarrow 4 - 2 \cdot \frac{m}{3} = 3$	0,25
	$\Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$ (thỏa mãn). Vậy $m = \frac{3}{2}$.	0,25
IV (1,0 điểm)	Ta có $I = \int_0^3 3x^2 dx + \int_0^3 3x\sqrt{x^2 + 16} dx$.	0,25
	• $I_1 = \int_0^3 3x^2 dx = x^3 \Big _0^3 = 27$.	0,25
	• $I_2 = \int_0^3 3x\sqrt{x^2 + 16} dx$.	
	Đặt $t = x^2 + 16$, ta có $t' = 2x$; $t(0) = 16$, $t(3) = 25$.	0,25
	Do đó $I_2 = \int_{16}^{25} \frac{3}{2} \sqrt{t} dt$	
	$= t\sqrt{t} \Big _{16}^{25} = 61$.	0,25
	Vậy $I = I_1 + I_2 = 88$.	
V (1,0 điểm)	Ta có $\overrightarrow{BC} = (1; -1; 2)$.	0,25
	Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với BC có phương trình là $x - y + 2z + 3 = 0$.	0,25
	Đường thẳng BC có phương trình là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$	0,25
	Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC . Ta có $H = (P) \cap BC$.	
	- Vì $H \in BC$ nên $H(1 + t; -t; 1 + 2t)$.	
	- Vì $H \in (P)$ nên $(1 + t) - (-t) + 2(1 + 2t) + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1$.	0,25
	Vậy $H(0; 1; -1)$.	
VI (1,0 điểm)	1. (0,5 điểm)	
	Ta có $2\sin^2 x + 7\sin x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -4 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$	0,25
	• $\sin x = -4$: vô nghiệm.	
	• $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.	0,25
	2. (0,5 điểm)	
	Không gian mẫu Ω có số phần tử là $n(\Omega) = A_{10}^3 = 720$.	0,25
	Gọi E là biến cố: “B mở được cửa phòng học”. Ta có $E = \{(0; 1; 9), (0; 2; 8), (0; 3; 7), (0; 4; 6), (1; 2; 7), (1; 3; 6), (1; 4; 5), (2; 3; 5)\}$. Do đó $n(E) = 8$.	
	Vậy $P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{1}{90}$.	0,25

<p>VII (1,0 điểm)</p>		<p>Gọi H là trung điểm của AC, ta có $A'H \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{A'BH} = 45^\circ$.</p> <p>Ta có $BH = \frac{1}{2}AC = a$ và $S_{\Delta ABC} = a^2$.</p> <p>Tam giác $A'HB$ vuông cân tại H, suy ra $A'H = BH = a$.</p> <p>Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{\Delta ABC} = a^3$.</p> <p>Gọi I là giao điểm của $A'B$ và AB', ta có I là trung điểm của $A'B$ và AB'. Suy ra $HI \perp A'B$.</p> <p>Mặt khác HI là đường trung bình của $\Delta AB'C$ nên $HI \parallel B'C$. Do đó $A'B \perp B'C$.</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
<p>VIII (1,0 điểm)</p>		<p>Phương trình MN: $x + y - 4 = 0$.</p> <p>Tọa độ P là nghiệm của hệ</p> $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right).$ <p>Vì AM song song với DC và các điểm A, B, M, N cùng thuộc một đường tròn nên ta có</p> $\widehat{PAM} = \widehat{PCD} = \widehat{ABD} = \widehat{AMP}.$ <p>Suy ra $PA = PM$.</p> <p>Vì $A \in AC : x - y - 1 = 0$ nên $A(a; a - 1), a < 2$.</p> <p>Ta có $\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 5 \end{cases} \Rightarrow A(0; -1)$.</p> <p>Đường thẳng BD đi qua N và vuông góc với AN nên có phương trình là $2x + 3y - 10 = 0$.</p> <p>Đường thẳng BC đi qua M và vuông góc với AM nên có phương trình là $y - 4 = 0$.</p> <p>Tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x + 3y - 10 = 0 \\ y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-1; 4)$.</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
<p>IX (1,0 điểm)</p>	<p>Điều kiện: $0 < x \leq 2$.</p> <p>Khi đó phương trình đã cho tương đương với</p> $3 \log_3^2(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) - 4 \log_3(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) \cdot \log_3(3x) + \log_3^2(3x) = 0$ $\Leftrightarrow [\log_3(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) - \log_3(3x)] [3 \log_3(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) - \log_3(3x)] = 0.$ <ul style="list-style-type: none"> $\log_3(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) - \log_3(3x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} = 3x$ $\Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{4-x^2} = 9x^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{4-x^2} = 9x^2 - 4$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq \frac{4}{9} \\ 81x^4 - 68x^2 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow x^2 = \frac{68}{81}.$ <p>Kết hợp với điều kiện $0 < x \leq 2$, ta có nghiệm $x = \frac{2\sqrt{17}}{9}$.</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p>	
	<ul style="list-style-type: none"> $3 \log_3(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) - \log_3(3x) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})^3 = 3x$ (1). <p>Vì $0 < x \leq 2$ nên $3x \leq 6$.</p>	<p>0,25</p>	

	<p>Mặt khác $(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})^2 = 4 + 2\sqrt{4-x^2} \geq 4 \Rightarrow (\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})^3 \geq 8$. Do đó phương trình (1) vô nghiệm.</p> <p>Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{2\sqrt{17}}{9}$.</p>	0,25												
X (1,0 điểm)	1. (0,25 điểm)													
	Điều kiện: $x \geq 2, y \geq -3$.													
	Ta có (*) $\Leftrightarrow (x+y+1)^2 = 4(x+y+1+2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3})$ (**).													
	Vì $2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3} \leq x+y+1$ nên từ (**) suy ra $(x+y+1)^2 \leq 8(x+y+1)$ $\Rightarrow x+y+1 \leq 8 \Rightarrow x+y \leq 7$. Ta có $x=6, y=1$ thỏa mãn (*) và $x+y=7$. Do đó giá trị lớn nhất của biểu thức $x+y$ bằng 7.	0,25												
	2. (0,75 điểm)													
	Vì $2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3} \geq 0$ nên từ (**) suy ra $(x+y+1)^2 \geq 4(x+y+1)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1 \leq 0 \\ x+y+1 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \text{ (vì } x+y+1 \geq 0) \\ x+y+1 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ x+y \geq 3. \end{cases}$	0,25												
	Vì $x^2 \geq 2x$ (do $x \geq 2$), $y^2 + 1 \geq 2y$ nên $x^2 + y^2 + 1 \geq 2(x+y)$. Do đó $3^{x+y-4} + (x+y+1)2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2) \leq 3^{x+y-4} + (x+y+1)2^{7-x-y} - 6(x+y) + 3$.	0,25												
	Đặt $t = x+y$, ta có $t = -1$ hoặc $3 \leq t \leq 7$. Xét hàm số $f(t) = 3^{t-4} + (t+1)2^{7-t} - 6t + 3$. Ta có $f(-1) = \frac{2188}{243}$; $f'(t) = 3^{t-4} \ln 3 + 2^{7-t} - (t+1)2^{7-t} \ln 2 - 6$; $f''(t) = 3^{t-4} \ln^2 3 + [(t+1)\ln 2 - 2]2^{7-t} \ln 2 > 0, \forall t \in [3;7]$. Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $(3;7)$. Mà $f'(t)$ liên tục trên $[3;7]$ và $f'(3)f'(7) < 0$, do đó $f'(t) = 0$ có nghiệm duy nhất $t_0 \in (3;7)$. Bảng biến thiên													
	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">t</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">t_0</td> <td style="text-align: center;">7</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$f'(t)$</td> <td style="text-align: center;">-</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">+</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$f(t)$</td> <td style="text-align: center;">$\frac{148}{3}$</td> <td style="text-align: center;">$f(t_0)$</td> <td style="text-align: center;">-4</td> </tr> </tbody> </table>	t	3	t_0	7	$f'(t)$	-	0	+	$f(t)$	$\frac{148}{3}$	$f(t_0)$	-4	0,25
t	3	t_0	7											
$f'(t)$	-	0	+											
$f(t)$	$\frac{148}{3}$	$f(t_0)$	-4											
	Suy ra $3^{x+y-4} + (x+y+1)2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2) \leq \frac{148}{3}$ với mọi x, y thỏa mãn (*). Đẳng thức xảy ra khi $x=2, y=1$. Vậy $m \geq \frac{148}{3}$.													